

и краевыми условиями

$$u^n|_{x=0} = 0, u_x^n|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, u_{xx}^n|_{x=0} = 0, u_{xxx}^n|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (12)$$

Решением задачи (10), (11), (12) будет функция

$$u^n(x, t) = \frac{e^{(2n-1)^4 t} \sin(2n-1)x}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 5. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \pi), t \in (0, \frac{1}{2})\}$ рассмотрим уравнение

$$(1-t)u_t + u_{xxxx} + a(x, t)u_{xxx} - u_{xx} + a(x, t)u_x - \frac{3}{2}u = -\frac{1}{2} \sin x \quad (13)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \quad (14)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0, x=\pi} = 0, u_{xx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (15)$$

Пусть $a(x, t)$ – аналитическая функция. Решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = (\sqrt{1-t} - 1) \sin x. \quad (16)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (13) – аналитические функции, но решение (16) задачи

(13), (14), (15) не принадлежит классу функций $H^{4,1}(D)$.

Литература

[1] Березанский, Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* / Ю. М. Березанский. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[2] Чуешева, Н. А., *Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка* // Н. А. Чуешева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. – Новосибирск, 1979. – С. 146 – 151.

[3] Galahtionov, V. A. *On interfaces and oscillatory solutions of higher order semilinear parabolic equations with non Lipschitz nonlinearities* // V. A. Galahtionov // Stud. Appl. Math. – 2006. – 117. – № 4. – P. 353 – 389.

[4] Usman, Muhammad *Forced oscillations of a class of nonlinear dispersive wave equations and their stability* / Muhammad Usman, Bingyu Zhang // J. Syst. Sci and Complex. – 2007. – Vol. 20. – № 2. – С. 284 – 292.

[5] Mamedov, Y. A. *On solution of a mixed problem for an equation of the fourth order with discontinuous coefficient* / Yusif A. Mamedov, Saleh Z. Akhmedov // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. - Techn. and Math. Sci. – 2006. – Vol. 26. – № 4. – P. 137 – 144.

УДК 517. 95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е. В. Максимова, Н. А. Чуешева

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION FOURTH ORDER

E. V. Maksimova, N.A. Chuesheva

Исследование разрешимости краевых задач для уравнений четвертого порядка занимают многие математики в России и за рубежом. Данная работа посвящена исследованию 3 краевых задач для одного уравнения четвертого порядка. Регулярное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка существует и единственно. Построены примеры не единственности решений двух других краевых задач для этого уравнения.

Investigation solvability boundary value problem for differential equation fourth order be occupied with many mathematicians in Russia and abroad. This paper devoted investigation three boundary value problem for one equation fourth order. Regular solution one boundary value problem for differential equation with partial derivative fourth order exist and uniquely. Constructed examples non uniquely solutions for two other boundary value problem for this equation.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, существование решения, единственность решения, корректная постановка задачи.

Keywords: Boundary value problem, differential equation with partial derivative fourth order, existence solution, uniquely solution, correct statement problem.

В последние годы вопросам разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка были посвящены много работ.

Например, в работе [1] (Д. Аманова) рассматривалось следующее уравнение:

$$u_{tt} + \operatorname{sgn} t u_{xxxx} = f(x, t).$$

В работе [5] (Ж. А. Отаровой) рассматривалась краевая задача для уравнения

$$u_{tt} + u_{xxxx} = f(x, t).$$

Получены условия самосопряженности, при которых соответствующая задача имеет точечный спектр.

В работе [2] (Д. Аманова, Ж. А. Отаровой) изучается самосопряженная краевая задача для уравнения $u_{tt} + u_{xxxx} = f(x, t)$. Получены условия регулярной, сильной и почти всюду разрешимости

этой задачи.

В статье [7] (Yan Ding Wang) исследованы вопросы существования, единственности и разрушения решений начально-краевой задачи для нелинейного уравнения:

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxx} - bu_{xtt} = (g(u_x))_x, \\ 0 < x < l, \quad 0 < t < T.$$

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка. Нужно найти краевые условия, при которых поставленная задача будет корректной. Привести примеры краевых условий, при которых поставленная задача будет некорректной.

Задача 1. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, 1), t \in (0, 1)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + cu_x + du + eu_t = f(x, t) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0, t=1} = 0, \quad u|_{x=0, x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0, x=1} = 0. \quad (2)$$

Введём некоторые обозначения. Через C_L обозначим класс функций из пространства $C^\infty(\bar{D})$, удовлетворяющих граничным условиям (2). Через

$H^{4,2}(D)$ обозначим пространство, полученное замыканием пространства C_L по норме:

$$\|u\|_{H^{4,2}(D)} = \left(\int_D (u^2 + u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}^2 + u_{tt}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxt}^2 + u_{xxx}^2) dD \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

1) $b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда для решения задачи (1), (2) верна априорная оценка:

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_t\|_{L_2(D)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(D)}^2 \leq C \|f\|_{L_2(D)}^2.$$

Замечание. Из леммы 1 следует, что функции $u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_t(x, t) \in L_2(D)$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} = f(x, t) - bu_{xx} - cu_x - du - eu_t = f_1(x, t), \quad (3)$$

где $f_1(x, t) \in L_2(D)$.

Лемма 2. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

1) $a \geq 0$, $b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда для решения задачи (1), (2) верны априорные оценки:

$$\|u_{tx}\|_{L_2(D)}^2 + \|u_{xxx}\|_{L_2(D)}^2 \leq 4 \|f_1\|_{L_2(D)}^2.$$

$$\|u_{tt}\|_{L_2(D)}^2 \leq \|f_1\|_{L_2(D)}^2.$$

Доказательство леммы 1 и леммы 2 проводится методом интегрирования по частям с применением мультипликативных неравенств.

Теорема единственности. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия: 1) $a \geq 0$, $b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда решение задачи (1), (2) из пространства $H^{4,2}(D)$ единственно.

Задача 2. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \pi), t \in (0, \pi)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + au_x + (b+2)u = 0. \quad (4)$$

с граничными условиями

$$u|_{t=0, t=\pi} = 0, \\ u|_{x=0, x=\pi} = 0, \\ u_{xx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (5)$$

Решение поставленной задачи будет не единственным. Помимо нулевого решения этой задачи, ненулевая в этой области функция $u(x, y) = \sin t \sin x$ удовлетворяет краевым условиям (5) и уравнению (4).

Задача 3. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \pi), t \in (0, \pi)\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{tt} - u_{xxxx} + au_{xxx} + bu_{xx} + au_x + (b+2)u = 0. \quad (6)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u|_{t=0, t=\pi} &= 0, \\ u_x|_{x=0, x=\pi} &= 0, \\ u_{xxx}|_{x=0, x=\pi} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение поставленной задачи будет не единственным. Помимо нулевого решения этой задачи, ненулевая в этой области функция

$$u(x, y) = \sin t \cos x$$

удовлетворяет краевым условиям (7) и уравнению (6).

Теорема существования. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

$$(u_{mtt} - u_{mxxxx} + au_{mxxx} + bu_{mxx} + cu_{mx} + du_m + eu_{mt}, w_j) = (f(x, t), w_j), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Аналогично, как в леммах, можно получить равномерные по m оценки. Тогда из семейства функций $\{u_m(x, t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность, что $u_m(x, t) \rightarrow u(x, t)$ слабо в пространстве $H^{4,2}(D)$. Предельная функция будет слабым решением поставленной задачи.

Литература

[1] Аманов, Д. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка / Д. Аманов // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения: Международная конференция, посвященная 100-летию со дня рождения академика Ильи Несторовича Векуа. Новосибирск, 28 мая – 2 июня, 2007: тезисы докладов. – Новосибирск: НГУ, 2007. – С. 61.

[2] Аманов, Д. Краевая задача для уравнения смешанного типа четвертого порядка / Д. Аманов, Ж. А. Отарова // Узб. мат. ж. – 2008. – № 3. – С. 13 – 22.

[3] Аманов, Д. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженной задачи для уравнения

1) $a \geq 0, b \geq 0$; 2) $\frac{\pi^2}{128} - d \geq \delta > 0$. Тогда решение задачи (1), (2) из пространства $H^{4,2}(D)$ существует.

Доказательство. Доказывать существование решения задачи (1), (2) будем методом Галеркина с выбором специального базиса. То есть приближенное решение этой задачи ищем в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im} w_i(x, t),$$

где $w_i(x, t)$ – собственные функции следующей задачи:

$$Pw_i(x, t) = w_{itt}(x, t) - w_{ixxxx}(x, t) = \lambda_i w_i(x, t),$$

$$\begin{aligned} w_i(x, t)|_{t=0, t=\pi} &= 0, \\ w_i(x, t)|_{x=0, x=\pi} &= 0, \\ w_{ix}(x, t)|_{x=0, x=\pi} &= 0. \\ i &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

В [2] показано, что в пространстве $H^{4,2}(D)$ существует счетная полная система собственных функций оператора P . Коэффициенты g_{im} находятся из системы алгебраических уравнений:

четвертого порядка / Д. Аманов, А. В. Юлдашева // Узб. мат. ж. – 2007. – № 4. – С. 3 – 8.

[4] Березанский, Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[5] Отарова, Ж. А. Разрешимость и спектральные свойства самосопряженных задач для уравнения четвертого порядка / Ж. А. Отарова // Uzbek. Math. J. – 2008. – № 2. – С. 74 – 80.

[6] Чуешева, Н. А. Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка / Н. А. Чуешева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: сб. науч. тр. АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. – Новосибирск, 1979. – С. 146 – 151.

[7] Wang, Yan Ding. The existence and non-existence of global solutions for a nonlinear wave equation / Wang Yan Ding // Math. Res. and expo. – 2009. – Vol. 29 – № 1. – P. 164 – 168.