УДК 515.17+517.545

ГРУППА ХАРАКТЕРОВ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ ФУНКЦИИ НА ТОРЕ

Т. С. Крепицина

GROUP OF CHARACTERS AND MULTIPLICATIVE FUNCTIONS ON TORUS

T. S. Krepizina

Автор поддержан грантом ФЦП, №02.740.11.0457.

В статье дается описание группы характеров и ее некоторых подгрупп, найдена связь с многообразием Якоби. Найдены размерности и построены базисы в пространстве голоморфных мультипликативных функций и голоморфных дифференциалов Прима для любого порядка на торе.

In this article given a description for group of characters and her some subgroups. Connections their with Yacobi variety on torus are established. Dimensions and basics for space of holomorphic multiplicative functions and holomorphic Prymdifferentials for every orders on torus are obtained.

Ключевые слова: группа характеров на торе, дифференциал Прима, дивизоры, многообразие Якоби.

Keywords: group of characters on torus, Prym differential, divisors, Yacobi variety.

Введение

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеров на компактной римановой поверхности нашла приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики. На торе такие функции изучались в работах П. Аппеля, Е. Лакруа, А. Форсайта [1 – 4], где были получены формулы разложения в сумму и произведение элементарных мультипликативных функций, а также найден общий вид таких функций. В дальнейшем, как правило, теория таких функций строилась на компактной римановой поверхности рода $g \geq 2$ (Ф. Прим, Г. Рост, П. Аппель, Х. Фаркаш, И. Кра, Р. Ганнинг [3; 4]). Гиперэллиптические поверхности и, в частности, тор, находят даже большее приложение в современной математике, чем в случае $g \geq 2$. Это связано с тем, что на них можно строить явно такие функции и дифференциалы Прима, в отличие от общего случая, где в основном встречаются только теоремы существования.

Цель настоящей работы – опиисать группу характеров и ее некоторые подгруппы, связь с многообразием Якоби для тора. Найти размерности и построить базис в пространстве голоморфных мультипликативных функций и дифференциалов Прима для любого порядка на торе.

§ 1. Предварительные сведения

Пусть F будет компактная риманова поверхность рода $g=1$, $F = \mathbb{C}/\Gamma$, где Γ – группа с двумя образующими: $a_1(z) = z+1$, $b_1(z) = z+\mu$, $\operatorname{Im}\mu > 0$. Фундаментальная группа для поверхности F имеет следующее алгебраическое представление: $\pi_1(F) \cong \Gamma = \langle a_1, b_1 : [a_1, b_1] = 1 \rangle$. В дальнейшем будем отождествлять a_1, b_1 с петлями канонического базиса в $\pi_1(F)$. Характер ρ на F это произвольный голоморфизм Γ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Он однозначно определяется либо вектором $(\rho(a_1), \rho(b_1)) \in [\mathbb{C}^*]^2$, либо через отображение $\Re : C^2 \to Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ по правилу

$$C^2 \ni (x,y) \to \rho_{x,y} \in Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*),$$

где $\rho_{x,y}(a_1) = \exp 2\pi i x, \rho_{x,y}(b_1) = \exp 2\pi i y$. Характер $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ называется несущественным, если существует $c \in C$, такая, что $\rho(a_1) = \exp 2\pi i c,\ \rho(b_1) = \exp 2\pi i c\mu$, где для канонического базиса ζ_1 голоморфных абелевых дифференциалов на римановой поверхности F двойственного к $\{a_1, b_1\}$ имеем $\int_{a_1} \zeta_1 = 1$, $\int_{b_1} \zeta_1 = \mu$. Несущественные характеры образуют подгруппу L_1, которая биективно отображается на множество $L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : y = \mu x\}$ [1].

Мультипликативной функцией f на F для ρ называется однозначная мероморфная функция $w = f(z)$ на C, удовлетворяющая условиям:

$$f(z+1) = \rho(a_1) f(z),\ f(z+\mu) = \rho(b_1) f(z).$$

Если f_0 – мультипликативная функция на F без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = d(\log f_0)$ – голоморфный абелев дифференциал на F.

Отсюда $\frac{df_0}{f_0} = d(\log f_0) = c\zeta_1$, а значит:

$$f_0(P) = f_0(P_0) \exp \int_{P_0}^{P} c\zeta_1, \tag{1.1}$$

где $c \in \mathbb{C},\ P, P_0 \in F$, и P_0 – фиксированная точка. Эту функцию f_0 назовем мультипликативной единицей на поверхности F для ρ.

Определение. q – дифференциалом Прима Ф относительно группы Г для ρ, т. е. $(\rho,\ q)$ – дифференциалом, называется дифференциал $\Phi(z)dz^q$, такой, что $\Phi(Tz)(T'z)^q = \Phi(z)\rho(T),\ z \in C,\ T \in \Gamma$.

Дивизором D называется выражение вида $D = P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}$, где $P_1^{\alpha_1},...,P_m^{\alpha_m}$ – точки на F, а $\alpha_1,...,\alpha_m$ являются целыми числами. Обозначим через $r_\rho(D^{-1})$ и $i_{\rho^{-1}}(D)$ пространства функций для ρ кратных дивизору D^{-1} и 1-дифференциалов для ρ^{-1} кратных дивизору D соответственно. Также степень $\deg D = \alpha_1 + ... + \alpha_m$.

Теорема (Римана-Роха для характеров) [1; 3]. Пусть F – компактная риманова поверхность рода один. Тогда для любого характера $\rho, \rho \neq 1$ верно равенство $r_\rho(D^{-1}) = \deg D + i_{\rho^{-1}}(D)$.

Теорема (Римана-Роха для q – дифференциалов и характеров) [1]. Для любого $q \in Z$ верно

$$i_{\rho,q}(D) = \deg D + i(\frac{(f)Z^q}{D}) = -\deg D + r(\frac{(f)Z^{q-1}}{D})$$

при любом характере ρ на римановой поверхности F рода $g = 1$, где f – любая мультипликативная функция для ρ, $f \neq 0$ и Z – канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на F.

Многообразие Якоби для поверхности F есть фактор пространство $J(F) = F/L(1;\mu)$, где $L(1;\mu)$ – целочисленная решетка, порожденная $1, \mu$.

Теорема (Абеля для характеров на торе) [1; 3]. Пусть $[F;\{a_1, b_1\}]$ – отмеченная компактная риманова поверхность рода 1, ρ – характер на F и $D = \frac{P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}}$ дивизор степени нуль на F. Тогда существует мультипликативная функция f для ρ с

$$(f) = D \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m}\alpha_j z_j - \sum_{k=1}^{s}\beta_k w_k = $$
$$= \frac{1}{2\pi i}(\log\rho(b_1) - \log\rho(a_1)\mu),$$

где $\varphi(P_j) = z_j,\ \varphi(Q_k) = w_k$ и φ – отображение Якоби на F со значениями в $J(F)$. При этом

$$f(P) = \exp\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\int_{Q_0}^{P}\tau_{P_jP_0} - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\int_{Q_0}^{P}\tau_{Q_jP_0} + 2\pi i c_1\int_{Q_0}^{P}\zeta_1\right),$$

где $\tau_{Q_jP_0}$ – нормированный абелев дифференциал третьего рода на F с простыми полюсами в P, Q на F.

Следствие. [1 – 3] Каждый дивизор $D = \frac{P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}} \neq 1$, $\alpha_j\beta_j \in N$ степени нуль на торе F будет дивизором для мультипликативной функции:

$$f(z) = f(z_0)\exp\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\int_{z_0}^{z}\tau_{P_jP_0} - \sum_{j=1}^{s}\beta_j\int_{z_0}^{z}\tau_{Q_jP_0}\right)\exp 2\pi i c z =$$
$$= Ae^{\lambda z}\frac{H(z-a)}{H(z)}\Phi(z) = Ae^{\lambda z}\frac{\sigma(z+a)\sigma(z-b)}{\sigma^2(z)}\Phi(z)$$

для некоторого нормированного характера $\rho(a_1) = \exp 2\pi i c,\ \ \rho(b_1) = \exp 2\pi i(c\mu + d),\quad d$, не принадлежит Z, и $\Phi(z)$ – эллиптическая функция для Γ, а $H(z)\sigma(z)$ – классические функции Вейерштрасса на F.

§ 2. Группа характеров для тора

Теорема 1. Отображение

$$\psi(\rho) = \frac{1}{2\pi i}(\log\rho(b_1) - \log\rho(a_1)\mu) \in J(F) = \mathbb{C}^1/L(1;\mu)$$

задает изоморфизм $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)/L_1 \cong J(F)$.

Доказательство. Докажем, что ψ будет корректно определенный групповой гомоморфизм из $Hom(\Gamma, C^*)$ на $J(F)$. Если для ρ существует $f_1, f_2 \neq 0$ мультипликативные функции, то $f = \frac{f_1}{f_2}$ – однозначная мероморфная функция на компактной римановой поверхности F. Следовательно, дивизор (f_1) – линейно эквивалентен дивизору (f_2), и по теореме Абеля имеем: $\psi(\rho) = \varphi((f_1)) = \varphi((f_2))$, $\psi(\rho_1\rho_2) = \varphi((f_1f_2)) = \varphi((f_1)) + \varphi((f_2)) = \psi(\rho_1) + \psi(\rho_2)$ и $\psi(\rho)^{-1} = -\psi(\rho),\ \ \rho_1, \rho_2$ и $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Покажем, что ψ отображение «на». По теореме Якоби для любого $a \in J(F)$ существует $D_a \in F$, такой, что $\varphi_{P_0}\ (D_a) = a$. Таким образом, $\varphi_{P_0}\left(\frac{D_a}{P_0^1}\right) = a$ и дивизор $\frac{D_a}{P_0^1}$ степени нуль является дивизором мультипликативной функции f_a с некоторым ρ_a. Отсюда:

$$\psi(\rho_a) = \varphi((f_a)) = \varphi_{P_0}\left(\frac{D_a}{P_0^1}\right) = a.$$

Из теоремы Абеля для характеров имеем, что $\rho \in Ker\psi$ тогда и только тогда, когда ρ – несущественный характер, то есть $\rho \in L_1$. Теорема доказана.

Известно, что $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \cong [S^1]^2 \times L_1$ (прямое произведение групп), где $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |\ z\ | = 1\}$ и определены проекции: $j_0 : Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \to [S^1]^2$; $j_0 : Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \to L_1$, где по теореме Фаркаша-Кра любой характер $\rho = \rho_0 \rho_1$, ρ_0 – нормированный, ρ_1 – несущественный характеры и $j_0(\rho) = \rho_0$, $j_1(\rho) = \rho_1$. Приведем формулировку и доказательство теоремы Фаркаша-Кра. Используемые при этом обозначения будут нужны нам в дальнейшем.

Теорема (Фаркаш-Кра) [3].Для любого $\rho \in Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ существует и единственно представление в виде $\rho = \rho_0 \rho_1$ где $\rho_0 \in [S^1]^2$, $\rho_1 \in L_1$.

Доказательство. Положим,
$\rho(a_1) = \exp(s + it)$, $s,t \in \mathbb{R}$, $\rho(b_1) = \exp(u + iv)$, $u,v \in \mathbb{R}$.

Построим несущественный характер ρ_1, такой, что $|\rho_1(T)| = |\rho(T)|$, $T \in \Gamma$. Выберем константы $c = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, из представления несущественного характера
$\rho_1(a_1) = \exp c$, $\rho_1(b_1) = \exp \Omega c$, $\Omega c = \mu c$
следующим образом:
$|\rho_1(a_1)| = |\exp c_1| = \exp \alpha_1 = \exp s_1 = |\rho(a_1)|$.
Отсюда $\alpha = s + 2\pi in$, $n \in \mathbb{Z}$. Но так как $\alpha, s \in \mathbb{R}$, то $n = 0$ и $\alpha = s$. Затем
$|\rho_1(b_1)| = |\exp(\mu c)| = \exp \mathrm{Re}(\mu c) = \exp u = |\rho(b_1)|$,
или $\mathrm{Re}(\mu c) = u$ (1.2)

Покажем, что такой выбор c действительно возможен и единственный. Матрицу b – периодов $\Omega = (\mu)$, состоящую только из одного элемента, можем записать в виде $\Omega = X + iY$, где Y – положительное число. Из (1.2) получаем
$\mathrm{Re}[(X + iY)(\alpha + i\beta)] = u$, где $\alpha, \beta, u \in \mathbb{R}$. Так как уже выбрали $\alpha = s$, то требуется решить уравнение
$\mathrm{Re}[(X + iY)(\alpha + i\beta)] = u$ или $Y\beta = -u + Xs$,
для которого $\beta = Y^{-1}(-u + Xs)$ – единственное решение. Таким образом, несущественный характер ρ_1 будет единственно определен. Теорема доказана.

Теорема 2. Проекции j_0 и j_1 являются комплексно-гармоническими, но не комплексно-аналитическими отображениями относительно координатных карт на $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Доказательство. Возьмем терминологию из доказательства теоремы Фаркаша-Кра. Начнем с проекции j_1, так как ее явный вид найден в указанной выше теореме. Пусть ρ – произвольный характер и

$$\rho(a_1) = \exp(s + it) = \exp 2\pi ic,$$
$$\rho(b_1) = \exp(u + iv) = \exp(2\pi i\mu c + 2\pi id),$$
$$s, t, u, v \in \mathbb{R}.$$

В терминах отображения $\Re : C^2 \to Hom(\Gamma, C^*)$ характер ρ имеет комплексные координаты c, d, или $x = c$, $y = d + \mu c$. Построим ρ_1 – единственный несущественный характер по разложению $\rho : \rho_1(a_1) = \exp 2\pi i\tilde{c}, \rho_1(b_1) = \exp 2\pi i\mu\tilde{c}$,
где $2\pi i\mu\tilde{c} = \alpha + i\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Имеем: $\alpha = s$, $\beta = Y^{-1}(-u + Xs)$, где $\alpha, s, u \in \mathbb{R}$, $\Omega = X + iY$; или $2\pi i\mu\tilde{c} = s + i(-Y^{-1}u + Y^{-1}Xs)$, $\tilde{c} \in \mathbb{C}$. Число $\tilde{c}$ есть координата ρ_1 по отображению $\Re$. Последнее равенство можно переписать в виде:

$$2\pi i\mu\tilde{c} = \ln|\rho(a_1)| + i(-Y^{-1}(\ln|\rho(b_1)|) + Y^{-1}X(\ln|\rho(a_1)|)). \quad (1.3)$$

Положим, $\rho(a_1) = z_1$, $\rho(b_1) = w_1$. Компоненты вектора (z_1, w_1) представляют собой координаты характера ρ в карте $\psi_1 : Hom(\Gamma, C^*) \to [C^*]^2$. Поэтому равенство (1.3) дает вид функций j_1 в указанных координатах:

$$[\mathbb{C}^*]^2 \ni (z_1, w_1) \xleftarrow{\psi_1} \rho \xrightarrow{j_1} \rho_1 \xrightarrow{\Re} \tilde{c},$$

где $\rho \in Hom(\Gamma, C^*)$, $\rho_1 \in L_1$ и

$$2\pi i\mu\tilde{c} = \ln|z_1| + i(-Y^{-1}(\ln|w_1|) + Y^{-1}X(\ln|z_1|)).$$

Следовательно, координаты α и β будут вещественными гармоническими функциями от комплексных переменных z_1 и w_1. Таким образом, $2\pi i\mu\tilde{c}$ комплексно-гармонически зависит от z_1, w_1, но не будет, очевидно, комплексно-аналитически зависеть от них. Утверждение теоремы относительно проекции j_1 доказано.

Рассмотрим проекцию j_0, найдя $\rho_0 = \dfrac{\rho}{\rho_1}$ в координатах. Имеем:

$$\rho_0(a_1) = \frac{\exp(s+it)}{\exp(\alpha+i\beta)} = \exp(i(t+(Y^{-1}u)-(Y^{-1}Xs))) =$$
$$= \exp\left[2\pi i\left(\frac{Argz_1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(Y^{-1}(\ln|w_1|)) - \frac{1}{2\pi}(Y^{-1}X(\ln|z_1|))\right)\right] = \exp(2\pi i x_1^0);$$
$$\rho_0(b_1) = \frac{\exp(u+iv)}{\exp(2\pi i\mu\tilde{c})} = \frac{\exp(u+iv)}{\exp((X+iY)(s+i(-Y^{-1}u+Y^{-1}Xs)))} = \frac{\exp(iv)}{\exp[i(XY^{-1}Xs+Ys-XY^{-1}u)]} =$$
$$= \exp\left[2\pi i\left(\frac{Argw_1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(XY^{-1}(\ln|w_1|) - (XY^{-1}X+Y)(\ln|z_1|))\right)\right] = \exp(2\pi i y_1^0).$$

Из последних равенств следует, что вещественные координаты x_1^0, y_1^0 для ρ_0 в картах $\Re$ и ψ_1 будут вещественными гармоническими функциями от z_1 и w_1, но не будут комплексно-аналитическими относительно этих координат. Теорема доказана.

Предложение 1. (i) Множество $L_1 \cap \overline{L}_1$ есть изоморфный образ при отображении $\Re$ дискретной решетки в $\mathbb{C}$, порожденной линейно независимыми над $\mathbb{R}$ комплексными числами $\frac{i\overline{\mu}}{2\operatorname{Im}\mu}$ и $\frac{-i}{2\operatorname{Im}\mu}$;

(ii) $L_1 \cap \overline{L}_1 \cong \mathbb{Z}^2$ и является подгруппой в группе $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Доказательство. (i) Ясно, что $1 \in L_1 \cap \overline{L}_1$. Найдем все пресечение $L_1 \cap \overline{L}_1$. Пусть $\rho \in L_1 \cap \overline{L}_1$, то есть $\rho = \overline{\rho}_1$, где ρ_1 – некоторый несущественный характер. Имеем

$$\exp(2\pi ic) = \overline{\rho_1(a_1)} = \overline{\exp 2\pi ic^1} = \exp(-2\pi i\overline{c^1}),$$
$$\exp(2\pi i\mu c) = \rho_1(b_1) = \overline{\rho_1(b_1)} = \exp(-2\pi i\overline{c^1}\overline{\mu}).$$

Эти равенства эквивалентны двум равенствам $c = -\overline{c_1} + k, \Omega c = -\overline{\Omega c_1} + n, k,n \in \mathbb{Z}$. Из первого следует, что c_1 явно выражается через $c \in \mathbb{C}$ и $k \in \mathbb{Z}$. Из второго найдем общий вид для c: $\Omega c = \overline{\Omega}(c-k) + n$, или

$$(\Omega - \overline{\Omega})c = -\overline{\Omega k} + n,$$
$$c = \frac{1}{2\pi}(-Y^{-1}\overline{\Omega k} + Y^{-1}n) = \frac{1}{2}(k + i(Y^{-1}Xk - Y^{-1}n)).$$

Координаты для $\frac{1}{2i}(-Y^{-1}\overline{\Omega}; Y^{-1})$ линейно независимы над $\mathbb{R}$, так как Y – положительное число и координаты $(-\overline{\Omega}; I_1)$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. Последнее утверждение есть классический факт из теории компактных римановых поверхностей и их многообразий Якоби.

(ii) Это утверждение следует из того, что $\Re$ есть голоморфный изоморфизм из L_0 в L_1 и из пункта (i) доказываемой теоремы. Так, если бы существовала последовательность различных $\rho_n \to 1, n \to \infty$ в $L_1 \cap \overline{L}_1$, то существовала бы и последовательность различных $(c_n, \Omega c_n)$, сходящаяся к $(0,0)$, но это противоречит дискретности решетки из утверждения (i). Предложение доказано.

§ 3. Голоморфные мультипликативные функции и дифференциалы Прима на торе

Если ρ – несущественный характер, то единица f_0 для ρ имеет вид $f_0(z) = M(z_0)\exp 2\pi icz$ на $\mathbb{C}/\Gamma$. Если ρ – существенный характер, то нетривиальная мультипликативная функция f для ρ должна иметь полюса на торе.

Теорема 3. Пусть ρ – любой характер на торе F. Тогда для любого $q \in \mathbb{Z}$ размерность пространства голоморфных (ρ, q)-дифференциалов на F равна:

$$i_{\rho,q}(1) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_\rho^q(1;F) = \begin{cases} 1, \textit{при} & \rho \in L_1 \\ 0, \textit{при} & \rho \in Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*) \setminus L_1. \end{cases}$$

Причем пространство $\Omega_\rho^q(1;F)$ порождено дифференциалом вида $M(z_0)(\exp 2\pi icz)(dz)^q$ на торе F.

Доказательство. Пусть сначала $q = 0$. В случае $\rho = 1$, $q = 0$ это утверждение является классическим фактом [3] и уже знаем, что $r(1) = i(1) = g = 1$. По теореме Римана-Роха для характеров $\rho \neq 1$ имеем:

$$r_{\rho^{-1}}(1) = i_\rho(1). \tag{1.4}$$

По определению $i_\rho(1) \geq 0$. Затем $i_\rho(1) \leq 1$, так как $i_\rho(1) = i((f)^{-1}) = r((f)) - \deg(f)^{-1} \leq 1$ ввиду того, что $r((f)) \leq 1$ при $\deg(f) = 0$, где f – отличная от тождественного нуля мультипликативная функция на F для ρ. Кроме того, $i_\rho(1) = 1 \Leftrightarrow r_{\rho^{-1}}(1) = 1 \Leftrightarrow$ существует отличная от тождественного нуля мультипликативная голоморфная функция $f_0 \in L_{\rho^{-1}}(1)$. Здесь f_0 не может быть постоянной, так как постоянные функции не принадлежат нетривиальному характеру. Затем f_0

не имеет нулей из-за того, что $\deg(f_0) = 0$ и f_0 не имеет полюсов. Следовательно, f_0 – единица (т.е. мультипликативная функция для несущественного характера ρ^{-1}). Поэтому $i_\rho(1) = 1$, если и только если ρ – несущественный характер.

Пусть ρ – несущественный характер на $F, \rho \neq 1$. Тогда по теореме Римана-Роха для дифференциалов имеем:

1. Если $q > 1$, то $i_{\rho,q}(1) = r(Z^{q-1})$.
2. Если $q = 1$, то $i_{\rho,q}(1) = r(1) = 1$.
3. Если $q = 0$, то $i_{\rho,0}(1) = r(Z^{-1}) = i(1) = g = 1$.
4. Если $q < 0$, то $i_{\rho,q}(1) = r(Z^{q-1})$.

Но
$r(Z^{-q}) = i_{\rho,q}(1) = (g-1)(2q-1) + r(Z^{q-1}) = r(Z^{q-1})$,

а значит, $r(Z^{-q}) = r(Z^{q-1})$. Затем на торе есть голоморфный, отличный от нулевого, абелев дифференциал, например, dz, где $(dz) = 1$ на F. Умножение на него дает равенство $i_{\rho,q}(1) = i_{\rho,q+1}(1;F)$. Из $r(1) = 1$ следует $r(Z^{q-1}) = 1$ для любого q.

Пусть ρ – существенный характер на торе F. Тогда при $q \geq 1$ имеем $i_{\rho,q}(1) = r((f)Z^{q-1}) \leq 1$, так как $\deg((f)Z^{q-1}) = 0$. Но, если существует ϕ – голоморфный m – дифференциал Прима $(\phi \neq 0)$ для существенного характера ρ на торе F, т. е. $\phi = f(z)dz^q$ для ρ на F, то функция $\dfrac{\phi}{dz^q} = f$ будет голоморфной мультипликативной на торе для существенного характера ρ, где dz – голоморфный абелев дифференциал на $F = \mathbb{C}/\Gamma$. У этой функции нет полюсов, так как dz не имеет нулей на торе, а значит, нет нулей, ввиду того, что $\deg(f) = 0$. Следовательно, f будет единицей для существенного характера ρ. Противоречие. Поэтому $i_{\rho,q}(1) = 0$ при $q \geq 1$ и существенном характере ρ.

Рассмотрим случай $q < 0$. Если существует нетривиальный голоморфный дифференциал Прима $\phi = f(z)dz^{-m}$, $m = -q > 0$ для существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F, то умножая на dz^m – нетривиальный голоморфный абелев дифференциал, получим, что $f(z)$ единица для ρ. Противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 1. Для любого существенного характера ρ на торе F существует мультипликативная функция f для ρ, имеющая точно один простой полюс в любой точке Q_1 на F. При этом:

$$f(P) = \exp\left[\int_{P_0}^{P} \tau_{P_1P_0} - \int_{P_0}^{P} \tau_{Q_1P_0} + \log\rho(a_1)\int_{P_0}^{P} \zeta_1\right],$$

где $\varphi(P_1) = \varphi(Q_1) + \psi(\rho)$ в $J(F)$ и $\psi(\rho) \neq 0$.

Теорема 4. Для любого несущественного характера ρ и любой точки Q_1 на торе F не существует мультипликативной функции для ρ с единственным простым полюсом Q_1 на F.

Доказательство 1. Для $\rho = 1$ это утверждение есть известный классический факт [3].

Пусть ρ – любой несущественный характер на торе F и $\rho \neq 1$. Предположим, что существует функция f_0 для ρ, такая, что $(f) = \dfrac{P_1}{Q_1} = D$, где $\deg D = 0$. Для такого дивизора D существует функция f_1 для некоторого нормированного характера ρ_1 на торе F и $(f_1) = D$. Рассмотрим функцию $g = \dfrac{f}{f_1}$. Так как $(g) = 1$, то g будет мультипликативной единицей для некоторого несущественного характера $\rho_0 = \dfrac{\rho}{\rho_1}$. Отсюда $\rho_1 = \dfrac{\rho}{\rho_0}$, а значит, $\dfrac{\rho}{\rho_0} = \rho_1 = 1$ на F [3]. Следовательно, f_1 будет однозначной функцией с единственным и простым полюсом в Q_1 на F. Противоречие.

Доказательство 2. Докажем от противного. Если существует функция f для ρ с $(f) = \dfrac{P_1}{Q_1}$ на торе F, то для дивизора $D = \dfrac{P_1}{Q_1}$ имеем два условия: $\deg D = 0$. и $\varphi(D) = \psi(\rho) = 0$ в $J(F)$. По классической теореме Абеля [3] существует f_1 – однозначная функция на торе F с единственным простым полюсом в Q_1 на F. Противоречие.

Теорема доказана.

Литература

1. Чуешев, В. В. Мультипликативные функции дифференциала Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч. 2. / В. В. Чуешев. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2003.
2. Appell, P. Principes de la theorie des fonctionselliptiqueset applications / P. Appell, E. Lacour. – Paris: Gauthier-Villars, 1897.
3. Farkas, H. M. Riemann surfaces, Grad. Texts in Math., 71 / H. M. Farkas, I. Kra. – New-York: Springer-Verlag, 1992.
4. Gunning, R. C. On the period classes of Prym differentials / R. C. Gunning // J. ReineAngew. Math. – 1980. – № 319. – 153 – 171.