УДК 517.518.34 + 517.537.3

О НАХОЖДЕНИИ ГРАНИЦ РИССА СПЛАЙН-БАЗИСА С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Е. В. Мищенко

DETERMINATION OF RIESZ BOUNDS FOR SPLINE BASIS WITH THE USE OF TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

E. V. Mishchenko

При нахождении верхней и нижней границы Рисса для B-сплайна произвольного порядка m мы приходим к необходимости анализа функциональных рядов вида $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$. *Показано, что сумма указанного ряда представляет собой отношение тригонометрических полиномов определенного вида. Доказаны свойства полиномов, с помощью которых устанавливаются границы Рисса. Одним из приложений полученных результатов являются формулы для нахождения сумм некоторых степенных рядов.*

The problem on determination of the upper and lower Riesz bounds for the m-th order B-spline basis is reduced to analysis of the series $\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$. *It is shown that the sum of the series is a ratio of certain trigonometric polynomials. Some properties of these polynomials which help to determine the Riesz bounds are established. The results of the work are applied in the theory of series to find sums of some power series which go back to L. Euler.*

Ключевые слова: B-сплайны, базис Рисса, верхняя и нижняя границы Рисса, тригонометрические полиномы, степенные ряды.

Keywords: B-splines, Riesz basis, upper and lower Riesz bounds, trigonometric polynomials, power series, Bernoulli and Euler numbers.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08-01- 00888), Федерального агентства по образованию и Министерства образования и науки РФ (регистрационный номер проекта 2.1.1/4591) и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН 2009-2011 (номер проекта 91).

1. Введение

Согласно определению (см., например, [1]), семейство функций $\{f_k(x),\ k\ \ 1,\ 2,\ ...\ \}$ образует базис Рисса (или безусловный базис) в некотором гильбертовом пространстве H, если

1) линейная оболочка $\{f_k(x), k = 1, 2, \dots\}$ является плотной в H;

2) существуют две константы $0 < \mathbf{A}, \mathbf{B} < \infty$, называемые соответственно нижней и верхней границей Рисса, такие, что для любой последовательности $\{c_k\} \in l_2$ почти всюду выполняются неравенства:

$$\mathbf{A} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \le || \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(.)||_H^2 \le \mathbf{B} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Второе свойство также называют условием Рисса.

Вопрос о базисе Рисса возникает, например, в теории вейвлетов при построении так называемого кратномасштабного анализа пространства Ł2, другими словами, цепочки вложенных друг в друг подпространств $\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$, удовлетворяющих некоторому набору требований. Одним из них является существование функции $\phi(x)$ из V_0, семейство сдвигов которой

$$\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbf{Z}\} \qquad (1)$$

образует базис Рисса в V_0. В соответствии с приведенным выше определением, необходимо установить два свойства рассматриваемого семейства (1):

1′) является ли линейная оболочка $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbf{Z}\}$ плотной в V_0;

2′) существуют ли две константы $0 < \mathbf{A}, \mathbf{B} < \infty$ (нижняя и верхняя границы Рисса), такие, что для любой последовательности $\{c_k\} \in l_2$ почти всюду верно:

$$\mathbf{A}\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le || \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(\cdot - k)||_{Ł2}^2 \le \mathbf{B}\cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

Известна теорема [2], устанавливающая эквивалентность между условием Рисса и свойствами преобразования Фурье функции ϕ в пространстве Ł2.

Теорема 1. *Для любой функции $\phi \in Ł2$ и констант $0 < A \le B < \infty$ следующие два утверждения эквивалентны:*
(i) множество $\{\phi(. - k), k \in \mathbf{Z}\}$ удовлетворяет условию Рисса с константами $2\pi A, 2\pi B$,
(ii) преобразование Фурье $\widehat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi} \phi(x) dx$ удовлетворяет неравенству

$$A \le \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi k)|^2 \le B \qquad (2)$$

почти всюду.

В настоящей работе мы установим свойство (ii) для семейства вида (1), в котором в качестве функции ϕ выступает B-сплайн порядка m. Как будет показано ниже, для преобразования Фурье $\widehat{B}_m$ сплайна порядка m верна следующая формула:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2 = \\ = \frac{\sin^{2(m+1)}(\xi/2+\pi k)}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\xi/2+\pi k)^{2(m+1)}}. \tag{1}$$

Таким образом, вопрос о нахождении верхней и нижней границ Рисса сплайн-базиса можно свести к нахождению равномерных оценок сверху и снизу на интервале сходимости для ряда вида $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}, m = 1, 2, \ldots$.

Исследуя свойства сплайн-базиса в [2], К. Чуи приводит формулу:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+\pi k)^{2m}} = -\frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-1}}{dx^{2m-1}} \operatorname{ctg} x.$$

Отмечая, что полученная формула – явная и служит инструментом для нахождения границ Рисса, К. Чуи [2, стр. 150] считает тем не менее ее слишком сложной в применении для больших значений m.

Между тем, в [3] замечено, что из известной формулы

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x}, \tag{3}$$

можно вывести более общие выражения

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)!} \frac{d^{2m-2}}{dx^{2m-2}} \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x},$$

$m = 1, 2, \ldots$, используя проверяемое непосредственной выкладкой утверждение, что для любой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ верно

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \Big(\frac{d^2}{dv^2} - \Big(v\frac{d}{dv}\Big)^2\Big) f, \tag{4}$$

где $v = \sin \pi x$. Используя это замечание и формулу (3), в следующем параграфе покажем, что для произвольного положительного целого m ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$ представляет собой отношение тригонометрических полиномов специального вида.

2. Получение представлений для ряда $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$

Теорема 2. *Для рядов вида* $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$, $m = 1, 2, \ldots$, *справедливы следующие представления:*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+1)}} = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2m+1)!} \frac{S_m(\sin^2 \pi x)}{\sin^{2m+2} \pi x}, \tag{5}$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2(m+1)}} = \frac{\pi^{2(m+1)}}{(2m+1)!} \frac{C_m(\cos^2 \pi x)}{(1-\cos^2 \pi x)^{m+1}}, \tag{6}$$

в которых функции S_m и C_m являются полиномами степени m, т. е.

$$S_m(x) = \sum_{k=0}^{m} s_k^m x^k \quad (7) \quad \text{и} \quad C_m(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k^m x^k, \quad (8),$$

а коэффициенты s_k^m и c_k^m в формулах (7), (8) находятся из рекуррентных соотношений, причем все c_k^m в формуле (8) являются положительными. Формулы для нахождения коэффициентов s_k^m имеют вид:

$$s_0^0 = 1, \quad s_0^{m+1} = s_0^m (2m+3)(2m+2) = (2m+3)!\,,$$
$$s_{m+1}^{m+1} = -4 s_m^m = (-4)^{m+1},$$

$$s_k^{m+1} = \\ = (2m+3-2k)(2m+2-2k) s_k^m - 4(m+2-k)^2 s_{k-1}^m, \tag{9}$$

если $0 < k < m+1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; коэффициенты c_k^m, $0 < k < m+1$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ находятся из следующих соотношений:

$$c_0^0 = 1, \quad c_0^{m+1} = 2c_1^m + 2(m+1) c_0^m,$$
$$c_{m+1}^{m+1} = 4 c_m^m = 4^{m+1},$$

$$c_k^{m+1} = (2k+2)(2k+1) c_{k+1}^m + \\ + \big(8k(m+1-k) + 2(m+1+k)\big) c_k^m + 4(m+2-k)^2 c_{k-1}^m, \tag{10}$$

в которых мы полагаем, что $c_k^m = 0$, если $m < k$ или $0 < k$.

Доказательство. Обозначим $\xi = \pi x$, $v = \sin \xi$, $w = \cos \xi$. По аналогии с (4) мы получаем, что для любой дважды дифференцируемой функции $f(x)$ верно

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \Big((1-v^2)\frac{d^2 f}{dv^2} - v\frac{df}{dv}\Big) \tag{11$'$}$$

и

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \pi^2 \Big((1-w^2)\frac{d^2 f}{dw^2} - w\frac{df}{dw}\Big). \tag{11$''$}$$

Из формулы (2) очевидно следует справедливость (9) и (10) для $m = 0$

$$S_0(v^2) = C_0(w^2) \equiv 1, \quad \text{т. е.} \quad s_0^0 = c_0^0 = 1.$$

Получим формулы (5),(7),(9). Пусть для некоторого m известно, что

$$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}=\pi^{2m}\frac{S_m(v^2)}{v^{2m+2}},$$

и функция S_m имеет вид (7).

Используя (11′) получаем, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2(m+2)}}=$$

$$=\frac{1}{(2(m+2)-1)!}\frac{d^{2(m+1)}}{dx^{2(m+1)}}\Big(\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}\Big)=$$

$$=\frac{1}{(2(m+2)-1)!}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\frac{\pi^2}{\sin^2\pi x}\Big)=$$

$$=\frac{\pi^{2m}}{(2(m+2)-1)!}\frac{d^2}{dx^2}\Big(\frac{\sum_{k=0}^m s_k^m v^{2k}}{v^{2(m+1)}}\Big)=$$

$$=\frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!}\Big((1-v^2)\frac{d^2}{dv^2}-v\frac{d}{dv}\Big)\frac{\sum_{k=0}^m s_k^m v^{2k}}{v^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!v^{2(m+2)}}\Big((2m+2)(2m+3)s_0^m+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}s_k^m v^{2k}(2m+3-2k)(2m+2-2k)-$$

$$-\sum_{k=0}^{m}s_k^m v^{2k+2}(2m+2-2k)^2\Big)=$$

$$=\frac{\pi^{2(m+1)}}{(2(m+2)-1)!}\frac{\sum_{k=0}^{m+1}s_k^{m+1}v^{2k}}{v^{2(m+2)}},$$

причем

$$s_0^{m+1}=s_0^m(2m+3)(2m+2),$$

$$s_k^{m+1}=s_k^m(2m+3-2k)(2m+2-2k)-s_{k-1}^m 4(m+2-k)^2,$$

$$s_{m+1}^{m+1}=-4s_m^m.$$

Формулы (5), (7), (9) доказаны.

Аналогично, применяя (11″), получаем формулы (6), (8), (10). Положительность коэффициентов c_k^m в формуле (8) непосредственно следует из вида (10).

Функции C_m и S_m обладают рядом свойств, которые мы сформулируем в следующем утверждении.

Утверждение 1. *Функции $C_m(\cos^2\xi)$ и $S_m(\sin^2\xi)$, как функции от ξ, обладают следующими свойствами (см. рис. 1):*

1. C_m и S_m определены на всей оси $\mathbf{R}$ и принимают только положительные значения.

2. C_m и S_m – π-периодические функции, симметричные относительно $\xi=0$.

3. Экстремумы C_m и S_m расположены в точках $\xi=k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$; максимумы расположены в точках $\xi=k\pi$, минимумы – в точках $\xi=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$.

4. При этом $\frac{C_m(\cos^2 k\pi)}{(2m+1)!}=\frac{S_m(\sin^2 k\pi)}{(2m+1)!}=1$, а значения $\frac{C_m(\cos^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}=\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}$ стремятся к нулю при $m\to\infty$.

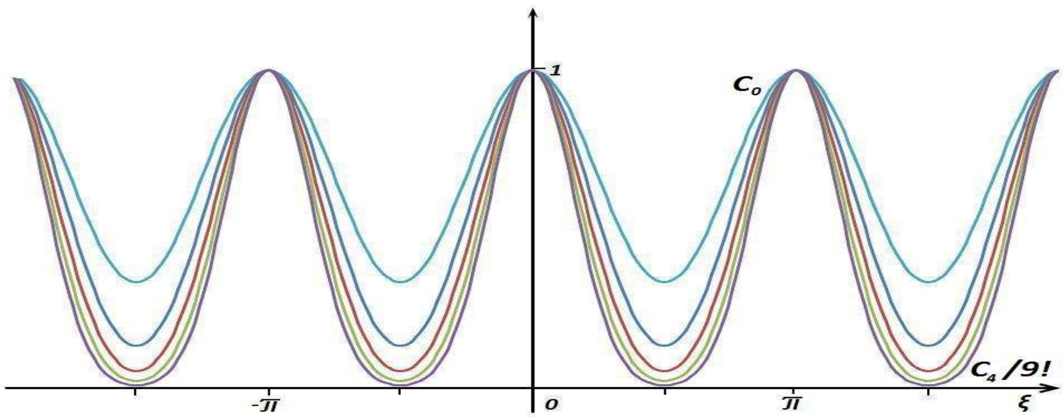

Рис. 1. Функции $\frac{C_m(\cos^2\xi)}{(2m+1)!}$, $m=1,2,3,4$

Доказательство. Из теоремы 2 мы получаем, что $C_m(\cos^2\xi)=S_m(\sin^2\xi)$.

Положительность функций $C_m(\cos^2\xi)$ и $S_m(\sin^2\xi)$ следует из вида функции $C_m(\cos^2\xi)$ и замечания, что для любых m и k, таких, что $m=1,2,\dots$, и $0\le k\le m$, коэффициенты c_k^m – положительные.

Свойство 2 очевидным образом следует из свойств sin и cos:

$$C_m(\cos^2(\xi+\pi))=C_m(\cos^2\xi)=C_m(\cos^2(-\xi)),$$

$$S_m(\sin^2(\xi+\pi))=S_m(\sin^2\xi)=S_m(\sin^2(-\xi)).$$

Экстремумы функции находим, анализируя значения их первых производных по ξ, при этом, учитывая свойство периодичности 2, достаточно рассмотреть отрезок $[0,\pi]$:

$$\frac{d}{d\xi}C_m(\cos^2\xi) =$$

$$= -\Big[\sum_{k=0}^{m-1} 2(k+1)\ c_{k+1}^m \cos^{2k}\xi\Big]\cos\xi\sin\xi = 0.$$

В силу положительности коэффициентов c_{k+1}^m, выражение $\sum\limits_{k=0}^{m-1} 2(k+1)\ c_{k+1}^m \cos^{2k}\xi > 0$ для любого $\xi \in [0,\pi]$. Следовательно, первые производные исследуемых функций обращаются в ноль в тех точках, где $\cos\xi = 0$ либо $\sin\xi = 0$. При этом $\frac{d}{d\xi}C_m(\cos^2\xi)<0$, если $\xi \in (0,\frac{\pi}{2})$, $\frac{d}{d\xi}C_m(\cos^2\xi)>0$, если $\xi \in (\frac{\pi}{2},\pi)$. Свойство 3 доказано.

Для доказательства свойства 4 заметим, что в точках максимумов

$$C_m(\cos^2 k\pi) = S_m(\sin^2 k\pi) = s_0^m = (2m+1)!$$

Найдем значения в точках минимумов. Рассмотрим $\xi = \frac{\pi}{2}$. В силу (5):

$$\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} = 2\Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{2(m+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}}.$$

Из того, что $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2m}}$ для любого целого $m \geq 1$, а последовательность $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m}$ стремится к 0 при $m \to \infty$, следует, что $\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!} > \frac{S_{m+1}(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+3)!}$ и числовая последовательность $\frac{S_m(\sin^2\frac{\pi}{2})}{(2m+1)!}$ стремится к нулю при $m \to \infty$. Все свойства доказаны.

Имея рекуррентные формулы (9), (10), мы можем находить полиномы S_m и C_m любого порядка. Для примера в таблицах 1 и 2 помещены значения коэффициентов c_k^m, s_k^m для значений $m = 0,1,2,3,5$.

Таблица 1

Значения c_k^m

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	4				
2	16	88	16			
3	272	2880	1824	64		
4	7936	137216	185856	31616	256	
5	353792	9061376	21253376	8728576	518656	1024

Таблица 2

Значения s_k^m

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	6	-4				
2	120	-120	16			
3	5040	-6720	2016	-64		
4	362880	-604800	282240	-32640	256	
5	39916800	-79833600	50561280	-10813440	523776	-1024

3. Определение верхней и нижней границ Рисса для сплайн-базиса

Напомним определение B-сплайна. Функция B_m, B-сплайн порядка m определяется рекуррентно: $B_0(x) = \chi_{[0,1)}$, где $\chi_{[0,1)}$ –характеристическая функция отрезка [0,1):

$$B_m(x)=B_{m-1}(x)*B_0(x)=\int\limits_{\mathbf{R}} B_{m-1}(x-y)B_0(y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 B_{m-1}(x-y)dy. \quad (2)$$

Так как $\widehat{B_0}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\xi/2}\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}$, из свойств свертки следует, что

$$\widehat{B}_m(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big(e^{-i\xi/2}\frac{\sin\xi/2}{\xi/2}\Big)^{m+1}.$$

Рассмотрим множество $\mathrm{span}\{B_m(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$, $m = 1,2,\ldots$. Через V_m^0 обозначим его замыкание в норме $\|\ \|_{L^2(\mathbf{R})}$. V_m^0 является линейным пространством, подпространством $L^2(\mathbf{R})$.

Утверждение 2. *Семейство* $\{B_m(x-k), k \in \mathbf{Z}\}$ *образует базис Рисса в* V_m^0.

Доказательство. Свойство $1'$ из определения базиса Рисса очевидно выполнено. Для установления свойства $2'$ получим оценку для суммы

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2$ и применим теорему 1.

Используя формулы (5), (6), получаем:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^{2(m+1)}(\xi/2+\pi k)}{(\xi/2+\pi k)^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sin^{2(m+1)}(\xi/2)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\xi/2+\pi k)^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}=\frac{1}{2\pi}\frac{S_m(\sin^2(\xi/2))}{(2m+1)!}.$$

Согласно свойству 3 из утверждения 1 об экстремумах функций C_m и S_m:

$$\frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+3}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}\Big|_{\xi=\pi}\leq\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|\widehat{B}_m(\xi+2\pi k)\right|^2\leq$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\frac{C_m(\cos^2(\xi/2))}{(2m+1)!}\Big|_{\xi=0}=\frac{1}{2\pi}.$$

Тогда по теореме 1 нижней и верхней границами Рисса являются константы:

$$\mathbf{A_m}=\frac{2^{2m+2}}{\pi^{2m+2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2k)^{2(m+1)}},\quad \mathbf{B_m}=1.$$

Отсюда следует, что значение верхней границы не зависит от значения m, а значения нижней границы стремятся к нулю при $m\to\infty$.

4. О нахождении сумм некоторых рядов

Результаты, полученные во втором параграфе, имеют приложение в теории степенных рядов. С их помощью можно находить точные значения для рядов вида:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}\quad\text{и}\quad\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}},\qquad(12)$$

где m – произвольное положительное целое число.

Вводя обозначения $a_j=\frac{1}{2j-1}$, $b_j=(-1)^{j+1}a_j^{2m+1}$, замечаем, что $a_j=-a_{-j+1}$, $b_j=b_{-j+1}$. Поэтому:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=$$

$$=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(1+2j)^{2m}},\qquad(13)$$

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}=2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}=$$

$$=2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(1+2j)^{2m+1}}.\qquad(14)$$

Согласно теореме 1:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=\frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{1}{2}-j)^{2m}}=$$

$$=\frac{1}{2^{2m}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}\frac{C_{m-1}(\cos^2\frac{\pi}{2})}{\sin^{2m}(\frac{\pi}{2})}=\frac{1}{2^{2m}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}c_0^m.$$

С учетом (13), имеем формулу для нахождения точной суммы:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^{2m}}=\frac{1}{2^{2m+1}}\frac{\pi^{2m}}{(2m-1)!}c_0^{m-1}.\qquad(15)$$

Подставляя значения c_0^m из таблицы 1, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^6}=\frac{\pi^6}{960}\quad\text{и т. д.}$$

Теперь исследуем выражение (14). Дифференцируя выражение (5) с учетом представления (7), нетрудно установить, что

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x-j)^{2m+1}}=$$

$$=\frac{\pi^{2m+1}}{(2m)!}\frac{2\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)s_k^{m-1}\ \sin^{2k}\pi x}{\sin^{2m+1}\pi x}\cos\pi x.\qquad(16)$$

Справедливо представление:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(x-j)^{2m+1}}=$$

$$=\frac{1}{2^{2m+1}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x}{2}-j)^{2m+1}}-\frac{1}{(\frac{x-1}{2}-j)^{2m+1}}\Big).\qquad(17)$$

Вынося множитель за знак суммирования и используя (17), перепишем левую часть выражения (14):

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}}=$$

$$=\frac{1}{(-1)^{2m+2}2^{2m+1}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^j}{(x-j)^{2m+1}}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2^{4m+2}}\Big(\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x}{2}-j)^{2m+1}}-\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\frac{x-1}{2}-j)^{2m+1}}\Big)\Big|_{x=\frac{1}{2}}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m+1}}$ является нечетной функцией аргумента x, окончательно получаем:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{1}{2^{4m+1}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\frac{1}{4}-j)^{2m+1}}.$$

Таким образом, с учетом (16) окончательная формула для нахождения суммы ряда (14) выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{4m+1}(2m)!} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) s_k^{m-1} 2^{m-k}. \tag{18}$$

Используя приведенные в таблице 2 значения s_k^m, находим, что:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^3} = \frac{\pi^3}{32},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536},$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{(2j-1)^7} = \frac{61\pi^7}{184320} \quad \text{и т. д.}$$

Для частных случаев $m = 1, 2$ эти значения были найдены Эйлером [4]. В известном справочнике [5] приведены формулы, полученные Жолли [6], согласно которым:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^{2m}} = \frac{(2^{2m}-1)\pi^{2m}}{2(2m)!} |B_{2m}|$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{1}{(2j-1)^{2m+1}} = \frac{\pi^{2m+1}}{2^{2m+2}(2m)!} |E_{2m}|,$$

где B_{2m} и E_{2m} обозначают числа Бернулли и Эйлера соответственно. Отсюда и из формул (15) и (18) мы получаем формулы для определения B_{2m} и E_{2m}:

$$B_{2m} = (-1)^{m+1} \frac{c_0^{m-1}}{2m 2^{2m}(2^{2m}-1)},$$

$$E_{2m} = (-1)^m \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) s_k^{m-1} 2^{m-k}.$$

Эти формулы дают способ определения чисел Бернулли и Эйлера, отличающийся от изложенного в классических учебниках [7 – 9].

5. Заключение

Мы доказали, что сумма функционального ряда $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-j)^{2m}}$ представляет собой отношение тригонометрических полиномов. Доказанные нами свойства этих полиномов позволяют утверждать, что в пространстве кусочно-полиномиальных (порядок полинома не превосходит m) функций с разрывами в целочисленных точках семейство целочисленных сдвигов B-сплайна порядка m образует базис Рисса. Найденные нами границы Рисса являются неулучшаемыми. Приложением полученных результатов являются формулы для нахождения сумм степенных рядов, которые для двух частных случаев были рассмотрены Л. Эйлером. Мы также получили связь коэффициентов найденных полиномов с числами Бернулли и Эйлера.

Литература

[1] *Функциональный анализ* /под ред. С. Г. Крейна. – М.: Наука, 1964. – 424 с.

[2] Чуи, К. *Введение в вейвлеты*/ К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.

[3] Соболев, С. Л. *Введение в теорию кубатурных формул* / С. Л. Соболев. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

[4] Эйлер, Л. *Введение в анализ бесконечных*/ Л. Эйлер. – М.: Физматгиз, 1961. – 315 с.

[5] Градштейн, И. С. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

[6] Jolley, L.B. *Summation of Series* / L. B. Jolley. – London: Chapman and Hall LTD, 1925. – 251 p.

[7] Гельфонд, А. О. *Исчисление конечных разностей, ч.1*/ А. О. Гельфонд. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – 176 с.

[8] Фихтенгольц, Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.2* / Г. М. Фихтенгольц. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 860 с.

[9] Чезаро, Э. *Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых, ч.1* / Э. Чезаро. – Л.; М.: ОНТИ, 1936. – 592 с.