[37] Heinonen, J. *Quasiconformal maps on metric spaces with controled geometry* / J. Heinonen, P. Koskela // Acta Math. – 1998. – V. 181. P. 1 – 61.

[38] Heinonen, J. *A note on Lipshitz functions, upper gradients and the Poincare inequality* / J. Heinonen, P. Koskela // New Zealand J. Math. – 1999. – V. 28. – P. 37 – 42.

[39] Heinonen, J. *Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings* / J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J. Tyson// J. D'Analyse Math. – 2001. – V. 85. – P. 87 – 139.

[40] Kauhanen, J. *On function with derivatives in a Lorentz space* / J. Kauhanen, P. KoskelaP., J. Maly // Manuscripta Math. – 1999.–V. 100, №. 1. P. 87 – 101.

[41] Maly, J. *Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral* / J. Maly // Труды по анализу и геометрии. – Изд. ИМ СО РАН. – 2000. – С. 370 – 386.

[42] Stromberg, J. O. *Weighted Hardy Spaces* / J. O. Stromberg, A. Torchinsky// Lecture Notes in Math.– Berlin: Springer, №.1381. – 1989. – 193 p.

[43] Vodopyanov, S. K. *Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups* /S. K. Vodopyanov// Contemporary Mathematics. – 2007. – V. 424. – P. 303 – 344.

УДК 519.63

ОБ АСИМПТОТИКЕ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. А. Шалаумов

ON ASYMPTOTIC AS A WHOLE SINGULAR PERTURBATION DIRICHLET'S PROBLEMS FOR BICONNECTED DOMAIN

V. A. Shalaumov

Для решения сингулярно возмущённой задачи Дирихле, имеющего экспоненциально малый характер, с помощью функций типа пограничного слоя строится формальное асимптотическое разложение в целом. Приводится явное выражение первых членов разложения.

For exponential small solution singular perturbation Diroichlet's problem global formal asymptotic expansion are constructed by means of function of boundary layer type

Ключевые слова: регулярная часть асимптотики, функции типа пограничного слоя.

Keywords: regular part asymptotic, function of boundary layer type.

Пусть G – ограниченная область в R^n с двусвязной гладкой границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На $\overline{G} = G \cup \partial G$ рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} L^\varepsilon[y] \equiv \varepsilon\, y + (B(x), \nabla y) + C(x)y = f(x), \\ y|_{\Gamma_1} = \phi(x), \quad y|_{\Gamma_2} = \psi(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases} \tag{1}$$

Предположим, что функции, входящие в (1), достаточно гладкие так, что существует единственное классическое решение и выполнено следующее основное предположение:

(A) Характеристики оператора $\frac{dx}{dt} = B(x)$, $x(0) = \overline{x_0} \in G$ выходят на Γ_1 за конечное время, не покидая при этом области G, причём$(B(x), n(x)) > 0 \quad \Gamma_1$, $(B(x), n(x)) < 0$ на Γ_2, где $n = n(x)$ вектор внешней нормали к области G (в дальнейшем эти характеристики выходят на Γ_1не особым образом).

При построении равномерного асимптотического разложения решения этой задачи методом пограничных функций вначале строится так называемое внешнее разложение (регулярная часть асимптотики) в виде формального ряда $R = R(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$, при этом задачи Коши, определяющие однозначно функции $y_i(x)$, получаются подстановкой ряда $R = R(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$ в уравнение с последующей группировкой слагаемых с одинаковыми степенями параметра ε и последующим сравнением правых и левых частей уравнения. Если выполнено условие (A), то регулярный ряд $R = R(x, \varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$ асимптотически удовлетворяет уравнению (1) и реализует граничное условие на границе Γ_1, в том смысле, что функции $\{y_i(x)\}$ $i = 1, 2, ...$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L^0[y_0] \equiv (B(x), \nabla y_0) + C(x)y_0 = f(x), \\ y_0|_{\Gamma_1} = \phi(x), \\ L^0[y_k] \equiv (B(x), \nabla y_k) + C(x)y_k = -\Delta y_{k-1}, \\ y_k|_{\Gamma_1} = 0, \end{cases} \tag{2}$$
$$k = 1, 2, ...$$

Сингулярная часть разложения (пограничный слой), компенсирующая невязку в granичных условиях, строится в окрестности границы Γ_2 так, что сумма регулярной части и сингулярной части дают равномерное асимптотическое представление решения. Указанная процедура остаётся неизменной и в том случае, когда коэффициенты регулярно зависят от малого параметра.

При $\phi(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$ регулярная часть разложения тождественно равна нулю, а разложение пограничного слоя описывает поведение решения лишь в окрестности границы Γ_2.Но в ряде задач возникает необходимость построения асимптотики и в этом случае, в целом, на всей рассматриваемой области, например, для того, чтобы описать поведение решения, встречающееся в теории диффузионных процессов в указанной постановке. Процедура построения асимптотики и её обоснование в одномерном случае описана в работе [1] (метод последовательного выделения регулярных частей).

Опишем формальную процедуру построения при $\phi(x) \equiv 0$ и $f(x) \equiv 0$.

Представим решение в виде $y = y(x, \varepsilon) = \exp\{-P_0(x,\varepsilon)\}g_0(x,\varepsilon)$ так, что $P_0(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0$, $P_0 = P_0(x,\varepsilon) > 0$ при $x \in G$, $\exp\{-P_0(x,\varepsilon)\}$ – – функция типа пограничного слоя в окрестности Γ_2. Нетрудно проверить, что $g_0 = g_0(x,\varepsilon)$ является решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[g_0] \equiv \varepsilon\Delta g_0 + (B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0, \nabla g_0) + g_0(\varepsilon\,|\nabla P_0|^2 - (B(x), \nabla P_0) + C(x) - \varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ g_0|_{\Gamma_1} = 0, \quad g_0|_{\Gamma_2} = \psi(x). \end{cases} \tag{3}$$

При подходящем подборе $P_0 = P_0(x,\varepsilon)$ (уравнение, определяющее $P_0(x,\varepsilon)$, будет приведено ниже) характеристики оператора L_0^ε будут не особым образом выходить на Γ_2, на границу с ненулевым граничным условием, а коэффициенты оператора регулярно зависеть от малого параметра так, что у $g_0 = g_0(x,\varepsilon)$ возможно выделение ненулевой регулярной части в виде $R_0 = R_0(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i^0(x)$, которая асимптотически удовлетворяет уравнению (3) и реализует граничное условие на Γ_2. Поэтому представим g_0 в виде $g_0 = R_0 + \exp\{-P_1(x,\varepsilon)\} \cdot g_1$, где $\exp\{-P_1(x,\varepsilon)\}$ – функция типа пограничного слоя в окрестности Γ_1. Если положить

$$\begin{cases} \nabla P_1 = \frac{B(x)}{\varepsilon} - 2\nabla P_0, \\ P_1(x,\varepsilon)\,|_{\Gamma_1} = 0, P_1(x,\varepsilon) > 0,\ x \in G, \end{cases}$$

то нетрудно убедиться в том, что $g_1 = g_1(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} L_1^\varepsilon[g_1] \equiv \varepsilon\Delta g_1 + (-B(x) + 2\varepsilon\nabla P_0, \nabla g_1) + g_1(\varepsilon\,|\nabla P_0|^2 - (B(x), \nabla P_0) + C(x) - \operatorname{div} B + \varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ g_1|_{\Gamma_1} = -R_0(x,\varepsilon)|_{\Gamma_1}, g_1|_{\Gamma_2} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Очевидно, что характеристики оператора L_1^ε выходят на Γ_1, на границу с ненулевыми граничными условиями, не особым образом и коэффициенты оператора регулярно зависят от малого параметра так, что у $g_1 = g_1(x,\varepsilon)$, возможно выделение ненулевой регулярной части в виде $R_1 = R_1(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i^1(x)$, которая асимптотически удовлетворяет уравнению и реализует граничное условие на Γ_1. Поэтому представим $g_1 = g_1(x,\varepsilon)$ в виде $g_1 = R_1 + \exp\{-P_2(x,\varepsilon)\}g_2$, где $\exp\{-P_2(x,\varepsilon)\}$ - функция типа пограничного слоя в окрестности Γ_2. Если положить

$$\begin{cases} \nabla P_2 = -\frac{B(x)}{\varepsilon} + 2\nabla P_0 = -\nabla P_1, \\ P_2(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0,\ P_2(x,\varepsilon) > 0 \text{ при } x \in G, \end{cases}$$

то, нетрудно убедиться в том, что $g_2 = g_2(x,\varepsilon)$ удовлетворяет условиям:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[g_2] \equiv \varepsilon\Delta g_2 + (B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0, \nabla g_2) + g_2(\varepsilon\,|\nabla P_0|^2 - (B(x), \nabla P_0) + C(x) - \varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ g_2|_{\Gamma_1} = 0, \quad g_2|_{\Gamma_2} = -R_1(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2}. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнение в (5) то же, что и в (3), но с другим граничным условием на Γ_2 так, что процедуру последовательного выделения регулярных частей можно продолжить.

Продолжая последовательно процедуру выделения регулярных частей в (5) с вышевыбранными $P_1(x,\varepsilon)$, $P_2(x,\varepsilon)$, последовательно имеем:

$$\begin{aligned} g_2(x,\varepsilon) &= R_2 + e^{-P_1} g_3 = \\ &= R_2 + e^{-P_1}(R_3 + e^{-P_2} g_4) = \\ &= R_2 + e^{-P_1}(R_3 + e^{-P_2}(R_4 + e^{-P_1} g_5)) = \\ &= (R_2 + e^{-P_1} R_3) + e^{-(P_1+P_2)}(R_4 + e^{-P_1} g_5)) = \\ &= (R_2 + e^{-P_1} R_3) + e^{-(P_1+P_2)}(R_4 + e^{-P_1}(R_5 + \\ &\qquad + e^{-P_2} g_6)) = \\ &= (R_2 + e^{-P_1} R_3) + e^{-(P_1+P_2)}(R_4 + e^{-P_1} R_5) + \\ &\qquad + e^{-2(P_1+P_2)}(R_6 + e^{-P_1} g_7)) = \ldots \end{aligned}$$

то есть, формально решение можно представить в виде:

$$y = y(x,\varepsilon) = \\ = e^{-P_0}\left[\sum_{k=0}^{+\infty}(R_{2k} + R_{2k+1}e^{-P_1})e^{-k(P_1+P_2)}\right].$$

На этом этапе выберем $P_0(x,\varepsilon)$ так, чтобы коэффициенты при свободном члене в (4) и (5) были равны по модулю и имели противоположные знаки (это так для членов при первых производных в силу выбора $P_1(x,\varepsilon)$), то есть
$\varepsilon\left|\nabla P_0\right|^2 - (B(x),\nabla P_0) + C(x) - \mathrm{div}B(x) + \varepsilon\Delta P_0 =$
$= -(\varepsilon\left|\nabla P_0\right|^2 - (B(x),\nabla P_0) + C(x) - \varepsilon\Delta P_0)$, тогда $P_0(x,\varepsilon)$ – решение уравнения эйконала:

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\left|\nabla P_0\right|^2 - (B(x),\nabla P_0) + C(x) - \frac{1}{2}\mathrm{div}B(x) = 0, \\ P_0(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0, P_0(x,\varepsilon) > 0 \text{ при } x \in G. \end{array}\right. \tag{6}$$

Предполагаем, что выполнено следующее условие: (B) уравнение (6) имеет единственное классическое решение.

Асимптотически решение (6) представимо в виде:

$$\begin{array}{l} P_0 = \frac{A_{-1}}{\varepsilon} + A_0 + \varepsilon A_1 + \ldots, \\ A_i = A_i(x) \\ i = -1,0,1,2,... \end{array} \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), с учётом граничных условий нетрудно выписать задачи Коши рекуррентно определяющие $A_i(x)$. Задачи Коши для первых приближений имеют вид:

$$\left|\nabla A_{-1}\right|^2 - (B(x),A_{-1}) = 0,\ A_{-1}(x)|_{\Gamma_2} = 0, \\ A_{-1}(x) > 0,\ x \in G, \text{то есть} \quad \nabla A_{-1} = B.$$

$$2(\nabla B(x),\nabla A_0) + C(x) - \frac{1}{2}\mathrm{div}B(x) = 0, \\ A_0(x)|_{\Gamma_2} = 0\ A_0(x) \neq 0,\ x \in G.$$

$$2(\nabla B(x),\nabla A_1) + (\nabla A_0,\nabla A_0) = 0, \\ A_1(x)|_{\Gamma_2} = 0\ A_1(x) \neq 0,\ x \in G.$$

.

Так как

$$B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0 = \\ = B(x) - 2\nabla A_{-1} + \varepsilon\nabla A_0 + \varepsilon^2\nabla A_1.... = \\ = -B(x) - \varepsilon 2\nabla A_0 - \varepsilon^2 2\nabla A_1 - ...,$$

то, действительно, характеристики оператора L_0^ε выходят на Γ_2 не особым образом (с отличным от нуля граничным условием), и коэффициенты оператора регулярно зависят от малого параметра, следовательно, $R_0 = R_0(x,\varepsilon) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^0(x)$ является ненулевой регулярной частью (внешним разложением) в асимптотическом представлении решения краевой задачи (3).

Так как

$$-B(x) + 2\varepsilon\nabla P_0 = \\ = -B(x) + 2\nabla A_{-1} + \varepsilon 2\nabla A_0 + \varepsilon^2 2\nabla A_1 + ... = \\ = B(x) + \varepsilon 2\nabla A_0 + \varepsilon^2 2\nabla A_1 - ...,$$

то характеристики оператора L_1^ε выходят на Γ_1 не особым образом (с отличным от нуля граничным условием), и коэффициенты оператора регулярно зависят от малого параметра, следовательно, в представлении $g_1 = R_1 + \exp\{-P_2^(x,\varepsilon)\}g_2$, $R_1 = R_1(x,\varepsilon)$является ненулевой регулярной частью (внешним разложением) краевой задачи (4),то есть $R_1 = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^1(x)$.

Нетрудно проверить, что $R_k = R_k(x,\varepsilon) = = \sum\limits_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i y_i^k(x)$ асимптотически удовлетворяют следующим уравнениям и реализуют одно из граничных условий, а именно:

$$\left\{\begin{array}{l} L_0^\varepsilon[R_{2k}] \equiv \varepsilon\Delta R_{2k} + (B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0, R_{2k}) + \frac{1}{2}R_{2k}(\mathrm{div}B(x) - 2\varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ R_0(x,\varepsilon)_{|\Gamma_2} = \psi(x), R_{2k}(x,\varepsilon)_{\Gamma_2} = -R_{2k-1}(x,\varepsilon)_{\Gamma_2}, k = 1,2,...; \end{array}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{array}{l} L_1^\varepsilon[R_{2k-1}] \equiv \varepsilon\Delta R_{2k-1} + (-B(x) + 2\varepsilon\nabla P_0, R_{2k-1}) + \frac{1}{2}R_{2k-1}(-\mathrm{div}B(x) + 2\varepsilon\Delta P_0) = 0, \\ R_{2k-1}(x,\varepsilon)_{\Gamma_1} = -R_{2k-2}(x,\varepsilon)_{\Gamma_1}, k = 1,2,... \end{array}\right. \tag{10}$$

Таким образом, формальное представление решения запишется в виде следующего ряда:

$$\mathrm{y} = \mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon)\ = \exp\{-\frac{P_0}{\varepsilon}\}\left\{\sum_{i=0}^{+\infty}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(y_i^{2k} + y_i^{2k+1}\exp\{-\frac{P_1}{\varepsilon}\})\exp\{-k\frac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}]\ \right\},\ x \in \overline{G}.. \tag{11}$$

Отметим, что в (11) в силу выбора $P_1(x,\varepsilon) + + P_2(x,\varepsilon) = C(\varepsilon)$ не зависит от $x \in \overline{G}$.

Для $P_i = P_i(x,\varepsilon),\ i = 1,2$ асимптотически имеем:

$$P_1 = \frac{C_{-1}}{\varepsilon} + C_0 + \varepsilon C_1 + \ldots,\ C_i = C_i(x)\ i = -1,0,1,...$$

$$P_2 = \frac{D_{-1}}{\varepsilon} + D_0 + \varepsilon D_1 + ..., D_i = D_i(x)\ i = -1,0,1...$$

$$\begin{cases} \nabla P_1 = \frac{B(x)}{\varepsilon} - 2\nabla P_0 = -\frac{B(x)}{\varepsilon} - 2\nabla A_0 - \varepsilon 2A_1 - ..., \\ P_1(x,\varepsilon)|_{\Gamma_1} = 0,\ P_1(x,\varepsilon) > 0,\ x \in G. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla P_2 = -\frac{B(x)}{\varepsilon} + 2\nabla P_0 = \frac{B(x)}{\varepsilon} + 2\nabla A_0 + \varepsilon 2A_1 + ..., \\ P_2(x,\varepsilon)|_{\Gamma_2} = 0,\ P_2(x,\varepsilon) > 0,\ x \in G. \end{cases}$$

Отсюда, задачи Коши определяющие $C_i = C_i(x)$, $D_i = D_i(x)$ имеют вид:

$$\begin{cases} \nabla C_{-1} = -B(x), \\ C_{-1}(x)|_{\Gamma_1} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla C_0 = -2A_0, \\ C_0(x)|_{\Gamma_1} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla D_{-1} = B(x), \\ D_{-1}(x)|_{\Gamma_2} = 0\ ; \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla D_0 = 2A_0, \\ D_0(x)|_{\Gamma_2} = 0\ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla C_1 = -2A_1, \\ C_1(x)|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases} \ \ldots$$

$$\begin{cases} \nabla D_1 = 2A_1, \\ D_1(x)|_{\Gamma_2} = 0\ . \end{cases} \ \ldots$$

Отметим, что по построению, $C_i(x) + D_i(x) = = K_i = \mathrm{const}, \quad i = -1, 0, 1, 2...$

Далее уже нетрудно выписать задачи, однозначно определяющие y_i^k. Так как $B(x) - 2\varepsilon\nabla P_0 = B(x) - 2\nabla B_{-1} + ... = = -B(x) - \varepsilon 2\nabla A_0 - \varepsilon^2 2\nabla A_1 - ...$ $\mathrm{div}B(x) - 2\varepsilon\Delta P_0 = \mathrm{div}B(x) - 2\Delta A_{-1} - \varepsilon 2\Delta A_0 - -\varepsilon^2 2\Delta A_1 - ... = -\mathrm{div}B(x) - \varepsilon 2\Delta A_0 - \varepsilon^2 2\Delta A_1 - ...$, а коэффициенты при младших членах в (9),(10) равны по модулю и имеют противоположные знаки, нетрудно теперь выписывать уравнения, определяющие последовательные члены асимптотики.

Так задачи Коши, определяющие $y_0^k = y_0^k(x)$ в нулевом приближении, то есть при ε^0 в (11), имеют вид:

$$\begin{cases} L^0[y_0^0] \equiv (B(x), \nabla y_0^0) + \frac{1}{2} divB(x) \cdot y_0^0 = 0, \\ y_0^0(x)|_{\Gamma_2} = \psi(x); \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^0[y_0^1] \equiv (B(x), \nabla y_0^1) + \frac{1}{2} divB(x) \cdot y_0^1 = 0, \\ y_0^1(x)|_{\Gamma_1} = -\left. y_0^0(x)\right|_{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^0[y_0^{2k}] \equiv (B(x), \nabla y_0^{2k}) + \frac{1}{2} divB(x) \cdot y_0^{2k} = 0, \\ y_0^{2k}(x)|_{\Gamma_2} = -\left. y_0^{2k-1}(x)\right|_{\Gamma_2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L^0[y_0^{2k+1}] \equiv (B(x), \nabla y_0^{2k+1}) + \frac{1}{2} divB(x) \cdot y_0^{2k+1} = 0, \\ y_0^{2k+1}(x)|_{\Gamma_1} = -\left. y_0^{2k}(x)\right|_{\Gamma_1}; \qquad k = 1, 2, ...\ . \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $y_0^{2k}(x) = -y_0^{2k+1}(x)$ при $x \in \overline{G}$, так что главный член формального асимптотического разложения (11) имеет вид:

$$\begin{gathered} J_0 = \exp\{-\tfrac{P_0}{\varepsilon}\}[\sum_{k=0}^{+\infty} (y_0^{2k}(x) + y_0^{2k+1}(x)\exp\{-\tfrac{P_1}{\varepsilon}\})\exp\{-k\tfrac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}]\ \} = \\ = \exp\{-\tfrac{P_0}{\varepsilon}\} y_0^0(x)(1 - \exp\{-\tfrac{P_1}{\varepsilon}\})[\sum_{k=0}^{+\infty} \exp\{-k\tfrac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}] = \\ = \exp\{-\tfrac{P_0}{\varepsilon}\} y_0^0(x) \frac{1-\exp\{-\frac{P_1}{\varepsilon}\}}{1-\exp\{-\frac{(P_1+P_2)}{\varepsilon}\}} = \\ = \exp\{-\frac{A_{-1}(x)}{\varepsilon} - A_0(x)\} y_0^0(x)(\frac{1 - \exp\{-\frac{C_{-1}(x)}{\varepsilon} - C_0(x)\}}{1 - \exp\{-\frac{C_{-1}(x)+D_{-1}(x)}{\varepsilon} - (C_0(x) + D_0(x))\}}(1 + o(1)). \end{gathered} \tag{12}$$

Следует отметить, что так найденное приближение сохраняет граничные условия исходной задачи, то есть равно нулю на Γ_1и равно $\psi(x)$на Γ_2.

Начальные задачи, определяющие следующие члены асимптотики в (11) выписываются стандартным образом из (9)и (10) группировкой слагаемых с одинаковыми степенями малого параметра с учётом специфического способа выбора граничных условий. Так, задачи Коши, определяющие $y_1^k = y_1^k(x)$ в первом приближении, имеют вид:

$$\begin{gathered} \begin{cases} L_1[y_1^0] = \Delta y_0^0 - ((B_1(x), \nabla y_0^0) + \frac{1}{2} divB_1(x) \cdot y_0^0) \equiv G_1 - G_2, \\ y_1^0(x)|_{\Gamma_1} = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} L[y_1^{2k-1}] = G_1 + G_2, \\ y_1^{2k-1}(x)|_{\Gamma_2} = -y_1^{2k-2}(x)|_{\Gamma_2}; \end{cases} \quad \begin{cases} L[y_1^{2k}] = G_1 - G_2, \\ y_1^{2k}(x)|_{\Gamma_1} = -y_1^{2k-1}(x)|_{\Gamma_1}; \end{cases} \quad k = 1, 2, ...\ . \end{gathered} \tag{13}$$

Для того, чтобы получить удобные для сравнения в (11) выражения, представим решения в (13) в виде $y_1^0(x) = y_{11}^n(x) + y_{11}^o(x) + y_{12}(x)$, где функции являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L_1[y_{11}^n] = G_1, \\ y_{11}^i(x)|_{\Gamma_2} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} L_1[y_{11}^0] = 0, \\ y_{11}^i(x)|_{\Gamma_1} = -y_{11}^i|_{\Gamma_1}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} L_1[y_{12}] = -G_2, \\ y_{12}^(x)|_{\Gamma_1} = 0 \end{cases}$$

тогда $y_1^1(x) = y_{11}^n(x) - y_{11}^o(x) - y_{12}(x)$. Индукцией нетрудно установить, что тогда:

$$\begin{gathered} y_1^{2k}(x) = y_{11}^n(x) + (2k+1) y_{11}^0(x) + y_{12}(x), \\ y_1^{2k+1}(x) = y_{11}^n(x) - (2k+1) y_{11}^o(x) - y_{12}(x), \\ k = 1, 2, ... \end{gathered} \tag{14}$$

Подставляя (14) в (11) для первого приближения имеем:

$$\begin{gathered} J_1 = y_{11}^n(x) \frac{(1-\exp\{-P_1\})(1+\exp\{-(P_1+P_2)\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})^2} + \\ + y_{11}^o(x) \frac{(1+\exp\{-P_1\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})} + \\ + y_{12}(x) \frac{(1-\exp\{-P_1\})}{(1-\exp\{-(P_1+P_2)\})}. \end{gathered}$$

Отметим, что полученное выражение равно нулю на обеих границах рассматриваемой области, так что вместе с (12) сохраняет граничные условия исходной краевой задачи.

Последующие приближения выписываются стандартным образом из (9) и (10) группировкой слагаемых с одинаковыми степенями малого параметра.

Наконец, справедливо следующее утверждение

Теорема. *Если выполнены условия (A) и (B), то ряд в (11) равномерно асимптотический на G.*

Доказательство. Представим (11) в виде:

$$y = y(x,\varepsilon) = \exp\{-P_0\}\left\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(\phi_i^{2k}+\right.$$

$$+\phi_i^{2k+1}\exp\{-P_1\})\exp\{-k(P_1+P_2)\}]+$$

$$\left.+\ r_n(x,\varepsilon)\right\} = \exp\{-P_0\}(g_n+r_n).$$

Из (3) – (5) имеем:

$$L^\varepsilon[y] = L^\varepsilon[\exp\{-P_0\}g_0] =$$

$$= \exp\{-P_0\}L_0^\varepsilon[g_0] = exp\{-P_0\}L_0^\varepsilon[g_n+r_n] =$$

$$= \exp\{-P_0\}(L_0^\varepsilon[g_n]+L_0^\varepsilon[r_n]) =$$

$$= \exp(-P_0)(L_0^\varepsilon\left\{\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i[\sum_{k=0}^{+\infty}(\phi_i^{2k}+\right.$$

$$\left.+\phi_i^{2k+1}\exp(-P_1))\exp(-k(P_1+P_2))]\ \right\}+L_0^\varepsilon[r_n(x,\varepsilon)])\} = 0.$$

Вычислим:

$$L_0^\varepsilon[g_n] = L_0^\varepsilon[.\sum_{k=0}^{+\infty}(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k}+\exp\{-P_1\}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k+1}])\exp\{-k(P_1+P_2)\}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}(L_0^\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k}]+\exp\{-P_1\}L_1^\varepsilon[\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^i\phi_i^{2k+1}])\exp\{-k(P_1+P_2)\}] =$$

$$= \varepsilon^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}g_1^k(x)\exp\{-k(P_1+P_2)\}+\varepsilon^{n+1}\exp\{-P_1\}\sum_{k=0}^{+\infty}g_2^k(x)\exp\{-k(P_1+P_2)\} = \mathrm{O}(\varepsilon^{n+1}),$$

равномерно на G, так как ряды в последнем соотношении равномерно сходящиеся. Нетрудно видеть, что в силу выбора граничных условий для $\varphi_i^k(x) = \varphi_i^k,\ P_i(x,\varepsilon),\ i = 1,2,3,...$, имеют место равенства: $r_n(x,\varepsilon)|_{\Gamma_i} = 0\ i = 1,2$.

Таким образом, остаток является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} L_0^\varepsilon[r_n] = -L_0^\varepsilon[g_n]; \\ r_n(x,\varepsilon)|_{\Gamma_i} = 0\ i = 1,2.. \end{cases} .$$

Отсюда, в силу принципа максимума, $\sup r_n(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$ равномерно на $\overline{G}$, что доказывает теорему.

Литература

[1] Шалаумов, В. А. *Об асимптотике в целом экспоненциально малых решений задачи Дирихле сингулярно зависящей от малого параметра* / В. А. Шалаумов // Электронный журнал "Исследовано в России". – 2009. – Т. 108. – С. 1430 – 1440.