УДК 517.5

ФУНКЦИИ И ОТОБРАЖЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА НА МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ*А. С. Романов***FUNCTIONS AND MAPPINGS OF SOBOLEV TYPE ON METRIC SPACES***A. S. Romanov*

Статья содержит краткий обзор теории функциональных классов соболевского типа, определяемых на метрическом пространстве (X, d) , снабженном борелевской мерой μ . Более подробно рассматриваются введенные П. Хайлашем банаховы функциональные пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ и связанные с ними классы отображений.

This article contains a short review of the theory of functional classes of Sobolev type defined on a metric space (X, d) , equipped with a Borel measure μ . More detailed discussion of Banach function spaces $M_p^1(X, d, \mu)$, introduced by P. Hajlasz, and related classes of mappings.

Ключевые слова: пространства Соболева, метрические пространства, теоремы вложения.

Keywords: Sobolev spaces, metric spaces, embedding theorems.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-00662) и программы поддержки ведущих научных школ (НШ-6613.2010.1).

Изучение функциональных классов, в той или иной мере являющихся обобщением классических пространств Соболева, уже в течение многих лет является актуальной задачей, имеющей многочисленные приложения в разных областях математики – анализе, геометрии, теории дифференциальных уравнений, вариационном исчислении ... В настоящее время теория функциональных классов соболевского типа активно развивается в различных направлениях.

К уже традиционным направлениям, как правило, имеющим практические приложения, можно отнести введение и изучение в областях евклидова пространства новых классов вещественнозначных функций, гладкость которых понимается в некотором обобщенном смысле. Так, в работе О. В. Бесова [4] введены и изучаются функции соболевского типа с "переменной гладкостью", а в книге Д. Эдмундса и В. Д. Эванса [26] рассматриваются "абстрактные пространства Соболева" $W^k(X(\Omega), Y(\Omega))$, функции которых принадлежат банахову пространству $X(\Omega)$ и имеют обобщенные производные, принадлежащие банахову пространству $Y(\Omega)$.

В работах Ю. Г. Решетняка [13,14,15] были введены и изучены классы функций соболевского типа, определенных в евклидовых областях, но принимающих значения в метрическом пространстве. Оригинальный подход к определению таких функциональных пространств позволил получить аналоги многих результатов, известных для классических пространств Соболева.

В настоящее время на группах Карно активно изучаются различные вопросы, в которых важную роль играет принадлежность функций или отображений соответствующим классам Соболева. На группах Карно, в отличие от евклидова случая, во многих вопросах определяющую роль играет

не полный дифференциал отображения, а дифференциал, вычисляемый лишь вдоль "горизонтальных" векторных полей. Групповая специфика не позволяет автоматического перенесения евклидовых результатов и требует новых подходов и методов доказательств, которые порой оказываются близки к используемым при изучении свойств функций на метрических пространствах. Подробное обсуждение вопросов теории отображений с ограниченным искажением и различных свойств соболевских функций на группах Карно можно найти в работе С. К. Водопьянова [43], содержащей обширную библиографию.

Нас же в первую очередь будет интересовать ситуация, когда метрическое пространство является областью определения функции.

Вполне актуальным и целесообразным представляется введение и систематическое изучение (в дополнение к традиционно рассматриваемым на метрических пространствах классам непрерывных, липшицевых и суммируемых функций) новых классов функций с обобщенной "гладкостью", наследующих многие характеристические свойства классических пространств Соболева.

В евклидовом случае пространство Соболева $W_p^1(G)$ обычно воспринимается как подпространство функций из $L_p(G)$, у которых первые обобщенные производные суммируемы в степени p . На метрических пространствах в общем случае нет никакой линейной структуры и, как следствие, нет адекватного понятия дифференциала функции. Поэтому метрическое определение функций соболевского типа естественным образом должно отличаться от традиционного определения пространств Соболева, используемого в евклидовом случае. При всем внешнем различии формулировок, а порой и различии получаемых в итоге классов функций, в основе разных подходов к опреде-

лению функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах лежит единый принцип – для функций пространства $W_p^1(B)$ на шаре $B \subset R^n$ выделяется какое-либо характеристическое свойство, допускающее переформулировку в терминах произвольной метрики и подходящей борелевской меры, а затем это свойство используется в качестве аксиомы принадлежности функции соответствующему классу соболевского типа на метрическом пространстве. В результате получаемые классы функций, совпадая на шарах $B \subset R^n$ с классическими пространствами Соболева, в общем случае на метрических пространствах могут оказаться существенно различными.

Наиболее общий – аксиоматический подход к определению соболевских классов функций предложен в работе В. М. Гольдштейна и М. Троянова [27], формализовавших минимальный набор требований, позволяющий определить на метрическом пространстве функциональные классы, совпадающие в евклидовом случае с пространствами Соболева. В эту схему вписываются большинство из известных классов соболевского типа на метрических пространствах. К сожалению, минимальный набор условий позволяет получить лишь ограниченный набор содержательных утверждений о свойствах функций.

Активное изучение различных классов функций с обобщенной гладкостью на метрических пространствах началось с введением Ю. Хейнонема и П. Коскелой понятия "верхнего градиента" [37,38].

На связном метрическом пространстве (X, d) стандартным образом определяются класс спрямляемых кривых и понятие интеграла по кривой. Неотрицательную функцию g называют "верхним градиентом" функции $u : X \rightarrow R$, если неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma} g \, dl \quad (1)$$

выполняется для всякой кривой γ , соединяющей точки x и y . Очевидно, что в евклидовом случае для гладкой функции u неравенство (1) является непосредственным следствием формулы Ньютона-Лейбница, а "верхним градиентом" является модуль градиента функции u , т. е. $g = |\nabla u|$.

Если на метрическом пространстве задана некоторая борелевская мера μ , то функциональное пространство соболевского типа $W_p^1(X, d, \mu)$ определяется как совокупность функций $u \in L_p(X, \mu)$, у которых "верхний градиент" суммируем в степени p по мере μ [28,36,37,38].

В евклидовом случае свойства функций, принадлежащих пространству Соболева $W_p^1(G)$, существенным образом зависят от геометрического строения области G . В метрическом случае свойства функций из пространства соболевского типа $W_p^1(X, d, \mu)$ зависят от соотношений, связываю-

щих метрику d и меру μ . Наиболее полная теория таких классов функций получается в случае, когда должным образом согласованные свойства метрики и меры обеспечивают выполнение для произвольной функций $u \in W_p^1(X, d, \mu)$ метрического аналога p -неравенства Пуанкаре:

$$\int_{B(x, \rho)} |u - u_B| \, d\mu \leq C \rho \left(\int_{B(x, \rho)} g^p \, d\mu \right)^{1/p}, \quad (2)$$

где символом u_B обозначено среднее значение функции u на шаре $B(x, \rho)$.

Учитывая имеющуюся в евклидовом случае взаимосвязь между принадлежностью функции u пространству Соболева $W_p^1(R^n)$ и выполнением для нее соответствующего неравенства Пуанкаре, неравенство (2) само может быть использовано для определения новых классов функций соболевского типа на метрических пространствах. Будем говорить, что функция $u \in P_p^1(X, d, \mu)$, если $u \in L_p(X, \mu)$ и существует такая неотрицательная функция $g \in L_p(X, \mu)$, что неравенство (2) выполняется для всех шаров $B(x, \rho) \subset X$. Отметим, что, в отличие от пространств $W_p^1(X, d, \mu)$, определяемых на связных метрических пространствах, функциональные классы $P_p^1(X, d, \mu)$ могут быть определены на произвольном метрическом пространстве с мерой.

Различные свойства функций, удовлетворяющих на метрическом пространстве неравенствам Пуанкаре, и взаимосвязь пространств $P_p^1(X, d, \mu)$ с другими функциональными классами соболевского типа довольно подробно изучаются в работе П. Хайлаша и П. Коскелы [33], а также рассматриваются в работах [28,30,31,38].

Для соболевских функций на евклидовом шаре $B \subset R^n$ Б. Боярским [24,25] была получена точечная оценка липшицевого типа: при $p > 1$ для всякой функции $u \in W_p^1(B)$ почти всюду выполняется неравенство:

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y| (M(|\nabla u|)(x) + M(|\nabla u|)(y)), \quad (3)$$

где $M(|\nabla u|)$ – максимальная функция Харди-Литтлвуда для модуля градиента функции u .

Метрический аналог неравенства (3) был использован П. Хайлашем [29] для определения функциональных классов соболевского типа $M_p^1(X, d, \mu)$, которые достаточно подробно будут рассмотрены в первом разделе статьи. Здесь же лишь отметим, что оценка липшицевого типа, на которой базируется определение, позволяет получить для пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ аналоги основных классических теорем вложения, выполняющихся для пространств Соболева в евклидовом случае. При этом полученные в метрическом случае доказательства оказываются даже проще и нагляднее, чем в евклидовом. Традиционное определение соболевских классов функций в областях

евклидова пространства, основанное на суммируемости обобщенных производных в некоторой степени $p \geq 1$, является весьма универсальным. С одной стороны, этим объясняется активное использование теории пространств Соболева в различных разделах современной математики, с другой стороны, наличие широкого спектра технических возможностей не способствует поиску наиболее простых и естественных для данного круга задач методов доказательств. Определения функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах базируются на альтернативных описаниях, как правило, выделяющих какое-либо характеристическое свойство соболевских функций, что сужает технические возможности, зато позволяет выделять основное содержание необходимых оценок и находить оптимальные способы доказательства.

При доказательстве для пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ теорем вложения в пространства Лебега $L_q(X, \mu)$ основную роль играет получаемая в ходе доказательства оценка приращения функции через меру шара, содержащего соответствующие точки. Учитывая это обстоятельство, вполне целесообразным оказывается рассмотрение новых функциональных классов $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$, функции которых удовлетворяют условию:

$$|u(x) - u(y)| \leq (M(x, y))^{1/\alpha}(g(x) + g(y)),$$

где $M(x, y)$ – мера соответствующего шара, содержащего точки x и y , а функция $g \in L_p(X, \mu)$. Получаемые для пространств $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ теоремы вложения оказываются вполне аналогичными классическим соболевским теоремам вложения [18,19]. Если считать, что на метрических пространствах критерии "гладкости" определяются взаимосвязью свойств функций с соответствующей метрикой, то, в случае неоднородных мер, пространства $W_{\alpha,p}(X, d, \mu)$ можно воспринимать как классы функций с переменной гладкостью, зависящей от строения меры в окрестности данной точки. Такая точка зрения вполне согласуется с подходом О. В. Бесова к определению классов функций с переменной гладкостью в евклидовом случае [4].

Отметим, что развитие теории функциональных классов соболевского типа на метрических пространствах стимулируется не только внутренними мотивами, но и имеющимися приложениями, казалось бы, столь абстрактных результатов к изучению классических пространств Соболева в евклидовых областях с нерегулярной границей [20,21], к описанию следов соболевских функций на множествах фрактальной природы [34], к изучению различных вопросов в теории пространств Карно-Каратеотори [33,43]...

1. Функциональные пространства $M_p^1(X, d, \mu)$

1.1. Определения и основные свойства

Рассмотрим метрическое пространство (X, d) с конечным диаметром и конечную регулярную борелевскую меру μ с носителем в множестве X .

Для произвольной μ – измеримой функции $u : X \rightarrow \bar{R}$, функцию $g : X \rightarrow [0, \infty)$ будем называть допустимой, если существует такое множество $E \subset X$, что $\mu(E) = 0$ и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \quad (1.1.1)$$

выполняется для всех точек $x, y \in X \setminus E$.

Множество всех допустимых функций для функции u обозначим через $D(u)$ и при $p \geq 1$ положим $D_p(u) = D(u) \cap L_p(X, \mu)$.

Функциональные классы $S_p^1(X, d, \mu)$ и $M_p^1(X, d, \mu)$ определяются условиями:

$$S_p^1(X, d, \mu) = \{u : X \rightarrow \bar{R} \mid D_p(u) \neq \emptyset\},$$

$$M_p^1(X, d, \mu) = \{u \in L_p(X, \mu) \mid u \in S_p^1(X, d, \mu)\},$$

а полунорма в пространстве $S_p^1(X, d, \mu)$ и норма в пространстве $M_p^1(X, d, \mu)$ определяются равенствами:

$$\|u \mid S_p^1\| = \inf_{g \in D_p(u)} \|g \mid L_p\|,$$

$$\|u \mid M_p^1\| = \|u \mid L_p\| + \|u \mid S_p^1\|.$$

В работе [29] показано, что пространство $M_p^1(X, d, \mu)$ является банаховым, а липшицевы функции образуют в нем всюду плотное подмножество. Отметим, что, в силу конечности диаметра метрического пространства и конечности меры, пространства $S_p^1(X, d, \mu)$ и $M_p^1(X, d, \mu)$ совпадают как множества функций. Различные свойства пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ и их взаимосвязь с другими классами функций изучаются в работах [28,29,30,31,32,34].

В евклидовых областях $G \subset R^n$, для которых существует ограниченный оператор продолжения $Ext : W_p^1(G) \rightarrow W_p^1(R^n)$ (в частности, в областях с липшицевой границей), пространство $M_p^1(G, |*|, m_n)$, рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, и классическое пространство Соболева $W_p^1(G)$ совпадают как множества функций, и их нормы эквивалентны [29]. Это позволяет введенные П. Хайлашем пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ называть пространствами соболевского типа.

В евклидовых областях более общего вида пространство Соболева $W_p^1(G)$ и пространство $M_p^1(G, |*|, m_n)$ могут и не совпадать, можно лишь гарантировать вложение [29]:

$$M_p^1(G, |*|, m_n) \subset W_p^1(G).$$

Если в общем случае не предполагать никакой взаимосвязи между метрикой и мерой, то сложно ожидать какой-либо дополнительной содержательной информации о свойствах функций классов $M_p^1(X, d, \mu)$. Однако при вполне естественных дополнительных предположениях для функциональных пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ выполняются аналоги многих классических результатов, известных в евклидовом случае для пространств Соболева $W_p^1(\mathbb{R}^n)$. Для нас в первую очередь будут представлять интерес аналоги классических теорем вложения.

Мера μ называется s -регулярной, если для всякого шара при $\rho \leq \text{diam} X$ выполняется оценка $\mu(B(x, \rho)) \geq C\rho^s$, при этом показатель s во многих случаях играет роль "размерности" метрического пространства (X, d) . Согласно результатам работы [29], верна следующая теорема вложения.

Теорема 1.1.1. (Р. Hajlasz) Пусть $1 < p < \infty$, мера μ является s -регулярной и функция $u \in M_p^1(X, d, \mu)$, тогда:

1) при $p < s$ функция $u \in L_q(X, \mu)$, где $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-p}$ и

$$\|u\|_{L_q} \leq C \|u\|_{M_p^1},$$

$$\|u - u_X\|_{L_q} \leq C' \|u\|_{S_p^1};$$

2) при $p = s$ существуют такие постоянные C_1 и C_2 , что

$$\int_X \exp\left(C_1 \frac{|u - u_X|}{\|u\|_{S_p^1}}\right) d\mu \leq C_2;$$

3) при $p > s$

$$\|u - u_X\|_{L_\infty} \leq C \mu(X)^{1/s-1/p} \|u\|_{S_p^1}.$$

В формулировке теоремы и далее символ u_Ω означает среднее значение функции u на множестве Ω :

$$u_\Omega = \int_\Omega u d\mu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega u d\mu.$$

Можно отметить, что в регулярных евклидовых областях $G \subset \mathbb{R}^n$, в которых пространства $M_p^1(G, |\cdot|, m_n)$ и $W_p^1(G)$ совпадают, результат теоремы 1.1.1 для пространств $M_p^1(G, |\cdot|, m_n)$ совпадает с результатом классической теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(G)$. При этом теорема 1.1.1 является весьма универсальной, ее результат не зависит от структуры конкретного метрического пространства и полностью определяется показателем регулярности меры, который характеризует взаимосвязь метрики и меры.

Для пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ вполне содержательная теория, включающая в себя различные варианты теорем вложения, получается в случае,

когда мера μ удовлетворяет простому геометрическому "условию удвоения":

$$\mu(B(x, 2\rho)) \leq C_d \mu(B(x, \rho)), \quad (1.1.2)$$

т. е. мера шара удвоенного радиуса допускает оценку сверху через меру исходного шара. Всякая мера, удовлетворяющая условию удвоения, является s -регулярной с показателем $s = \log_2 C_d$. Всюду далее мы будем предполагать, что мера μ удовлетворяет условию удвоения, а символом s будем обозначать ее показатель регулярности. Несмотря на простоту оценки (1.1.2), она имеет много полезных следствий. На метрических пространствах с мерой, удовлетворяющей условию удвоения, сохраняются многие свойства меры и интеграла Лебега в $\mathbb{R}^n$ [42], к примеру – лемма Витали о покрытии, теорема Лебега о дифференцировании интеграла, ограниченность максимального оператора в пространствах L_p при $p > 1 \dots$

При этом метрических пространств, на которых можно ввести меру, удовлетворяющую условию удвоения, достаточно много. Как показали А. Л. Вольберг и С. В. Конягин [7,8], такие меры могут быть заданы на любом компакте в $\mathbb{R}^n$.

Если мера μ удовлетворяет условию удвоения, то, согласно работе [32], для всех точек Лебега локально суммируемой функции u выполняется неравенство:

$$|u(x) - u(y)| \leq C(d(x, y))^\gamma (u_\gamma^\#(x) + u_\gamma^\#(y)), \quad (1.1.3)$$

где $0 < \gamma \leq 1$ и $u_\gamma^\#$ – уточненная максимальная функция порядка γ , однозначно определенная во всех точках множества X равенством:

$$u_\gamma^\#(x) = \sup_{\rho > 0} \rho^{-\gamma} \int_{B(x, \rho)} |u - u_{B(x, \rho)}| d\mu.$$

Таким образом, в отличие от общей ситуации, когда неравенство (1.1.1) лишь неявным образом определяет семейство допустимых функций, в данном случае появляется возможность конструктивного описания допустимых функций, что существенно упрощает технику доказательств и расширяет круг изучаемых вопросов.

Следующие описания пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ получены в работе [32].

Лемма 1.1.2. (Р. Hajlasz, J. Kinnunen) При $1 < p \leq \infty$ для функции $u \in L_p(X, \mu)$ следующие условия эквивалентны:

- 1) $u \in M_p^1(X, d, \mu)$;
- 2) $u_1^\# \in L_p(X, \mu)$;
- 3) существует такая функция $h \in L_p(X, \mu)$, что неравенство Пуанкаре:

$$\int_{B(x, \rho)} |u - u_{B(x, \rho)}| d\mu \leq \rho \int_{B(x, \rho)} h d\mu \quad (1.1.4)$$

выполняется для произвольных $x \in X$ и $\rho > 0$.

В силу равномерной выпуклости пространств L_p при $p > 1$ существует функция h_0 , удовлетворяющая неравенству Пуанкаре (1.1.4) и имеющая наименьшую L_p -норму, при этом

$$\|h_0\|_{L_p(X, \mu)} \sim \|u_1^\# \|_{L_p(X, \mu)} \sim \|u\|_{S_p^1(X, d, \mu)}$$

Выполнение для функций пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ неравенства Пуанкаре и результат теоремы 1.1.1 позволяют переформулировать в удобной для нас форме теорему 8.1 и теорему 8.3 работы П. Хайлаша и П. Коскелы [33].

Теорема 1.1.3. (Р. Hajlasz, Р. Koskela) *При $1 < p < \infty$ произвольная последовательность функций, ограниченная в норме $M_p^1(X, d, \mu)$, содержит подпоследовательность, сходящуюся в $L_q(X, \mu)$ к некоторой функции $u \in L_q(X, \mu)$, где*

- 1) $1 \leq q < \frac{ps}{s-p}$ при $p < s$;
- 2) $1 \leq q < \infty$ при $p \geq s$.

Поскольку строение пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ определяется метрикой d и мерой μ , то и соответствующие теоремы вложения естественным образом можно разбить на два типа: теоремы вложения разных метрик и теоремы вложения разных мер.

1.2. Теоремы вложения разных метрик

Под теоремами вложения разных метрик обычно понимают вложения в пространства функций, имеющих гладкость меньшую, чем гладкость исходного пространства. При $0 < \gamma < 1$ в определении пространств соболевского типа расстояние $d(x, y)$ можно заменить на $d_\gamma(x, y) = (d(x, y))^\gamma$ и получить соответствующие гельдеровы классы $M_p^\gamma(X, d, \mu)$. Однако $d_\gamma(x, y)$, в свою очередь, является метрикой, поэтому возникающие гельдеровы классы $M_p^\gamma(X, d, \mu)$ относительно исходной метрики d часто оказывается более удобным рассматривать как пространства соболевского типа $M_p^1(X, d_\gamma, \mu)$, т. е. как пространства с "единичной гладкостью", но относительно новой метрики d_γ . Достоинство такого подхода заключается в том, что для пространств $M_p^1(X, d_\gamma, \mu)$ не требуется новых доказательств теорем вложения, т. к. достаточно пересчитать показатель регулярности меры μ относительно новой гельдеровой метрики и воспользоваться уже имеющимся результатом.

Само определение пространств $M_p^1(X, d_\gamma, \mu)$ не совсем привычно, поскольку в евклидовом случае обычно рассматриваются другие гельдеровы классы функций. При этом заметим, что и в евклидовом случае пространства M_p^1 относительно гельдеровых метрик использовались в работе П. Хайлаша и О. Мартио [34] при описании следов соболевских функций на фракталах. В метрическом случае пространства такого типа, определяемые гельдеровыми метриками, оказываются удобным инструментом для изучения следов функций из

пространств $M_p^1(X, d, \mu)$ на множествах "меньшей размерности".

Формулируемая ниже теорема получена в работе [17] и характеризует взаимосвязь пространств соболевского типа M_p^1 , определяемых разными метриками. При этом термин "теоремы вложения разных метрик" в данном случае можно понимать в буквальном смысле.

Теорема 1.2.1. ([17]) *Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < 1$. Тогда пространство $M_p^1(X, d, \mu)$ непрерывно вложено в пространство $M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$, где*

- 1) $1 - \frac{s}{p} = \gamma - \frac{s}{r}$ при $(1 - \gamma)p < s$;
- 2) $1 \leq r \leq \infty$ при $(1 - \gamma)p \geq s$.

1.3. Теоремы вложения "разных мер"

В евклидовом случае теоремы вложения разных мер (разных измерений) обычно связывают с задачей описания следов функций из соболевских классов на подмножествах, имеющих размерность меньшую, чем исходное евклидово пространство.

Для начала нам нужно смоделировать аналогичную ситуацию на метрическом пространстве. Пусть мера μ удовлетворяет условию удвоения и является s -регулярной, $s > 1$, а подмножество $E \subset X$ и удовлетворяющая условию удвоения s' -регулярная мера ν таковы, что для произвольного шара $B(x, \rho)$ с центром $x \in E$ верна оценка $\nu(B(x, \rho)) \leq C\rho^{-\alpha}\mu(B(x, \rho))$, где $\alpha = s - s' > 0$. В силу конечности диаметра множества X и конечности меры μ , получаем, что $\nu(E) < \infty$. Вообще говоря, функция u из пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ изначально может быть определена лишь μ -почти всюду в X , и ее значения могут быть не заданы на множестве $A \subset E$, для которого $\mu(A) = 0$ и $\nu(A) > 0$. Поэтому нужно вначале определиться – что мы будем называть следом функции u на множестве E . Согласно работе [29], липшицевы функции плотны в пространстве $M_p^1(X, d, \mu)$, поэтому можно рассматривать следы непрерывных функций. Однако в данном случае удобнее воспользоваться другим стандартным приемом – доопределить функцию в ее точках Лебега.

Согласно результатам работ [17, 21], при $p > \alpha$ для произвольной функции $u \in M_p^1(X, d, \mu)$, точками Лебега являются ν -почти все точки множества E , и в них функция u может быть доопределена равенством

$$u(x) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, \rho))} \int_{B(x, \rho)} u \, d\mu.$$

Далее при $p > \alpha$ следом функции $u \in M_p^1(X, d, \mu)$ на множестве E будем называть сужение на множество E функции

$$\tilde{u}(x) = \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, \rho))} \int_{B(x, \rho)} u \, d\mu,$$

определенной во всех точках $x \in X$ и μ -почти всюду совпадающей с исходной функцией u .

Теперь мы можем сформулировать условия, при которых оператор следа будет ограниченным.

Теорема 1.3.1. ([21]) Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s, p\}$ и $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. Тогда оператор следа

$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

непрерывен при

- 1) $1 \leq r < \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, если $(1-\gamma)p < s$;
- 2) $1 \leq r < \infty$, если $(1-\gamma)p \geq s$.

1.4. О компактности операторов вложения и следа

Нас будут интересовать условия компактности оператора вложения пространства $M_p^1(X, d, \mu)$ в пространство $M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$, определяемые гельдеровыми метриками, и компактности оператора следа $Tr : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$.

Доказательство следующего утверждения основано на оценке максимальной функции дробного порядка через максимальную функцию порядка 1 и норму самой функции [21]:

$$u_\gamma^\#(x) \leq C(\tau^{(1-\gamma)}u_1^\#(x) + \tau^{-(s+\gamma)}\|u\|_{L_1(X, \mu)}). \quad (1.4.1)$$

Неравенство (1.4.1) напоминает оценку промежуточной производной через старшую производную и саму функцию.

Теорема 1.4.1. ([21]) Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \gamma < 1$. Оператор вложения

$$I : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$$

будет компактным при

- 1) $1 \leq r < \frac{ps}{s-(1-\gamma)p}$, когда $(1-\gamma)p < s$;
- 2) $1 \leq r < \infty$, когда $(1-\gamma)p = s$;
- 3) $1 \leq r \leq \infty$, когда $(1-\gamma)p > s$.

Следствие 1.4.2. ([21]) Если $p > s$, то пространство $M_p^1(X, d, \mu)$ компактно вложено в пространство $M_\infty^1(X, d_\gamma, \mu)$ при всех $\gamma < 1 - s/p$.

Используя результаты теоремы 1.4.1 и теоремы 1.1.1, представим оператор вложения $I : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow L_q(X, \mu)$ в виде композиции $I = I_1 \circ I_2$, где оператор

$$I_2 : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow M_r^1(X, d_\gamma, \mu)$$

является компактным, а оператор

$$I_1 : M_r^1(X, d_\gamma, \mu) \rightarrow L_q(X, \mu)$$

является непрерывным. Последовательный пересчет показателей суммируемости позволяет получить утверждение, уточняющее теорему 1.1.3.

Теорема 1.4.3. ([21]) Пусть $1 < p < \infty$. Тогда оператор вложения

$$I : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow L_q(X, \mu)$$

является компактным при

- 1) $1 \leq q < \frac{ps}{s-p}$, когда $p < s$;
- 2) $1 \leq q < \infty$ при $p = s$;
- 3) $1 \leq q \leq \infty$ при $p > s$.

Если подмножество $E \subset X$ и мера ν удовлетворяют условиям пункта 1.3, то условия компактности оператора следа описываются в следующем утверждении.

Теорема 1.4.4. ([21]) Пусть $1 < p < \infty$, $0 < \alpha < \min\{s, p\}$ и $0 < \gamma < 1 - \alpha/p$. Тогда оператор следа

$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow M_r^1(E, d_\gamma, \nu)$$

будет компактным при

- 1) $1 \leq r < \frac{p(s-\alpha)}{s-(1-\gamma)p}$, когда $(1-\gamma)p < s$;
- 2) $1 \leq r < \infty$, когда $(1-\gamma)p = s$;
- 3) $1 \leq r \leq \infty$, когда $(1-\gamma)p > s$.

Следствием теоремы 1.4.4. и теоремы 1.1.1. является следующее утверждение о компактности оператора следа в пространствах Лебега.

Теорема 1.4.5. ([21]) Пусть $1 < p < \infty$ и $0 < \alpha < \min\{s, p\}$. Тогда оператор следа

$$Tr : M_p^1(X, d, \mu) \rightarrow L_q(E, \nu)$$

будет компактным при

- 1) $1 \leq q < \frac{p(s-\alpha)}{s-p}$, когда $p < s$;
- 2) $1 \leq q < \infty$, когда $p = s$;
- 3) $1 \leq q \leq \infty$, когда $p > s$.

2. Пространства Соболева в пиках с гельдеровыми особенностями

В этом разделе мы рассмотрим приложения результатов, полученных для пространств M_p^1 , к изучению свойств функций, принадлежащих классическим пространствам Соболева в евклидовых областях с нерегулярной границей. Нас будут интересовать различные теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ в "нулевых" пиках $G_\lambda \subset R^n$ с гельдеровыми особенностями в вершине, в том числе и вопрос о компактности вложения следов соболевских функций в лебеговские классы на границе пика, естественным образом связанный с постановкой краевых задач для эллиптических уравнений.

Непрерывность и компактность оператора вложения

$$I : W_p^1(G) \rightarrow L_q(G)$$

для областей с гельдеровыми особенностями даже более общего вида достаточно подробно изучены в работах О. В. Бесова, Д. А. Лабутина, В. Г. Мазы

... [1,2,3,10,11,12]. При этом вопрос о компактности оператора следа

$$Tr : W_p^1(G) \rightarrow L_q(\partial G)$$

для областей с нерегулярной границей исследован мало. Одна из причин этого связана техническими проблемами, возникающими при описании пространств следов соболевских функций даже для модельных областей с нерегулярной границей. Можно отметить лишь работу М. Ю. Васильчика и В. М. Гольдштейна [5], согласно которой для "нулевого" пика $G_\varphi \subset R^n$, определяемого функцией φ , пространство следов соболевских функций класса $W_2^1(G_\varphi)$ компактно вложено в весовое пространство Лебега $L_{2,\varphi}(\partial G_\varphi)$ на границе пика.

Для получения интересующих нас теорем вложения мы хотим воспользоваться методами, существенно отличными от традиционно используемых в данной тематике. Рассматриваемая нами схема доказательств основывается на взаимосвязи пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ с пространствами $M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n)$ и последующем применении уже имеющихся теорем вложения для классов функций соболевского типа на метрических пространствах. Такой подход позволяет получить соответствующие результаты, не используя явного описания пространства следов, а точность получаемых в теоремах оценок легко проверяется на конкретном примере.

Точку пространства R^n будем обозначать через (x, y) , где $x \in R, y \in R^{n-1}$. Для $1 \leq \lambda < \infty$ пик $G_\lambda \subset R^n$ определим условием:

$$G_\lambda = \{(x, y) \in R^n \mid 0 < x < 1, \\ 0 < y_k < x^\lambda, k = 1, \dots, n-1\}.$$

Обозначим через m_n сужение n -мерной меры Лебега на пик $\bar{G}_\lambda$, а через σ сужение $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа на границу пика G_λ .

Введем показатель $\Lambda = 1 + (n-1)\lambda$. Поскольку для меры шаров с центром в вершине пика выполняется оценка $|B(0, r) \cap G_\lambda| \sim Cr^\Lambda$, то в различных оценках показатель Λ часто играет роль "асимптотической размерности" пика G_λ .

Свойства функций из пространств Соболева $W_p^1(G)$ существенным образом зависят от геометрической структуры области G . Известно, что наличие гильбертовой особенности в вершине пика G_λ является препятствием для существования ограниченного оператора продолжения функций класса $W_p^1(G_\lambda)$ из пика на все евклидово пространство, с условием принадлежности продолженной функции классу $W_p^1(R^n)$. Поэтому изначально мы можем гарантировать лишь вложение

$$M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n) \subset W_p^1(G_\lambda).$$

Существование обратного вложения удастся показать лишь при дополнительном условии на

показатель суммируемости p . Согласно результатам работ [16,20], при: $p > \Lambda/n$

$$W_p^1(G_\lambda) = M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n),$$

при этом функциональные пространства совпадают как множества функций, а их нормы оказываются эквивалентными. Поэтому интересующие нас теоремы вложения для пространств Соболева $W_p^1(G_\lambda)$ могут быть получены как следствие результатов предыдущего раздела для пространства соболевского типа $M_p^1(G_\lambda, |*|, m_n)$.

Доказательство совпадения функциональных пространств в данном случае основано на специальной конструкции оператора продолжения "с ухудшением класса", действующего из пространства $W_p^1(G_\lambda)$ в пространство $W_q^1(R^n)$, где $q < p$. Такой оператор продолжения оказывается ограниченным лишь при $p > \Lambda/n$, поэтому при меньших показателях суммируемости приходится использовать другой технический прием.

Введем в пике G_λ новую анизотропную метрику d , полагая:

$$d((x_1, y_1); (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1^\lambda - x_2^\lambda)^2 + |y_1 - y_2|^2},$$

и весовые меры μ и ν , определяемые условиями:

$$d\mu = x^{p(\lambda-1)} dm_n, \quad d\nu = x^{p(\lambda-1)} d\sigma.$$

Как показано в работе [21], при всех показателях суммируемости $p > 1$ выполняется вложение:

$$W_p^1(G_\lambda) \subset M_p^1(G_\lambda, d, \mu).$$

Поэтому интересующие нас утверждения, касающиеся оператора вложения, являются следствием цепочки вложений:

$$W_p^1(G_\lambda) \Rightarrow M_p^1(G_\lambda, d, \mu) \Rightarrow M_r^1(G_\lambda, d_\gamma, \mu) \Rightarrow \\ \Rightarrow L_s(G_\lambda, \mu) \Rightarrow L_q(G_\lambda, m_n),$$

а соответствующие утверждения для оператора следа являются следствием цепочки вложений:

$$W_p^1(G_\lambda) \Rightarrow M_p^1(G_\lambda, d, \mu) \Rightarrow M_r^1(\partial(G_\lambda), d_\gamma, \nu) \Rightarrow \\ \Rightarrow L_s(\partial(G_\lambda), \nu) \Rightarrow L_q(\partial(G_\lambda), \sigma).$$

При этом на каждом шаге вложение либо уже известно, либо является простым следствием неравенства Гельдера.

Как уже было отмечено, результаты для оператора вложения не являются новыми, просто в данном случае они получены новым способом. Поэтому мы ограничимся формулировкой окончательного результата о компактности вложения следов соболевских функций в пространства Лебега на границе пика.

Теорема 2.1. ([21]) Пусть $\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \infty$, тогда оператор следа

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \rightarrow L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$$

является компактным при

- 1) $1 \leq q < p \frac{\Lambda - \lambda}{\Lambda - p}$, когда $\frac{\Lambda}{\Lambda - \lambda + 1} < p < \Lambda$;
- 2) $1 \leq q < \infty$, когда $p = \Lambda$;
- 3) $1 \leq q \leq \infty$, когда $p > \Lambda$.

Ограничение снизу на показатель суммируемости p в теореме 2.1 связано с тем, что при меньших показателях суммируемости пространство следов не может быть вложено ни в какое пространство Лебега $L_q(\partial G_\lambda, \sigma)$ при $q \geq 1$. В этом случае вложение возможно лишь в весовые пространства Лебега.

В ходе доказательства, кроме основного утверждения, автоматически получаются и другие результаты о компактности оператора следа в соответствующих функциональных пространствах, участвующих в цепочке последовательных теорем вложения. В результате получены условия компактности оператора следа для следующих случаев:

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \implies M_r^1(\partial G_\lambda, d_\gamma, \nu);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \implies M_q^1(\partial G_\lambda, d_\gamma, \sigma);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \implies M_q^1(\partial G_\lambda, |*|^\gamma, \sigma);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \implies C^{0,\gamma}(\partial G_\lambda);$$

$$Tr : W_p^1(G_\lambda) \implies L_r(\partial G_\lambda, \nu).$$

Вложения следов в пространства соболевского типа M_q^1 , определяемые гельдеровыми метриками, являются несколько непривычными, традиционно со следами соболевских функций связывают соответствующие пространства Бесова. Получить полное описание следов, оставаясь в рамках шкалы пространств M_p^1 , не удается, однако получаемые вложения оказываются вполне информативными и в некотором смысле точными. Построенный в работе [21] пример показывает, что, несмотря на некоторую экзотичность используемого метода, полученная в первом пункте теоремы 2.1 оценка на показатель суммируемости q является точной. Это означает, что и промежуточные оценки для теорем вложения, участвующих в цепочке, являются точными.

3. О непрерывности функций соболевского типа

Пусть G – область в евклидовом пространстве R^n . Функцию $f : G \rightarrow R$ называют n -абсолютно непрерывной, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства непересекающихся шаров $B_k = B(x_k, r_k) \subset G$ из условия

$$\sum_k r_k^n < \delta$$

следует:

$$\sum_k (\text{osc}_{B_k} f)^n < \varepsilon,$$

где символом $\text{osc}_{B_k} f$ обозначено колебание функции f на шаре B_k .

Согласно работе [40], всякая функция класса $W_{1,loc}^1(G)$, градиент которой принадлежит пространству Лоренца $L_{n,1}(G)$, эквивалентна некоторой n -абсолютно непрерывной функции. Это более тонкий результат по сравнению с классической теоремой о вложении соболевских классов функций $W_p^1(G)$ в пространство непрерывных функций при $p > n$. С одной стороны, условие n -абсолютной непрерывности сильнее, чем обычное условие непрерывности функции, с другой стороны, для произвольной ограниченной области $G \subset R^n$ и любого $p > n$ выполняется вложение $L_p(G) \subset L_{n,1}(G) \subset L_n(G)$. Из результатов работ [40,41] следует, что n -абсолютно непрерывное отображение $F : G \rightarrow R^n$ обладает N -свойством Лузина и является почти всюду дифференцируемым. Выполнение этих свойств часто оказывается полезным при изучении различных вопросов, связанных с заменой переменной.

Определение пространств M_p^1 легко модифицировать, заменяя принадлежность допустимых функций пространствам Лебега на принадлежность другим классам функций. Это позволяет ввести классы функций соболевского типа, связанные с пространствами Лоренца, полагая:

$$M_{s,1}^1(X) = \{f \in L_1(X) \mid D(f) \cap L_{s,1} \neq \emptyset\}.$$

Шкала пространств Лоренца включает в себя шкалу пространств Лебега и позволяет изучать более тонкие свойства функций. Введение в теорию пространств Лоренца можно найти в книге [23].

Вещественнозначную функцию f , определенную на метрическом пространстве (X, d) с борелевской мерой μ , будем называть s -абсолютно непрерывной, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого семейства непересекающихся шаров $B_k \subset X$ из условия

$$\sum_k \mu(B_k) < \delta$$

следует

$$\sum_k (\text{osc}_{B_k} f)^s < \varepsilon.$$

Заметим, что в евклидовом случае показатель абсолютной непрерывности и размерность пространства совпадают. Поэтому и в метрическом случае мы будем рассматривать пространства, строение которых в некотором смысле однородно с точки зрения меры.

Полное метрическое пространство (X, d) называют s -регулярным ($s > 1$), если существуют такие постоянные $0 < L_1 < L_2 < \infty$ и такая борелевская мера μ , что для всякого шара $B(x, r) \subset X$ при $r \leq \text{diam} X$ выполняется оценка:

$$L_1 r^s \leq \mu(B(x, r)) \leq L_2 r^s.$$

Полное метрическое пространство (X, d) будем называть локально s -регулярным, если всякий шар $B \subset X$ сам является s -регулярным метрическим пространством и постоянные L_1, L_2 в условии s -регулярности не зависят от выбора шара.

Приведем несколько примеров локально s -регулярных метрических пространств.

1. В евклидовом пространстве R^n шары и произвольные параллелепипеды являются локально n -регулярными метрическими пространствами относительно стандартной евклидовой метрики.

2. Пусть (X, d) – локально s -регулярное метрическое пространство и $0 < \gamma < 1$. На множестве X определим новую метрику, полагая $d_\gamma(x, y) = [d(x, y)]^\gamma$. Тогда метрическое пространство (X, d_γ) является локально s/γ -регулярным.

3. Несложно проверить, что локально s -регулярным будет всякое связное s -регулярное метрическое пространство, шары которого удовлетворяют условию Джона: существуют точка $x_0 \in B$ и постоянная $C > 0$, такие, что для всякой точки $x \in B$ найдется параметризованная длиной дуги кривая $\gamma : [0, l] \rightarrow B$, такая, что $\gamma(0) = x, \gamma(l) = x_0$ и

$$\text{dist}(\gamma(t), X \setminus B) \geq Ct.$$

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этого раздела.

Теорема 3.1. ([22]) Пусть (X, d) – локально s -регулярное метрическое пространство. Тогда для всякой функции $f \in M_{s,1}^1(X)$ существует эквивалентная ей s -абсолютно непрерывная функция.

В довольно общей ситуации, включающей в себя евклидов случай, удается получить прямое доказательство s -абсолютной непрерывности функций, у которых "метрический аналог градиента" принадлежит соответствующему пространству Лоренца. Используемая в метрическом случае техника доказательств основана на оценках приращения функции, являющихся следствием соответствующего неравенства Пуанкаре, и существенно отличается от методов, используемых в работе [40] для евклидова случая.

4. Отображения соболевского типа на метрических пространствах

В евклидовом случае, говоря о соболевском отображении $\varphi : G \rightarrow R^m$, обычно предполагают, что у отображения все координатные функции φ_i принадлежат некоторому пространству Соболева $W_p^l(G)$. С одной стороны, класс соболевских отображений оказывается весьма широким, он включает в себя диффеоморфизмы, квазиконформные отображения, квазиизометрические отображения, липшицевы отображения и другие классы отображений более общего вида. С другой сторо-

ны, принадлежность отображения определенному пространству Соболева позволяет сразу получить некоторую дополнительную информацию о свойствах отображения, являющуюся, к примеру, следствием соответствующих теорем вложения.

В метрическом случае определение отображений соболевского типа, действующих из одного метрического пространства в другое метрическое пространство, естественным образом должно отличаться от евклидова определения, поскольку в данном случае у отображения нет координатных функций. Возможны альтернативные подходы, позволяющие найти выход из этой ситуации.

Используя изометрическое вложение I метрического пространства (Y, ρ) , имеющего конечный диаметр, в пространство ограниченных функций $L_\infty(Y)$, наряду с отображением $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ можно рассмотреть и отображение $\Phi = I \circ \varphi : (X, d) \rightarrow L_\infty(Y)$, область значений которого принадлежит уже банахову пространству. По определению полагается, что отображение φ принадлежит классу $F(X, Y)$, если отображение Φ принадлежит классу $F(X, L_\infty(Y))$. Такой подход, используемый, к примеру, в работах [35,39], предполагает доказательство независимости используемых определений от выбора изометрического вложения $I : (Y, \rho) \rightarrow L_\infty(Y)$.

Мы же воспользуемся определением, основанным на модификации предложенного Ю. Г. Решетняком весьма универсального подхода к определению соболевских функций с областью определения в евклидовом пространстве и областью значений в метрическом пространстве [13,14,15].

Будем говорить, что отображение $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ принадлежит классу $M_p^1(X, Y)$, если:

1) для всякого $y \in Y$ функция $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$ принадлежит функциональному пространству $M_p^1(X, d, \mu)$;

2) $\|\varphi_y\|_{S_p^1} \leq K < \infty$ при всех $y \in Y$.

Для отображений классов $M_p^1(X, Y)$ можно доказать утверждения аналогичные теоремам вложения, выполняющимся для функциональных классов $M_p^1(X, d, \mu)$.

Рассмотрим метрические пространства $(X, d), (Y, \rho)$ и конечную борелевскую меру μ с носителем в множестве X . Как и в работе [13], принадлежность отображения $\varphi : X \rightarrow Y$ лебеговскому классу $L_p(X, Y)$ определим условием: функции $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$ принадлежат пространству Лебега $L_p(X, \mu)$ при всех $y \in Y$. Из неравенства

$$|\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x)| \leq \rho(y_1, y_2)$$

и конечности меры следует, что отображение φ принадлежит классу $L_p(X, Y)$, если хотя бы для одного $y \in Y$ функция $\varphi_y \in L_p(X, \mu)$. Пусть φ и ψ – произвольные отображения класса $L_p(X, Y)$. Поскольку

$$\rho(\varphi(x), \psi(x)) \leq \rho(\varphi(x), y) + \rho(\psi(x), y) = \varphi_y(x) + \psi_y(x),$$

то функция $\rho(\varphi(x), \psi(x))$ принадлежит пространству Лебега $L_p(X, \mu)$. Несложно проверить, что функция

$$\rho_{L_p}(\varphi, \psi) = \left(\int_X [\rho(\varphi(x), \psi(x))]^p d\mu \right)^{1/p}$$

является метрикой на множестве отображений класса $L_p(X, Y)$ [13].

Теорема 4.1. Пусть мера μ является s -регулярной и $1 < p < s$. Тогда для любого $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-p}$ имеет место включение

$$M_p^1(X, Y) \subset L_q(X, Y).$$

При этом для всякого отображения $\varphi \in M_p^1(X, Y)$ и произвольной точки $y \in Y$ выполняется оценка:

$$\|\varphi_y \mid L_q(X, \mu)\| \leq C \|\varphi_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\|.$$

Доказательство этого утверждения является непосредственным следствием определения класса $M_p^1(X, Y)$ и первого пункта теоремы 1.1.1.

При дополнительных предположениях о структуре метрических пространств и свойствах меры можно получить аналоги и других теорем вложения.

Теорема 4.2. Рассмотрим полное локально s -регулярное метрическое пространство (X, d) и полное локально-компактное сепарабельное метрическое пространство (Y, ρ) . Тогда при $p > s$ для всякого отображения $\varphi : X \rightarrow Y$ класса $M_p^1(X, Y)$ существует эквивалентное ему непрерывное отображение $\varphi^* : X \rightarrow Y$, такое, что для колебания отображения на произвольном шаре $B = B(a, r) \subset X$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} osc_B \varphi^* &= \sup_{x, t \in B} \rho(\varphi(x), \varphi(t)) \leq \\ &\leq C r^{1-s/p} \sup_{y \in Y} \|\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)\|. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Поскольку пространство (X, d) является s -регулярным, то для меры всякого шара $B_r = B(a, r) \subset X$ выполняется двухсторонняя оценка $L_1 r^s \leq \mu(B(a, r)) \leq L_2 r^s$. Это позволяет нам воспользоваться результатами первого раздела статьи.

Пусть P – счетное всюду плотное множество в Y . Для всякого $y \in Y$ функция φ_y принадлежит пространству $M_p^1(X, d, \mu)$. Согласно третьему пункту теоремы 1.1.1, для почти всех точек произвольного шара $B_r \subset X$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} |\varphi_y(x_1) - \varphi_y(x_2)| &\leq C r^{1-s/p} \|\varphi_y \mid S_p^1(B_r, d, \mu)\| \leq \\ &\leq C r^{1-s/p} \|\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)\|. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Равномерно непрерывная на всюду плотном множестве функция φ_y может быть продолжена до непрерывной функции φ_y^* , определенной на всем множестве X и совпадающей с φ_y почти всюду. Дословное повторение доказательства теоремы 6.2 работы [13] позволяет по функциям φ_y^* построить искомое непрерывное отображение $\varphi^* : X \rightarrow Y$ и, используя неравенство (4.2), получить оценку (4.1).

5. Отображения, сохраняющие при замене переменной функциональные пространства соболевского типа

Одним из методов изучения вопросов, связанных с различными дифференциальными соотношениями, является перенос задачи из исходной области в некоторую каноническую область при помощи замены переменной, сохраняющей дифференциальные свойства функций. В евклидовом случае дополнительный интерес к отображениям $\varphi : G \rightarrow G'$ ($G, G' \subset R^n$), индуцирующим по правилу замены переменной $\varphi^* f = f \circ \varphi$ изоморфизм пространств Соболева $\varphi^* : L_p^1(G') \rightarrow L_p^1(G)$, объясняется тем, что при $p = n$ класс таких замен переменной совпадает с классом квазиконформных гомеоморфизмов, а при $p \neq n$ – с классом квазиизометрий [6,9].

Рассмотрение на метрических пространствах аналогичного вопроса о заменах переменной, сохраняющих функциональные пространства соболевского типа, имеет свою специфику. Определение пространства Соболева $W_p^1(G)$ жестко связано с евклидовой метрикой и мерой Лебега, а функциональные классы соболевского типа M_p^1 могут быть определены на произвольном метрическом пространстве, снабженном борелевской мерой.

Рассмотрим произвольное метрическое пространство (X, d) с мерой μ и произвольное взаимно однозначное отображение $\varphi : X \rightarrow Y$. На множестве Y можно ввести метрику и меру, полагая $\rho(y_1, y_2) = d(\varphi^{-1}(y_1), \varphi^{-1}(y_2))$ и $\nu(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))$. Вполне очевидно, что при таких условиях отображение φ является изометрией метрических пространств (X, d) и (Y, ρ) , сохраняющей меру множества, и индуцирует при замене переменной изоморфизм функциональных пространств

$$\varphi^* : M_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow M_p^1(X, d, \mu).$$

В частности, мы можем применить это рассуждение к отображению $\varphi : X \rightarrow E \subset X$, где E – произвольное подмножество множества X . При этом, в отличие от евклидова случая, на множестве E оказываются заданы две различные метрики, для которых, вообще говоря, значения $d(a, b)$ и $\rho(a, b)$ никак не связаны между собой.

Изучение различных вопросов, связанных с заменами переменной для пространств соболевского

типа на метрических пространствах, в настоящий момент находится в начальной стадии и представляет широкий простор для исследований, как с точки зрения постановки задач, так и с точки зрения разработки новых методов, применимых в метрическом случае, и нахождения приложений получаемых результатов.

Отметим, что используемое в предыдущем разделе определение отображений соболевского типа хорошо согласуется заменой переменной в том смысле, что отображение, сохраняющее при замене переменной некоторый класс функций соболевского типа, само принадлежит классу того же типа. Рассмотрим метрические пространства (X, d) , (Y, ρ) и конечные борелевские меры μ с носителем в множестве X и ν с носителем в множестве Y . Предположим, что отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ индуцирует при замене переменной ограниченный оператор

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu). \quad (5.1)$$

Несложно видеть, что при любом $y \in Y$ функция $f_y(t) = \rho(t, y)$ принадлежит пространству $S_p^1(Y, \rho, \nu)$. Поскольку

$$\begin{aligned} |f_y(t_1) - f_y(t_2)| &= |\rho(t_1, y) - \rho(t_2, y)| \leq \\ &\leq \rho(t_1, t_2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

то $\|f_y | S_p^1\| \leq \frac{1}{2} [\nu(Y)]^{1/p}$. Из условия (5.1) следует, что функция $\varphi^* f_y$ принадлежит пространству $S_p^1(X, d, \mu)$ и $\|\varphi^* f_y | S_p^1\| \leq C_0 < \infty$. Поскольку

$$\varphi^* f_y(x) = \rho(\varphi(x), y) = \varphi_y(x),$$

то непосредственно из определения следует принадлежность отображения φ классу $M_p^1(X, Y)$.

Далее рассмотрим вопрос о замене переменной для пространств S_p^1 на s -регулярных метрических пространствах.

Пусть метрические пространства (X, d) и (Y, ρ) являются s -регулярными, а отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ квазиизометрией, т. е.

$$C_1 d(x_1, x_2) \leq \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq C_2 d(x_1, x_2).$$

Если функция $f \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$ и допускает оценку

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leq \rho(y_1, y_2)(g(y_1) + g(y_2)),$$

то для функции $h(x) = f(\varphi(x))$ выполняется оценка:

$$\begin{aligned} |h(x_1) - h(x_2)| &= |f(y_1) - f(y_2)| \leq \\ &\leq \rho(y_1, y_2)(g(y_1) + g(y_2)) \leq \\ &\leq C_2 d(x_1, x_2)(g(\varphi(x_1)) + g(\varphi(x_2))). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $\omega = C_2(g \circ \varphi)$ является допустимой для функции $h = \varphi^* f$.

Поскольку отображение φ является квазиизометрией, то образ шара $B(x, r) \subset X$ содержится в шаре $B(\varphi(x), C_2 r) \subset Y$ и содержит внутри себя шар $B(\varphi(x), C_1 r) \subset Y$. Поскольку оба метрических пространства являются s -регулярными, то существуют такие постоянные $0 < K_1 \leq K_2 < \infty$, что для всякого шара $B(x, r) \subset X$ выполняется оценка:

$$K_1 \mu(B(x, r)) \leq \nu(\varphi(B(x, r))) \leq K_2 \mu(B(x, r)).$$

Эта оценка стандартным образом распространяется на все измеримые множества, и, следовательно, для всякого измеримого множества $E \subset X$ получаем:

$$K_1 \mu(E) \leq \nu(\varphi(E)) \leq K_2 \mu(E).$$

Это, в свою очередь позволяет получить оценку для интегралов

$$K_3 \int_X \omega^p d\mu \leq \int_Y g^p d\nu \leq K_4 \int_X \omega^p d\mu,$$

которая очевидна для простых функций, а следовательно, выполняется и для всех функций $g \in L_p(Y, \nu)$.

Следствием оценки для допустимых функций является оценка для норм:

$$\|\varphi^* f | S_p^1(X, d, \mu)\| \leq C_0 \|f | S_p^1(Y, \rho, \nu)\|.$$

Поскольку для квазиизометрии выполняются двухсторонние оценки, то отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ при всех $1 \leq p < \infty$ индуцирует по правилу замены переменной изоморфизм

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu).$$

В отличие от достаточности доказательство необходимости требования квазиизометричности замен переменной, сохраняющих пространства S_p^1 при $p \neq s$, как и в евклидовом случае, требует значительно больших усилий. В этой статье мы ограничимся рассмотрением более простого случая $p > s > 1$.

Предположим, что метрические пространства (X, d) и (Y, ρ) являются локально s -регулярными, а отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ по правилу замены переменной индуцирует изоморфизм

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu).$$

Как уже было отмечено, при этих условиях отображение φ является отображением соболевского типа и принадлежит классу $M_p^1(X, Y)$. Поскольку $p > s$, то, согласно теореме 4.2, мы можем изначально считать, что отображение φ является непрерывным. Используя теорему 4.2 в частном случае, когда метрическое пространство (Y, ρ) является действительной прямой R , мы видим, что при $p > s$ класс эквивалентности произвольной функции $f \in M_p^1(X, d, \mu)$ содержит непрерывную функцию, однозначно определенную во всех

точках множества X . В первом разделе было отмечено, что функциональные классы $M_p^1(X, d, \mu)$ и $S_p^1(X, d, \mu)$ совпадают как множества функций, поэтому будем считать, что функции пространства $S_p^1(X, d, \mu)$ всюду определены и непрерывны. Непосредственно из неравенства (4.1) получается следующая оценка для нормы функций пространства $S_p^1(X, d, \mu)$.

Лемма 5.1. *Рассмотрим локально s -регулярное пространство (X, d) . Пусть $p > s$, $x_1, x_2 \in X$, $f \in S_p^1(X, d, \mu)$ и $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 1$. Тогда*

$$\|f\|_{S_p^1(X, d, \mu)} \geq C_1 [d(x_1, x_2)]^{s/p-1}. \quad (5.2)$$

Теперь нам нужно получить оценку сверху для нормы пробной функции специального вида. Пусть $a \in Y$, $0 < r < \text{diam } Y$. Рассмотрим функцию:

$$h_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{r^\gamma - \rho^\gamma(a, y)}{r^\gamma}, & \text{если } \rho(a, y) \leq r \\ 0, & \text{если } \rho(a, y) > r, \end{cases}$$

где $\gamma = \frac{p-s}{p-1}$. В рассматриваемой ситуации $0 < \gamma < 1$, $h_{a,r}(a) = 1$ и $h_{a,r}(y) \equiv 0$ вне шара $B(a, r)$. Покажем, что функция $h_{a,r}$ принадлежит пространству $S_p^1(Y, \rho, \nu)$ и найдем оценку для ее нормы. Пусть точки $y_1, y_2 \in B(a, r)$ и $\rho(a, y_1) \leq \rho(a, y_2)$. Используя теорему Лагранжа о конечном приращении, получаем:

$$\begin{aligned} |h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| &= \frac{|\rho^\gamma(a, y_1) - \rho^\gamma(a, y_2)|}{r^\gamma} = \\ &= \frac{|\rho(a, y_1) - \rho(a, y_2)|}{r^\gamma} \gamma t^{\gamma-1}, \end{aligned}$$

где $t \in [\rho(a, y_1), \rho(a, y_2)]$. Поскольку $\gamma < 1$, то $t^{\gamma-1} \leq \rho^{\gamma-1}(a, y_1)$. Положим:

$$g(y) = \begin{cases} \frac{\rho^{\gamma-1}(a, y)}{r^\gamma}, & \text{если } \rho(a, y) \leq r \\ 0, & \text{если } \rho(a, y) > r. \end{cases}$$

Учитывая неравенство треугольника для метрики, получаем, что для всех $y_1, y_2 \in Y$ будет выполняться оценка:

$$|h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| \leq \gamma \rho(y_1, y_2)(g(y_1) + g(y_2)),$$

т. е. функция $\gamma \cdot g$ будет допустимой.

Остается оценить норму функции g . Отметим, что $1/r \leq g(y) \leq \infty$ при $y \in B(a, r)$. Для оценки нормы воспользуемся интегрированием по множествам уровня:

$$I = \int_Y g^p d\nu = \int_{B(a,r)} g^p d\nu = \int_{1/r^p}^{\infty} \nu(\{g^p > t\}) dt. \quad (5.3)$$

Учитывая s -регулярность меры ν , получаем:

$$\nu(\{g^p > t\}) \leq C t^{\frac{s}{p(\gamma-1)}} r^{\frac{s\gamma}{\gamma-1}}.$$

Подставляя эту степенную оценку в (5.3), получаем $\|g\|_{L_p(Y, \nu)}^p \leq \tilde{C} \cdot r^{s-p}$ и, следовательно,

$$\|h_{a,r}\|_{S_p^1(Y, \rho, \nu)} \leq C_2 r^{s/p-1}. \quad (5.4)$$

Теперь мы можем найти оценку искажения расстояний отображением φ . Пусть $x_1, x_2 \in X$, $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, $r = \rho(y_1, y_2)$. Рассмотрим функцию $h_{y_1,r} \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$ и функцию $f = \varphi^* h_{y_1,r}$, для которой $f(x_1) - f(x_2) = 1$. Учитывая, что для функции $h_{y_1,r}$ выполняется оценка (5.4), а для функции f оценка (5.2), получаем:

$$\begin{aligned} C_1 [d(x_1, x_2)]^{s/p-1} &\leq \|f\|_{S_p^1(X, d, \mu)} \leq \\ &\leq \|\varphi^*\| \cdot \|h_{a,r}\|_{S_p^1(Y, \rho, \nu)} \leq C_2 \|\varphi^*\| \cdot r^{s/p-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $s/p - 1 < 0$, то из предыдущего неравенства следует, что

$$|\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))| \leq L d(x_1, x_2).$$

Оператор φ^* является изоморфизмом, поэтому, применяя аналогичные рассуждения к обратному оператору, получим оценку:

$$L^{-1} d(x_1, x_2) \leq \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)).$$

В результате получаем следующее утверждение о замене переменной для функций соболевского типа на локально s -регулярных метрических пространствах:

для того, чтобы отображение $\varphi : X \rightarrow Y$ индуцировало по правилу замены переменной при $p > s$ изоморфизм пространств соболевского типа

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu)$$

необходимо и достаточно, чтобы φ было квази-изометрией.

Рассмотрение необходимых условий при $p < s$ и описание замен переменной при $p = n$ основывается на иных технических приемах и требует отдельного изучения.

Литература

- [1] Бесов, О. В. *Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей* / О. В. Бесов // Докл. РАН. – 2000. – Т. 373, №. 2. – С. 151 – 154.
- [2] Бесов, О. В. *Теорема вложения Соболева для области с нерегулярной границей* / О. В. Бесов // Мат. сб. – 2001. – Т. 192, №. 3. – С. 3 – 26.
- [3] Бесов, О. В. *О компактности вложений весовых пространств Соболева на области с нерегулярной границей* / О. В. Бесов // Труды МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 72 – 93.
- [4] Бесов, О. В. *Вложения пространств дифференцируемых функций переменной гладкости* /

- О. В. Бесов // Труды МИАН. – 1997. – Т. 214. – С. 25 – 58.
- [5] Васильчик, М. Ю. *О разрешимости третьей краевой задачи для области с пиком* / М. Ю. Васильчик, В. М. Гольдштейн // Мат. заметки. – 2005. – Т.78, №. 3. – С. 466 – 468.
- [6] Водопоьянов, С. К. *Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения* / С. К. Водопоьянов, В. М. Гольдштейн // Сиб. мат. журн. – 1975. – Т. 16, №. 2. – С. 224 – 246.
- [7] Вольберг, А. Л. *На любом компакте в R^n существует однородная мера* / А. Л. Вольберг, С. В. Конягин // ДАН СССР. – 1984. – Т.278, №4. – С.783 – 785.
- [8] Вольберг, А. Л. *О мерах с условием удвоения* / А. Л. Вольберг, С. В. Конягин // Изв. Акад. наук СССР. – 1987. – Т.51, №3. – С. 666 – 676.
- [9] Гольдштейн, В. М. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения* / В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк. – М.: Наука, 1983. – 284 с.
- [10] Лабутин, Д. А. *Интегральное представление функций и вложение пространства Соболева на областях с нулевыми углами* / Д. А. Лабутин // Мат. заметки. – Т. 61, №2. – С. 201 – 219.
- [11] Лабутин, Д. А. *Неулучшаемость неравенства Соболева для класса нерегулярных областей* / Д. А. Лабутин // Труды МИАН. – 2001. – Т. 232. – С. 218 – 222.
- [12] Мазья, В. Г. *Пространства С. Л. Соболева* / В. Г. Мазья – Л.: ЛГУ, 1985. – 416 с.
- [13] Решетняк, Ю. Г. *Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве* / Ю. Г. Решетняк // Сиб. мат. журн. – 1997. – Т.38, №3. – С.657 – 675.
- [14] Решетняк, Ю. Г. *Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве, II* / Ю. Г. Решетняк // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 855 – 870.
- [15] Решетняк, Ю. Г. *К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве* / Ю. Г. Решетняк // Сиб. мат. журн. – 2006. – Т. 47, № 1.– С. 146 – 168.
- [16] Романов, А. С. *Об одном обобщении пространств Соболева* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, № 4. – С. 949 – 953.
- [17] Романов, А. С. *О теоремах вложения для обобщенных пространств Соболева* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 1999. – Т. 40, № 4. – С. 931 – 937.
- [18] Романов, А. С. *Теоремы вложения для одного класса функций соболевского типа на метрических пространствах* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 2. – С. 452 – 465.
- [19] Романов, А. С. *О вложениях классов функций с обобщенной гладкостью на метрических пространствах* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45, № 4. – С. 871 – 880.
- [20] Романов, А. С. *О следах соболевских функций на границе пика с гельдеровской особенностью* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 1. С. 176 – 184.
- [21] Романов, А. С. *О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа* / А. С. Романов // Сиб. мат. журн. – 2007. – Т. 48, № 4. – С. 848 – 866.
- [22] Романов, А. С. *О непрерывности функций соболевского типа на метрических пространствах* / А. С. Романов // Доклады РАН. – 2008. – Т. 418, № 5. – С. 599 – 602.
- [23] Стейн, И. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах* / И. Стейн, Г. ВейсГ. – М.: Мир, 1974. – 332 с.
- [24] Bojarski, V. *Remarks on some geometric properties of Sobolev mappings* / V. Bojarski // Functional Analysis and Related Topics, ed. Shozo Koshi, World Scientific.–1991.
- [25] Bojarski, V. *Pointwise inequalities for Sobolev functions and some applications* / V. Bojarski, P. Hajlasz // Studia Math. – 1993. – V. 106, № 1. P.77 – 92.
- [26] Edmunds, D. E. *Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings* / D. E. Edmunds, W. D. Evans – New York.: Springer, 2004. – 326 p.
- [27] Gol'dshtein, V. M. *Axiomatic Theory of Sobolev Spaces* / V. M. Gol'dshtein, M. Troyanov // Expo. Math. – 2001. – V. 19, № 4. – P. 289 – 336.
- [28] Franchi, B. *Definitions of Sobolev classes on metric spaces* / B. Franchi, P. Hajlasz, P. Koskela // Ann. Inst. Fourier. – 1999. – V. 49, № 6. – P. 1903 – 1924.
- [29] Hajlasz, P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces* / P. Hajlasz // Potential Analysis. – 1996. – V. 5, №. 4. – P. 403 – 415.
- [30] Hajlasz, P. *Sobolev spaces on metric-measure spaces* / P. Hajlasz // Contemporary Math. – 2003. – V. 338. – P. 173 – 218.
- [31] Hajlasz, P. *A new characterization of the Sobolev space* / P. Hajlasz // Studia Math. – 2003. – V. 159. – P. 263 – 275.
- [32] Hajlasz, P. *Hölder quasicontinuity of Sobolev functions* / P. Hajlasz, J. Kinnunen // Rev. Mat. Iberoamericana. – 1998. – V. 14, № 3. – P. 601 – 622.
- [33] Hajlasz, P. *Sobolev Met Poincare* / P. Hajlasz, P. Koskela // Memoirs AMS. – 2000. – V. 145, № 688. – 101 p.
- [34] Hajlasz, P. *Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains* / P. Hajlasz, O. Martio // J. Funct. Anal. – 1997. – V. 143. – P. 221 – 246.
- [35] Hajlasz, P. *Density of Lipschitz mappings in the class of Sobolev mappings between metric spaces* / P. Hajlasz // Math. Ann. – 2009. – V. 343. – P. 801 – 823.
- [36] Heinonen, J. *Lectures on analysis on metric spaces* / J. Heinonen. – Berlin: Springer-Verlag, 2001. – 151 p.

[37] Heinonen, J. *Quasiconformal maps on metric spaces with controlled geometry* / J. Heinonen, P. Koskela // Acta Math. – 1998. – V. 181. P. 1 – 61.

[38] Heinonen, J. *A note on Lipschitz functions, upper gradients and the Poincaré inequality* / J. Heinonen, P. Koskela // New Zealand J. Math. – 1999. – V. 28. – P. 37 – 42.

[39] Heinonen, J. *Sobolev classes of Banach space-valued functions and quasiconformal mappings* / J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam, J. Tyson // J. D'Analyse Math. – 2001. – V. 85. – P. 87 – 139.

[40] Kauhanen, J. *On function with derivatives in*

a Lorentz space / J. Kauhanen, P. Koskela, J. Maly // Manuscripta Math. – 1999. – V. 100, №. 1. P. 87 – 101.

[41] Maly, J. *Sufficient Conditions for Change of Variables in Integral* / J. Maly // Труды по анализу и геометрии. – Изд. ИМ СО РАН. – 2000. – С. 370 – 386.

[42] Stromberg, J. O. *Weighted Hardy Spaces* / J. O. Stromberg, A. Torchinsky // Lecture Notes in Math. – Berlin: Springer, №.1381. – 1989. – 193 p.

[43] Vodopyanov, S. K. *Foundations of the Theory of Mappings with Bounded Distortion on Carnot Groups* / S. K. Vodopyanov // Contemporary Mathematics. – 2007. – V. 424. – P. 303 – 344.

УДК 519.63

ОБ АСИМПТОТИКЕ В ЦЕЛОМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ СИНГУЛЯРНО ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ МАЛОГО ПАРАМЕТРА ДЛЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В. А. Шалаунов

ON ASYMPTOTIC AS A WHOLE SINGULAR PERTURBATION DIRICHLET'S PROBLEMS FOR BICONNECTED DOMAIN

V. A. Shalaunov

Для решения сингулярно возмущённой задачи Дирихле, имеющего экспоненциально малый характер, с помощью функций типа пограничного слоя строится формальное асимптотическое разложение в целом. Приводится явное выражение первых членов разложения.

For exponential small solution singular perturbation Dirichlet's problem global formal asymptotic expansion are constructed by means of function of boundary layer type

Ключевые слова: регулярная часть асимптотики, функции типа пограничного слоя.

Keywords: regular part asymptotic, function of boundary layer type.

Пусть G – ограниченная область в R^n с двусвязной гладкой границей $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. На $\bar{G} = G \cup \partial G$ рассмотрим краевую задачу:

$$\begin{cases} L^\varepsilon[y] \equiv \varepsilon y + (B(x), \nabla y) + C(x)y = f(x), \\ y|_{\Gamma_1} = \phi(x), \quad y|_{\Gamma_2} = \psi(x), \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \end{cases} \quad (1)$$

Предположим, что функции, входящие в (1), достаточно гладкие так, что существует единственное классическое решение и выполнено следующее основное предположение:

(А) Характеристики оператора $\frac{dx}{dt} = B(x)$, $x(0) = \bar{x}_0 \in G$ выходят на Γ_1 за конечное время, не покидая при этом области G , причём $(B(x), n(x)) > 0$ на Γ_1 , $(B(x), n(x)) < 0$ на Γ_2 , где $n = n(x)$ вектор внешней нормали к области G (в дальнейшем эти характеристики выходят на Γ_1 не особым образом).

При построении равномерного асимптотического разложения решения этой задачи методом пограничных функций вначале строится так называемое внешнее разложение (регулярная часть асимптотики) в виде формального ряда

$$R = R(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x),$$

при этом задачи Коши, определяющие однозначно функции $y_i(x)$, получают подстановкой ряда $R = R(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$

в уравнение с последующей группировкой слагаемых с одинаковыми степенями параметра ε и последующим сравнением правых и левых частей уравнения. Если выполнено условие (А), то регулярный ряд $R = R(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i y_i(x)$ асимптотически удовлетворяет уравнению (1) и реализует граничное условие на границе Γ_1 , в том смысле, что функции $\{y_i(x)\}$ $i = 1, 2, \dots$ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{cases} L^0[y_0] \equiv (B(x), \nabla y_0) + C(x)y_0 = f(x), \\ y_0|_{\Gamma_1} = \phi(x), \\ L^0[y_k] \equiv (B(x), \nabla y_k) + C(x)y_k = -\Delta y_{k-1}, \\ y_k|_{\Gamma_1} = 0, \\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (2)$$

Сингулярная часть разложения (пограничный слой), компенсирующая невязку в гранич-