УДК 517:519.71; 62.50

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ КАК СВОЙСТВО ИХ ТОЧЕЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

В. В. Осипов

CONTROLLABILITY OF LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS AS PROPERTY OF THEIR POINT MODELS

V. V. Osipov

При анализе точечных моделей многомерных линейных динамических систем (стационарных и нестационарных) решена задача управляемости моделируемых объектов, которая непосредственно связана с положительной определенностью и невырожденностью системных матриц таких моделей.

In the analysis of point models of multidimensional linear dynamical systems (stationary and nonstationary) solved the problem of controllability of the modeled objects, which is directly connected with the positive definite and nondegeneracy system matrix of such models.

Ключевые слова: метод точечных представлений, точечное моделирование, многомерные нестационарные динамические системы.

Keywords: method of point representations, the point modeling, multidimensional nonstationary dynamical systems.

Пусть имеем линейную нестационарную динамическую систему:

$$\frac{dX(\tau)}{d\tau} + TA(\tau)X(\tau) = TK(\tau)\cdot U(\tau), \qquad (1)$$

n фазовых переменных которой (n-вектор состояния $X(\tau) = Colon[x_1(\tau),..x_i(\tau),..x_n(\tau)]$) оказываются ее выходными переменными, а q-вектор $U(\tau) = Colon[u_1(\tau),..u_i(\tau),..u_q(\tau)]$ является вектором ее выходных сигналов (вектор-функции входа). Рассматриваются управляемые динамические системы, выходные процессы $X(\tau)$, в которых определяющие их динамику на отрезке [0, 1] безразмерного времени τ (или $[0, T]$ времени $t = T\tau$), возникают под воздействием входных сигналов $U(\tau)$, т. е. управляются этими сигналами. Будем их называть управлением.

Возникает естественный вопрос: при каких условиях система будет обладать таким свойством, которое будем называть свойством управляемости или просто управляемостью [1].

Определение 1. Линейную систему (1) назовем управляемой на отрезке $[0, \tau0] \subset [0, 1]$, если для всякого конечного состояния $X(\tau0)$ на этом отрезке существует управление $U0(\tau)$, которое переводит систему из состояния покоя $X(0) = 0$ в состояние $X(\tau0)$.

Выделим сразу множество линейных стационарных систем – частного случая нестационарных систем (1), когда матрицы $A(\tau)$, $(n\text{x}n)$ и $K(\tau)$, $(n\text{x}q)$ оказываются постоянными:

$$\frac{dX(\tau)}{d\tau} + TA\cdot X(\tau) = T\cdot K\cdot U(\tau) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(\tau) + TA\int_0^\tau X(\tau)d\tau = T\cdot K\int_0^\tau U(\tau)d\tau.$$

Будем искать условия управляемости систем (1) на основе их точечных моделей, точнее, точечных моделей их эквивалентных интегральных уравнений вида ($X0 = 0$):

$$X(\tau) + T\int_0^\tau A(\tau)X(\tau)d\tau = T\int_0^\tau K(\tau)U(\tau)d\tau, \qquad (2)$$

которые являются гомоморфными алгебраическими образами этих уравнений. Однако переход к точечным моделям требует несколько иного определения свойства управляемости уже на языке метода точечных представлений.

Для линейной динамической системы (2), точечная модель которой, ассоциированная с чебышевской N-сеткой I рода, связывает блочные точечные вектора входа и выхода:

$$\left.\begin{aligned} U(\tau) &\xrightarrow{T_{\mathrm{I}}} \bar{U}_{T\mathrm{I}} = Colon\left[U\left(\tau_1^{(N)}\right)\vdots\cdots\vdots U\left(\tau_\nu^{(N)}\right)\vdots\cdots\vdots U\left(\tau_N^{(N)}\right)\right] \quad a) \\ X(\tau) &\xrightarrow{T_{\mathrm{I}}} \bar{X}_{T\mathrm{I}} = Colon\left[X\left(\tau_1^{(N)}\right)\vdots\cdots\vdots X\left(\tau_\nu^{(N)}\right)\vdots\cdots\vdots X\left(\tau_N^{(N)}\right)\right] \quad б) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

в форме линейного преобразования

$$\overline{X}_{T\mathrm{I}} = W_N(A_\nu;K_\nu)\cdot\overline{U}_{T\mathrm{I}} \qquad (4)$$

реализуемого блочной передаточной матрицей [2]:

$$W_N(A_\nu;K_\nu) = T_N^{-1}\left[B_\nu\right]\cdot D_N\left[\left(E_n+\lambda_0 A_\nu\right)^{-1}\right]\cdot \\ \cdot\lambda_0\left[\left(E_n+Z\right)\otimes E_n\right]\cdot D_N\left[K_\nu\right] \qquad (5)$$

может быть дано следующее определение свойства управляемости.

Определение 2. Линейную динамическую систему (2), имеющую точечную модель (4), назовем управляемой на отрезке [0, 1] безразмерного времени (или на отрезке $[0, T]$ для переменной $t = T\tau$), если для всяких состояний $X(\tau_\nu^{(N)})\ (\nu = \overline{1,N})$, как значений выходного n-мерного сигнала $X(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ в узлах чебышевской N-сетки I рода

$\tau_\nu^{(N)} = \dfrac{2\nu - 1}{2N}, (\nu = \overline{1,N})$, т. е. для всякого выходного точечного вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$ (3 б) существуют такие соответствующие q-мерные управления $U(\tau_\nu^{(N)}), (\nu = \overline{1,N})$, образующие точечные вектора входа $\bar{U}_{T\text{I}}$ (3 а), которые переводят динамическую систему из состояния покоя $X(0) = X0 = 0$ в любое из заданных состояний $X(\tau_\nu^{(N)})\ (\nu = \overline{1,N})$, при любой размерности чебышевской сетки.

Замечание. Управляемость всякой линейной динамической системы вида (2) означает и существование управления $U(t) = U(T\tau)$, способного переводить систему и из состояния покоя $X(0) = 0$ в некоторое конечное состояние $X(T)$ за конечный промежуток времени $[0, T]$ и удерживать ее в таком состоянии в последующее время. Но такое свойство может реализовываться лишь в асимптотически устойчивых системах. Таким образом, устойчивость системы вида (2) является необходимым условием для ее управляемости.

Используя это определение, найдем условие управляемости прежде для стационарной динамической системы (1) – более простого частного случая системы (2).Точечная модель такой системы [2]:

$$\overline{X}_{T\text{I}} = W_N(A;K) \cdot \overline{U}_{T\text{I}} \tag{6}$$

имеет более простую передаточную матрицу, которую представим в виде произведения двух блочных теплицевых матриц, одна из которых определяется только системной матрицей A, (nxn), другая только матрицей K, (nxq):

$$\begin{aligned} W_N(A;K) &= T_N^{-1}\left[-B\right] \cdot D_N[(E_n + \lambda_0 A)^{-1}] \cdot \lambda_0[(E_n + Z) \otimes E_n](E_n \otimes K) = \\ &= W_N(A) \cdot (E_n \otimes K) = W_N(A) \cdot D_N[K], \end{aligned} \tag{7}$$

где матрицы $WN(A)$, учитывая перестановочность блочных теплицевых матриц, будет иметь представление:

$$W_N(A) = D_N[(E_n + \lambda_0 A)^{-1}] \cdot T_N^{-1}\left[(-B)\right] \cdot \lambda_0[(E_n + Z) \otimes E_n]. \tag{8}$$

Для матриц в ее составе найдем развернутые представления. Так, обращение матрицы $TN[(-B)]$ дает для матрицы $T_N^{-1}\left[(-B)\right]$:

$$\begin{aligned} T_N^{-1}\left[(-B)\right] &= \left\{T_N\left[(-B)\right]\right\}^{-1} = \left\{E_{Nn} + \left[Z \otimes (-B)\right]\right\}^{-1} = \sum_{\nu=0}^{N-1} (-1)^\nu \left[Z \otimes (-B)\right]^\nu = \\ &= \sum_{\nu=0}^{N-1}\left[Z^\nu \otimes (-1)^\nu (-B)^\nu\right] = \begin{bmatrix} E_N & & & & & & \\ -(-B) & E_N & & & & & \\ (-B)^2 & -(-B) & E_N & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ (-1)^\nu(-B)^\nu & \cdots & (-B)^2 & -(-B) & E_N & & \\ \vdots & & & & & & \\ (-1)^{N-1}(-B)^{N-1} & \cdots & (-1)^\nu(-B)^\nu & \cdots & (-B)^2 & -(-B) & E_N \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

В компактной записи для нулевых степеней предполагается, что $Z0 = EN$; $(-B)0 = En \Rightarrow [Z0 \otimes (-B)0] = (EN \otimes En) = \ = ENn$. Символом $(-B)$ обозначен дробно-рациональный матричный блок:

$$\begin{aligned} (-B) &= \frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} = \left(E_n + \lambda_0 A\right)^{-1}\left(E_n - \lambda_0 A\right) = \\ &= \left(E_n - \lambda_0 A\right)\left(E_n + \lambda_0 A\right)^{-1}, \quad (n\text{x}n). \end{aligned}$$

Обратную матрицу $\left(E_n + \lambda_0 A\right)^{-1}$ часто удобно представлять в виде дробно-рациональной функции матрицы A (nxn) с положительным параметром $\lambda 0 = T/2N > 0$, полагая:

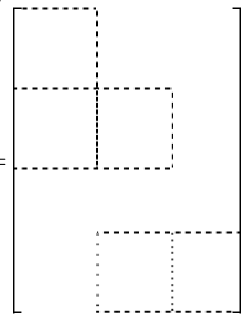
$$\left(E_n + \lambda_0 A\right)^{-1} = \frac{E_n}{E_n + \lambda_0 A} \quad (n\text{x}n).$$

Тогда квазидиагональная матрица $DN[(En + \lambda 0A)-1]$ в (7) и (8) запишется в виде:

$$D_N\left[\left(E_n + \lambda_0 A\right)^{-1}\right] = Diag\left[\frac{E_n}{E_n + \lambda_0 A} \vdots \cdots \vdots \frac{E_n}{E_n + \lambda_0 A} \vdots \cdots \vdots \frac{E_n}{E_n + \lambda_0 A}\right]. \tag{10}$$

Для последней блочной матрицы в произведении (8) будем иметь:

$$\left[\left(E_n + Z\right) \otimes E_n\right] = \left(E_n \otimes E_n\right) + \left(Z \otimes E_n\right) = \tag{11}$$



Подставим теперь в (8) найденные явные представления матриц (9), (10) и (11) и осуществим операции матричных умножений. При этом возникают следующие преобразования блочных матричных элементов:

$$\left[(-1)^{\nu}(-B)^{\nu} + (-1)^{\nu-1}\cdot(-B)^{\nu-1}\right] = (-1)^{\nu-1}\cdot(-B)^{\nu-1}\left[-(-B) + E_n\right] =$$

$$= (-1)^{\nu-1}\cdot(-B)^{\nu-1}\left[-\frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} + E_n\right] = (-1)^{\nu-1}\cdot(-B)^{\nu-1}\cdot\frac{2\lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A}, (\nu = \overline{1,(N-1)}),$$

которые и определят блочные элементы результирующей матрицы $W_N(A)$ (8):

$$W_N(A) = \frac{E_n}{E_n + \lambda_0 A}\cdot\begin{bmatrix} E_n & & & & & \\ \frac{2\lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} & E_n & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \\ \frac{2\lambda_0(-1)^{\nu-1}(-B)^{\nu-1}A}{E_n + \lambda_0 A} & \cdots & \frac{2\lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} & E_n & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{2\lambda_0(-1)^{N-2}(-B)^{N-2}A}{E_n + \lambda_0 A} & \cdots & \frac{2\lambda_0(-1)^{\nu-1}(-B)^{\nu-1}A}{E_n + \lambda_0 A} & \cdots & \frac{2\lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} & E_n \end{bmatrix}. \tag{12}$$

В связи с представлением (7) для передаточной матрицы в стационарном случае динамической системы ее точечная модель (6) может быть записана в виде:

$$\overline{X}_{T\mathrm{I}} = W_N(A;K)\cdot\overline{U}_{T\mathrm{I}} = W_N(A)\cdot D_N(K)\cdot\overline{U}_{T\mathrm{I}}, \tag{13}$$

где квазидиагональная матрица $D_N(K)$ (NqxNq) имеет прямоугольную матрицу K (nxq) в качестве своих блочных элементов:

$$D_N(K) = (E_n \otimes K) = Diag\left[K \vdots\cdots\vdots K \vdots\cdots\vdots K\right]. \tag{14}$$

Если матрица ($E_n + \lambda_0 A$) (nxn) при всяких положительных значениях параметра $\lambda_0 = T/2N$ окажется невырожденной, то будут существовать все блочные элементы матрицы $W_N(A)$ (12), и она также окажется невырожденной и, следовательно, для всяких $\lambda_0 > 0$ будет существовать обратная матрица:

$$W_N^{-1}(A) = \frac{1}{\lambda_0}\left[\left(E_n + Z\right)\otimes E_n\right]^{-1}\cdot$$
$$\cdot T_N\left[(-B)\right]\cdot D_N\left[\left(E_n + \lambda_0 A\right)\right]. \tag{15}$$

Поэтому точечная модель (13) может быть представлена в форме следующего векторно-матричного равенства:

$$W_N^{-1}(A)\cdot\overline{X}_{T\mathrm{I}} = D_N\left(K\right)\cdot\overline{U}_{T\mathrm{I}}. \tag{16}$$

Теперь, на основе известных положений обычной линейной алгебры, может быть доказана следующая теорема об управляемости линейных стационарных динамических систем.

Теорема 1. Если матрица A (nxn) стационарной динамической системы (1) положительно определена [3], а матрица K (nxq) ($q \geq n$) имеет ранг n, то такая система с точечной моделью (13) окажется управляемой на [0, T]. При этом ее передаточная матрица $W_N(A; K)$ (7) при любых N будет иметь ранг Nn, равный размерности точечного вектора выхода $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$.

Доказательство. Положительная определенность матрицы A означает отрицательность вещественных частей собственных значений матрицы ($-A$), т. е. устойчивость динамической системы (1) – необходимого условия ее управляемости [3]. Это также означает положительную определенность матрицы ($E_n + \lambda_0 A$) (nxn) при любых $\lambda_0 = T/2N > 0$ (т. е. любых N при фиксированных T), т. е. означает выполнение условия теоремы о существовании передаточной матрицы $W_N(A; K)$ в точечной модели (6) динамической системы в рассматриваемом случае. Что означает также невырожденность матрицы

$WN(A)$ (12) и существование обратной матрицы $WN–1(A)$ (15).

Введем блочный вектор

$$\bar{Y}_{T\text{I}} = W_N^{-1}(A) \cdot \bar{X}_{T\text{I}}, \tag{17}$$

который будет однозначно определен для всякого заданного вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$ и запишем точечную модель (16) в виде линейного уравнения для блочного вектора управления $\bar{U}_{T\text{I}}$ с системной матрицей $\lambda 0DN(K)$ (NnхNq) и правой частью (17), т. е. в виде

$$D_N(K) \cdot \bar{U}_{T\text{I}} = \bar{Y}_{T\text{I}} = W_N^{-1}(A) \cdot \bar{X}_{T\text{I}}. \tag{18}$$

Это уравнение окажется совместным, т. е. будет иметь решение $\bar{U}_{T\text{I}}$, если его системная матрица $DN(K)$ (NnхNq) (14) будет иметь ранг Nn. Последнее будет наблюдаться лишь тогда, когда все блочные элементы этой квазидиагональной матрицы, т. е. матрица K (nхq) будет иметь ранг n, что возможно, если $q \geq n$, т. к. $Rang\ (K) \leq \min(n, q)$. Решение окажется единственным, если матрица K ранга n окажется квадратной ($q = n$), т. е. невырожденной.

Таким образом, если выполняется и второе условие теоремы 1 относительно ранга матрицы K (nхq), то для всякого однозначного заданного вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$ существует вектор управления $\bar{U}_{T\text{I}}$ и, значит, по определению 2 стационарная динамическая система с точечной моделью (13) окажется управляемой на временном отрезке $[0, T]$.

Точечную модель (6) (или (13)) запишем в виде уравнения для вектора $\bar{U}_{T\text{I}}$ с системной матрицей $WN(A; K)$ (7) и правой частью $\bar{X}_{T\text{I}}$:

$$W_N(A;K) \cdot \overline{U}_{T\text{I}} = \overline{X}_{T\text{I}}.$$

Это уравнение эквивалентно уравнению (18), поэтому оно также совместно и, следовательно, его системная матрица, а это передаточная матрица $WN(A; K)$ (NnхNq) рассматриваемой динамической системы, будет иметь ранг Nn, равный размерности вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$. Теорема доказана.

Логика доказательства теоремы об управляемости динамической системы частного вида, основанного на известных положениях линейной алгебры и само определение понятия управляемости линейной динамической системы общего вида со всей очевидностью показывает, что свойство управляемости линейной динамической системы, описываемой функциональным уравнением (2), есть, в сущности, свойство ее точечной модели (4), как линейного уравнения для точечного вектора управления $\bar{U}_{T\text{I}}$ при любых N иметь решение (в общем случае – множество решений) для любого заданного вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$ с конечной нормой.

Имеет место следующий общий факт, который сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Если ранг передаточной матрицы $WN(A\nu; K\nu)$ ($q \geq n$) (5) линейной динамической системы (2) при любых N будет равен Nn, то такая система окажется управляемой на отрезке $[0, T]$.

Доказательство. Утверждение теоремы становится очевидным, т. к. оно, в сущности, устанавливает хорошо известный факт о том, что линейное алгебраическое уравнение (4)

$$W_N(A_\nu;K_\nu) \cdot \overline{U}_{T\text{I}} = \overline{X}_{T\text{I}}$$

относительно вектора $\bar{U}_{T\text{I}}$ с системной матрицей $WN(A\nu; K\nu)$ (NnхNq) ($q \geq n$), окажется совместным, т. е. будет иметь решение $\bar{U}_{T\text{I}}$ при любой заданной правой части $\bar{X}_{T\text{I}}$ и любых N, если его системная матрица будет иметь ранг Nn, совпадающий с размерностью блочного вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 об управляемости динамических систем частного вида фактически строго доказан именно этот факт. На этом доказательство можно закончить.

Утверждение теоремы 2 может рассматриваться как факт, характеризующий полностью и само понятие управляемости линейной динамической системы общего вида (2). Очевидно, свойства системных матриц $A(\tau)$ (nхn) и $K(\tau)$ (nхq) нестационарной динамической системы (2), как и в стационарном случае, будут определять свойства ее точечной модели (4), т. е. свойства ее передаточной матрицы $WN(A\nu; K\nu)$ (5). В частности, для этих матриц могут быть указаны условия управляемости динамическими системами типа (2).

Может быть доказана следующая теорема, обобщающая теорему 1 на этот более общий тип динамических систем.

Теорема 3. Если матрица $A(\tau)$, (nхn), $\tau \in [0, 1]$ нестационарной динамической системы (2) будет положительно определенной, а ее матрица $K\nu(\tau)$, (nхq), ($q \geq n$), $\tau \in [0, 1]$ будет иметь ранг n, то передаточная матрица $WN(A\nu; K\nu)$ (NnхNq) (5) такой системы при любом N будет ранга Nn, совпадающего с размерностью блочного вектора $\bar{X}_{T\text{I}}$, и система окажется управляемой на отрезке $[0, T]$ (по времени $t = T\tau$).

Доказательство. Сводится к установлению того факта, что при выполнении указанных условий передаточная матрица $WN(A\nu; K\nu)$ (5) динамической системы (2) будет иметь ранг Nn. Приведем соответствующие рассуждения, повторяя, по существу, логику доказательства теоремы 1. Представим прежде передаточную матрицу $WN(A\nu; K\nu)$ в виде:

$$W_N(A_\nu;K_\nu) = W_N(A_\nu) \cdot D_N(K_\nu), \tag{19}$$

как это было сделано в стационарном случае (см. (7)). Теперь, однако, будем иметь:

$$\begin{aligned} W_N(A_\nu) = D_N\left[(E_n + \lambda_0 A_\nu)^{-1}\right] \cdot \\ \cdot T_N^{-1}\left[B_\nu\right] \cdot \left[(E_n + Z) \otimes E_n\right]\lambda_0 \end{aligned} \tag{20}$$

и

$$D_N(K_\nu) = Diag\left[K_1 \vdots \cdots \vdots K_\nu \vdots \cdots \vdots K_N\right] \tag{21}$$

Невырожденность блочных матриц $T_N^{-1}\left[B_\nu\right]$ и $DN[(En + \lambda 0A\nu)–1]$ гарантируется при выполнении условия положительной определенности матрицы

$A(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$ и матриц $(E_n + \lambda_0 A_\nu)$ $(\nu = \overline{1,N})$ при всех $\lambda_0 = T/2N > 0$ [2]. Это означает, очевидно, и невырожденность матрицы $W_N(A_\nu)$ (20) и существование обратной ей матрицы $W_N^{-1}(A_\nu)$, а также, что точечная модель (4) нестационарной динамической системы (2), согласно (19), может быть представлена в следующем эквивалентном виде, подобном виду (16) для стационарного случая:

$$\begin{gathered} \overline{X}_{T\mathrm{I}} = W_N(A_\nu; K_\nu) \cdot \overline{U}_{T\mathrm{I}} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow W_N^{-1}(A_\nu) \cdot \overline{X}_{T\mathrm{I}} = D_N(K_\nu) \cdot \overline{U}_{T\mathrm{I}}. \end{gathered} \tag{22}$$

Или в виде линейного уравнения для блочного вектора управления $\overline{U}_{T\mathrm{I}}$ с системной матрицей $D_N(K_\nu)$ (21) и вектором правой части $W_N^{-1}(A_\nu)\,\overline{X}_{T\mathrm{I}}$, который однозначно определен заданным вектором состояния $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$, т. е. представлена в виде:

$$D_N(K_\nu) \cdot \overline{U}_{T\mathrm{I}} = W_N^{-1}(A_\nu) \cdot \overline{X}_{T\mathrm{I}}. \tag{23}$$

Это уравнение окажется совместным, т. е. будет иметь решение $\overline{U}_{T\mathrm{I}}$, если его системная матрица $D_N(K_\nu)$ (21) будет иметь ранг Nn, совпадающий с размерностью блочного вектора правой части. Последнее будет иметь место лишь тогда, когда все N матричных блок-элементов K_ν $(n\text{x}q)$, $(q \geq n)$, $(\nu = \overline{1,N})$ системной квазидиагональной матрицы $D_N(K_\nu)$ (21) будет иметь ранг n. Заметим, что решение окажется единственным, если матрицы $K_\nu = K(\tau_\nu^{(N)})$ $(\nu = \overline{1,N})$ ранга n окажутся квадратными $(q = n)$ и, следовательно, невырожденными. Уравнение (22), как уже отмечалось, эквивалентно уравнению (23). Оно также совместно при всяких N и, следовательно, его системная матрица $W_N(A_\nu; K_\nu)$ $(Nn\text{x}Nq)$, а это – передаточная матрица линейной нестационарной системы (2), будет иметь ранг Nn, совпадающий с размерностью блочного вектора $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$ правой части, что и доказывает управляемость системы на временном отрезке $[0, T]$.

В заключение сделаем несколько следующих замечаний.

Замечание 1. Если нестационарная динамическая система (2) с точечной моделью (22) (или в эквивалентном виде (23)) управляема, то существуют такие управления $U(\tau)$ $\tau \in [0, 1]$ и их точечные представления $\overline{U}_{T\mathrm{I}}$, которые способны на отрезке $[0, 1]$ (т. е. за время $[0, T]$) перевести систему из некоторого начального состояния $X(\tau_1^{(N)})$ (это первая блочная компонента точечного вектора состояния $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$) в состояние покоя $X(0)$, точнее, в конечное состояние $X(\tau_N^{(N)})$, близкое к $X(0) = 0$ (это последняя блочная компонента вектора $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$), причем при наличии множества различных других промежуточных состояний $X(\tau_\nu^{(N)})$, $(\nu = \overline{2,(N-1)})$. Такие точечные управления $\overline{U}_{T\mathrm{I}}$ могут быть найдены как решения совместного уравнения (23) при заданном векторе состояния $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$.

Замечание 2. Выделим случай, когда $q = n$, т. е. когда совпадает число входов и выходов, совпадающих с числом фазовых переменных, у линейной динамической системы (управляемого объекта, описываемого дифференциальным уравнением (1) или интегральным (2)). В этом случае будем иметь n-вектор функции $X(\tau)$ и $U(\tau)$ и квадратные матрицы $A(\tau)$ и $K(\tau)$ одинаковой размерности $(n\text{x}n)$. Блоки точечных представлений входа $\overline{U}_{T\mathrm{I}}$ и выхода $\overline{X}_{T\mathrm{I}}$ окажутся одинаковыми, как n-векторные значения $U(\tau_\nu^{(N)})$ и $X(\tau_\nu^{(N)})$, $(\nu = \overline{1,N})$, полученные в узлах чебышевской N-сетки I рода. Одинаковыми окажутся и размерности $(n\text{x}n)$ матричных блоков $A(\tau_\nu^{(N)}) = A_\nu$ и $K(\tau_\nu^{(N)}) = K_\nu$ для всех $\nu = \overline{1,N}$, а передаточная матрица в точечной модели (4), определяемая формулой:

$$\begin{gathered} W_N(A_\nu; K_\nu) = T_N^{-1}[B_\nu] \cdot D_N\left[(\lambda_0 A_\nu + E_n)^{-1}\right] \cdot \\ \cdot \lambda_0 \left[(E_n + Z) \otimes E_n\right] D_N[K_\nu] \end{gathered}$$

окажется квадратной размерности $(Nn\text{x}Nn)$ и если динамическая система управляема, то, согласно теореме 2, эта матрица будет иметь полный ранг Nn, т. е. окажется невырожденной. Она окажется и блочной нижнетреугольной матрицей и тёплицевой – в стационарном случае.

Замечание 3. Отметим следующую особенность матричных произведений в точечных моделях линейных динамических систем. Так, рассмотрим произведение матриц в представлении передаточной матрицы (ПМ) точечной модели (22) линейной нестационарной динамической системы:

$$\begin{gathered} \lambda_0 T_N^{-1}[B_\nu] \cdot D_N\left[(\lambda_0 A_\nu + E_n)^{-1}\right] \cdot \\ \cdot \left[(E_n + Z) \otimes E_n\right] D_N[K_\nu] = W_N(A_\nu; K_\nu). \end{gathered} \tag{24}$$

Если отдельные блочные матрицы – сомножители в произведении (24) рассматривать в роли ПМ точечных моделей отдельных динамических звеньев, то при схемном (графическом) представлении всей точечной модели системы будем иметь последовательную цепочку этих динамических звеньев, причем порядок их следования окажется обратным порядку следования их ПМ в произведении (24). Покажем это.

Прежде отметим, что все блочные матрицы в произведении (24) оказываются квадратными размерности $(Nn\text{x}Nn)$, за исключением последней матрицы $D_N[K_\nu]$ $(Nn\text{x}Nq)$. Такую же размерность будет иметь и ПМ $W_N(A_\nu; K_\nu)$ (24).

Введем динамические звенья с передаточными матрицами – сомножителями из произведения в (24):

$$\left.\begin{array}{lll} D_N\left[K_\nu\right]\cdot \bar U_{TI} = W_1\cdot \bar U_{TI} = \bar X_1; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar U_{TI}}\boxed{W_1}\xrightarrow{\bar X_1}; & a)\\ \left[(E_n+Z)\otimes E_n\right]\bar X_1 = W_2\cdot \bar X_1 = \bar X_2; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar X_1}\boxed{W_2}\xrightarrow{\bar X_2}; & б)\\ D_N\left[(E_n+\lambda_0 A_\nu)^{-1}\right]\bar X_2 = W_3\cdot \bar X_2 = \bar X_3; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar X_2}\boxed{W_3}\xrightarrow{\bar X_3}; & в)\\ \lambda_0 T_N^{-1}\left[B_\nu\right]\bar X_3 = W_4\cdot \bar X_3 = \bar X_{TI}; & \Rightarrow \xrightarrow{\bar X_3}\boxed{W_4}\xrightarrow{\bar X_{TI}}. & г) \end{array}\right\}\qquad (25)$$

Очевидно, теперь точечная модель (24) может быть записана в виде:

$$W_N(A_\nu;K_\nu)\cdot \bar U_{TI} = W_4\cdot W_3\cdot W_2\cdot W_1\cdot \bar U_{TI} = \bar X_{TI}, \qquad (26)$$

т. е. ее ПМ получит представление

$$W_N(A_\nu;K_\nu) = W_4\cdot W_3\cdot W_2\cdot W_1, \qquad (27)$$

которое будем иметь, если последовательно будем исключать промежуточные сигналы «вход – выход» введенных динамических звеньев (9). Возникает следующая процедура с соответствующими схемными иллюстрациями.

Умножим обе стороны равенства (25 *а*) – точечные модели 1-го динамического звена, на $W2$ – передаточную матрицу 2-го звена (25 *б*) и, учитывая равенство (25 *б*), получим:

$$\begin{array}{l} W_2\cdot W_1\cdot \bar U_{TI} = W_2\cdot \bar X_1 = \\ = \bar X_2; \Rightarrow \xrightarrow{\bar U_{TI}}\boxed{W_1}\xrightarrow{\bar X_1}\boxed{W_2}\xrightarrow{\bar X_2}. \end{array} \qquad (28)$$

Следующий шаг: умножим возникшее равенство в (28) на $W3$ – ПМ динамического звена (25 *в*). В результате будем иметь:

$$\begin{array}{l} W_3\cdot W_2\cdot W_1\cdot \bar U_{TI} = W_3 \bar X_2 = \\ = \bar X_3 \Rightarrow \xrightarrow{\bar U_{TI}}\boxed{W_1}\xrightarrow{\bar X_1}\boxed{W_2}\xrightarrow{\bar X_2}\boxed{W_3}\xrightarrow{\bar X_3}. \end{array} \qquad (29)$$

Наконец, умножая (29) на матрицу $W4$ и учитывая (25 *г*), найдем:

$$\begin{array}{l} W_4\cdot W_3\cdot W_2\cdot W_1\cdot \bar U_{TI} = \bar X_{TI} \Rightarrow \\ \Rightarrow \xrightarrow{\bar U_{TI}}\boxed{W_1}\xrightarrow{\bar X_1}\boxed{W_2}\xrightarrow{\bar X_2}\boxed{W_3}\xrightarrow{\bar X_3}\boxed{W_4}\xrightarrow{\bar X_{TI}}, \end{array}$$

т. е. получим точечную модель (26) рассматриваемой динамической системы с ПМ (27), которая схемно представляется в виде последовательной цепочки динамических звеньев, соединенных в обратном порядке по сравнению с порядком следования их ПМ в произведении (27), образующей ПМ динамической системы. Отметим, что для управляемой динамической системы с точечной моделью (26) и с ПМ (27) ранга Nn, введенные динамические звенья (25) также окажутся управляемыми, и ранги их ПМ также будут равны Nn.

Замечание 4. Отметим более общий и практически важный случай, когда число выходных переменных линейной динамической системы не равно числу ее переменных состояния. В этом случае система описывается уравнениями:

$$\left.\begin{array}{rr} \dfrac{dX(\tau)}{d\tau} + T\cdot A(\tau)X(\tau) = T\cdot K(\tau)\cdot U(\tau); & a)\\ Y(\tau) = C(\tau)\cdot X(\tau). & б) \end{array}\right\}\qquad (30)$$

Пусть по-прежнему, q – размерность векторного сигнала входа $U(\tau)$ (вектора управления), а n – размерность вектора состояний $X(\tau)$ (число фазовых переменных), который линейным преобразованием, осуществляемым матрицей $C(\tau)(r\times n)$, определяет r-вектор выхода $Y(\tau)$, причем $r\le n$. Соответствующая точечная модель такой динамической системы, как ее гомоморфный алгебраический образ, представляется равенствами [2]:

$$\left.\begin{array}{rr} W_N(A_v;K_v)\bar U_{TI} = \bar X_{TI}; & a)\\ D_N(C_v)\bar X_{TI} = \bar Y_{TI}, & б) \end{array}\right\}\qquad (31)$$

где $W_N(A_v;K_v)\ (Nn\times Nq)$ есть прежняя ПМ (27) для Nn – вектора состояний $\bar X_{TI}$, а квазидиагональная матрица

$$\begin{array}{l} D_N(C_v) = D_N\left[C(\tau_v^{(N)})\right] = \\ = Diag\left[C_1 \vdots \cdots \vdots C_v \vdots \cdots \vdots C_N\right](Nr\times Nn) \end{array}$$

с блоками-элементами $C_v(r\times n)\ (v=\overline{1,N})$ связывает точечный вектор состояний $\bar X_{TI}$ с Nr – вектором выхода $\bar Y_{TI}$.

Умножим обе стороны равенства (31 *а*) на матрицу $D_N(C_v)$ (31 *б*) и, учитывая (31 *б*), получим точечную модель связи «вход-выход» для динамической системы (30):

$$D_N(C_v)\cdot W_N(A_v;K_v)\cdot \bar U_{TI} = \bar Y_{TI} \qquad (32)$$

с ПМ

$$D_N(C_v)\cdot W_N(A_v;K_v)\ (Nr\times Nq). \qquad (33)$$

Ее схемное представление изображено на рис 1.

$$\xrightarrow{\bar U_{TI}}\boxed{W_N(A_v;K_v)}\xrightarrow{\bar X_{TI}}\boxed{D_N(C_v)}\xrightarrow{\bar Y_{TI}}\Rightarrow$$

Рис. 1.

Обращает на себя внимание отмеченный ранее факт взаимно-обратного порядка следования отдельных динамических звеньев в схемном представлении и в следовании их ПМ в произведении (33), образующем ПМ модели (32). И еще одно: для динамической системы (31), управляемой по выходу, ранг ее ПМ (33) должен быть равен Nr – размерности вектора выхода $\bar Y_{TI}$, а это означает, что ПМ, образующие ПМ (33), должны иметь соответствующие ранги.

Замечание 5. Утверждения всех ранее доказанных теорем относительно управляемости различных линейных динамических систем как свойства их точечных моделей ассоциированных с чебышевской

N-сеткой I рода, непосредственно распространяются и на их точечные модели, ассоциированные с чебышевской 2*N*-сеткой II рода, с передаточными матрицами $W_{2N}(A_k; K_k)$.

Необходимо лишь в соответствующих утверждениях и выкладках *N* заменить на 2*N*, а вместо ранга *Nn* передаточных матриц $W_N(A_v; K_v)$ указывать ранг 2*Nn* передаточной матрицы $W_{2N}(A_k; K_k)$, равный размерности точечного вектора выхода $\overline{X}_{T\text{II}}^{(2N)}$. Для этого варианта точечной модели динамической системы окажутся справедливыми и все предыдущие замечания.

Литература

1. Директор, С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер; пер. с англ.; под ред. Н. П. Бусленко. – М.: Мир, 1974. – 464 с.
2. Осипов, В. М. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений / В. М. Осипов, В. В. Осипов. – М.: МАКС-Пресс, 2005. – 296 с.
3. Осипов, В. М. Положительная определённость и положительность функций. Элементы теории и некоторые приложения / В. М. Осипов, В. В. Осипов. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2008. – 415 с.