

периодической функции $g \in W_2^p[0, 1]$:

$$g(t)|_{[0,T]} = \psi(t) = \begin{cases} \frac{f(t)+L_T f(t)+\dots+L_T^n f(t)}{n+1} + z_1(t), \\ \text{при } 0 < t < 1 - nT, \\ \frac{f(t)+L_T f(t)+\dots+L_T^{n-1} f(t)}{n} + z_2(t), \\ \text{при } 1 - nT < t < T, \end{cases}$$

где функции $L_T f(t) = f(t+T), \dots, L_T^k f(t) = f(t+kT)$. Функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению

$$z^{(2p)}(t) - z^{(2p-2)}(t) + \dots \pm z(t) = 0,$$

соответственно на отрезках $0 < t < 1 - nT$ и $1 - nT < t < T$. Каждая из функций $z_1(t)$ и $z_2(t)$ линейно зависит от $2p$ параметров, которые выбираются так, чтобы $\psi \in W_2^p[0, T]$, функция ψ на отрезке $[0, T]$ была периодична периода T и достигала минимум (1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2 с использованием формулы интегрирования по частям.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Аналогично (1) можно сформулировать более простую вариационную задачу в пространстве Соболева $W_2^1[a, b]$:

$$J_1(T) = \min \left\{ \|f' - g\|_{L_2[a,b]} : g \in \mathcal{L}_{2,T}^1[a, b] \right\}, \quad (4)$$

где $f \in W_2^1[a, b]$. Решением будет служить периодическая составляющая f вместе с линейным трендом.

Представленный в работе численный алгоритм может быть использован при построении математического аппарата обработки сигналов, применен при создании автоматизированных систем цифровой обработки сигналов.

Литература

[1] Дмитриев, Е. В. *Гармонические естественные спектры и аппроксимация коротких сигналов* / [Эл. вар.]. – URL: <http://short-signal-sp.pochta.ru>

[2] Козаченко, М. С. *Выделение периодической составляющей конечного сигнала в пространстве Соболева* / М. С. Козаченко, В. В. Славский // Материалы XLIX Международной научной студенческой конференции "Студент и научно-технический прогресс". – Новосибирск, 2011. – С. 101.

[3] Козаченко, М. С. *О периодической составляющей конечного сигнала в Соболевских пространствах* / М. С. Козаченко, В. В. Славский // Материалы Международной научной конференции "Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование". – Волгоград, 2011 – С. 9.

УДК 517. 95

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

И. О. Коркина, Н. А. Чуешева

INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION FOURTH ORDER

I. O. Korkina, N. A. Chuesheva

Исследованием разрешимости краевых задач для уравнений четвертого порядка занимаются многие математики в России и за рубежом. Данная работа посвящена исследованию 5 краевых задач для одного уравнения четвертого порядка. Регулярное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка существует и единственно. Построены примеры неустойчивости решений трех других краевых задач для этого уравнения. Построен пример решения одной краевой задачи для этого уравнения, такой, что при аналитических коэффициентах и аналитической правой части данного уравнения решение не будет принадлежать пространству С. Л. Соболева $H^{4,1}(D)$.

Investigation solvability boundary value problem for differential equation fourth order be occupied with many mathematicians in Russia and in abroad. This paper devoted investigation five boundary value problems for one equation fourth order. Regular solution one boundary value problem for differential equation with partial derivative fourth order exist and uniquely. Examples non stability solutions for three other boundary value problem for this equation are constructed. Example solution one boundary value problem for this equation is constructed, such that under condition analyticity coefficients and analytic on the right-hand side given equation, but solution is not belong Sobolev's space $H^{4,1}(D)$.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, существование решения, единственность решения, пространство С. Л. Соболева, корректная постановка задачи, устойчивость решения.

Keywords: Boundary value problem, differential equation with partial derivative fourth order, existence solution, uniquely solution, correct statement problem and stability solution. The Sobolev's spaces.

В работе [3] (V. A. Galahtionov) изучаются локальные свойства и асимптотика решений задачи Коши и задачи со свободной границей для уравнения $u_t + u_{xxxx} + |u|^{p-1}u = 0$ в $R \times R_+$ с $p < 1$.

В работе [4] (Muhammad Usman, Bingyu Zhang) показано, что если n -периодическая функция малой амплитуды, то решение задачи $u_t + u_x + uu_{xx} + u_{xxxx} = 0$, $u(0, t) = n(t)$, $t > 0$, $u_x(1, t) = 0$, $u(1, t) = 0$ становится в конце концов периодическим.

В работе [5] (Yusif A. Mamedov, Saleh Z. Akhmedov) о решении смешанной задачи для уравнения четвертого порядка с разрывным коэффициентом найдено решение смешанной задачи для уравнения:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + q(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

в виде контурного интеграла.

В данной работе рассматривается несколько начально-краевых задач для одного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка. Нужно найти начально-краевые условия, при которых поставленная задача будет корректной. Привести примеры начально-краевых условий, при которых поставленная задача будет некорректной.

Задача 1. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, 1), t \in (0, 1)\}$ рассмотрим уравнение

$$k(t)u_t + u_{xxxx} + c(x, t)u_{xxx} + b(x, t)u_{xx} + a(x, t)u_x + d(x, t)u = f(x, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0, x=1} = 0, \quad u_x|_{x=0, x=1} = 0. \quad (3)$$

Введём некоторые обозначения. Через C_L обозначим класс функций из пространства $C^\infty(\bar{D})$, удовлетворяющих начально-краевым условиям (2), (3). Через $H^{4,1}(D)$ обозначим пространство, полученное замыканием пространства C_L по норме

$$\|u\|_{H^{4,1}(D)} = \left(\int_D (u^2 + u_x^2 + u_t^2 + u_{xx}^2 + u_{xxx}^2 + u_{xxxx}^2) dD \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

1) $k(t) \in C^3[0, 1]$, $c(x, t)$, $b(x, t)$, $a(x, t)$, $d(x, t) \in C^3(\bar{D})$.

2) Пусть существуют вещественные постоянные λ , δ_1 , δ_2 , такие, что

$$-\lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x, t) + b_{xx}(x, t) - c_{xxx}(x, t) + 2d(x, t) \geq \delta_1 > 0, \quad (x, t) \in \bar{D};$$

3) $-2b(x, t) + 3c_x(x, t) \geq \delta_2 > 0$, $(x, t) \in \bar{D}$;

4) $k(1) \leq 0$.

Тогда для решения задачи (1), (2) верна априорная оценка:

$$\|u\|_{L_2(D)}^2 + \|u_x\|_{L_2(D)}^2 + \|u_{xx}\|_{L_2(D)}^2 \leq C_1 \|f\|_{L_2(D)}^2.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (1) на функцию $u(x, t)e^{\lambda t}$ и проинтегрируем по частям.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 1 следует, что функции $u(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$, $u_x(x, t) \in L_2(D)$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$k(t)u_t + u_{xxxx} + c(x, t)u_{xxx} = -b(x, t)u_{xx} - a(x, t)u_x - d(x, t)u + f(x, t) = f_1(x, t),$$

где $f_1(x, t) \in L_2(D)$.

Лемма 2. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены все условия леммы 1 и следующие условия:

5) $c(0, t) \leq 0$, $c(1, t) \leq 0$, $c_x(x, t) < 0$, $(x, t) \in \bar{D}$. Тогда для решения задачи (1), (2), (3) верна априорная оценка:

$$\|u_{xxx}\|_{L_2(D)}^2 + \|u_{xxxx}\|_{L_2(D)}^2 \leq C_2 \|f_1\|_{L_2(D)}^2.$$

Доказательство. Умножим скалярно уравнение (1) на функцию $u_{xxx}(x, t)$ и проинтегрируем по частям.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из леммы 1, леммы 2 и уравнения (1) следует, что функция $u_t(x, t) \in L_2(D)$. Следовательно, для решения задачи (1), (2), (3) будет верна априорная оценка:

$$\|u\|_{H^{4,1}(D)}^2 \leq C \|f\|_{L_2(D)}^2.$$

Теорема единственности. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:

1) $k(t) \in C^3[0, 1]$, $c(x, t)$, $b(x, t)$, $a(x, t)$, $d(x, t) \in C^3(\bar{D})$.

2) Пусть существуют вещественные постоянные λ , δ_1 , δ_2 , такие, что

$$-\lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x, t) + b_{xx}(x, t) - c_{xxx}(x, t) + 2d(x, t) \geq \delta_1 > 0, \quad (x, t) \in \bar{D};$$

3) $-2b(x, t) + 3c_x(x, t) \geq \delta_2 > 0$, $(x, t) \in \bar{D}$;

4) $k(1) \leq 0$;

5) $c(0, t) \leq 0$, $c(1, t) \leq 0$, $c_x(x, t) < 0$, $(x, t) \in \bar{D}$.
Тогда решение задачи (1), (2), (3) из пространства $H^{4,1}(D)$ единственно.

Теорема существования. Пусть правая часть уравнения (1) $f(x, t) \in L_2(D)$. Пусть для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия:
1) $k(t) \in C^3[0, 1]$, $c(x, t)$, $b(x, t)$, $a(x, t)$, $d(x, t) \in C^3(\bar{D})$.

2) Пусть существуют вещественные постоянные λ , δ_1 , δ_2 , такие, что:

$-\lambda k(t) - k_t(t) - a_x(x, t) + b_{xx}(x, t) - c_{xxx}(x, t) + 2d(x, t) \geq \delta_1 > 0$, $(x, t) \in \bar{D}$;

3) $-2b(x, t) + 3c_x(x, t) \geq \delta_2 > 0$, $(x, t) \in \bar{D}$;

4) $k(1) \leq 0$;

5) $c(0, t) \leq 0$, $c(1, t) \leq 0$, $c_x(x, t) < 0$, $(x, t) \in \bar{D}$.
Тогда решение задачи (1), (2), (3) из пространства $H^{4,1}(D)$ существует.

Доказательство. Доказывать существование решения задачи (1), (2), (3) будем методом Галеркина с выбором специального базиса. То есть приближенное решение этой задачи ищем в виде

$$u_m(x, t) = \sum_{i=1}^m g_{im}(t) w_i(x),$$

где $w_i(x)$ – собственные функции следующей задачи:

$$Pw_i(x, t) = w_{ixxxx}(x) = \lambda_i w_i(x), \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$w_i(x)|_{x=0, x=1} = 0, \quad w_{ix}(x)|_{x=0, x=1} = 0.$$

В [1] показано, что в пространстве С. Л. Соболева $W_2^4(0, 1)$ существует счетная полная система собственных функций оператора P .

Коэффициенты $g_{im}(t)$ найдем из системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$(k(t)u_{mt} + u_{mxxxx} + c(x, t)u_{mxxx} + b(x, t)u_{mxx} + a(x, t)u_{mx} + d(x, t)u_m, w_j) = (f(x, t), w_j),$$

$j = 1, 2, \dots, m$,

с начальным условием $g_{im}(t)|_{t=0} = 0$.

Здесь скалярное произведение $(\cdot, \cdot) = \int_0^1 \cdot \cdot dx$.

Аналогично, как в лемме (1), можно получить равномерную по m априорную оценку приближенного решения поставленной задачи.

Затем, заменяя $w_j(x)$ на $\frac{1}{\lambda_j} w_{jxxxx}(x)$, аналогично как в лемме 2, можно получить равномерную по m априорную оценку приближенного решения задачи (1), (2), (3). Следовательно, будет верна равномерная по m априорная оценка приближенного решения задачи (1), (2), (3)

$$\|u_m\|_{H^{4,1}(D)}^2 \leq C \|f\|_{L_2(D)}^2,$$

из которой следует, что из семейства функций $\{u_m(x, t)\}$ можно выделить такую подпоследовательность функций $\{u_{\mu}(x, t)\}$, что $u_{\mu}(x, t) \rightarrow u(x, t)$, при $\mu \rightarrow 0$, слабо в $H^{4,1}(D)$.

Предельная функция будет слабым решением поставленной задачи (1), (2), (3).

Приведем примеры некорректных постановок других начально-краевых условий для уравнения (1).

Задача 2. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$ рассмотрим модельное уравнение
($k(t) = -1$, $c(x, t) = b(x, t) = a(x, t) = d(x, t) = 0$):

$$-u_t^n + u_{xxxx}^n = 0 \quad (4)$$

с начальным условием

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin nx}{n^5} \quad (5)$$

и краевыми условиями

$$u^n|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad u_{xx}^n|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (6)$$

Решением задачи (4), (5), (6) будет функция

$$u^n(x, t) = \frac{e^{n^4 t} \sin nx}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 3. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \pi), t \in (0, 1)\}$ рассмотрим модельное уравнение
($k(t) = -1$, $c(x, t) = b(x, t) = a(x, t) = d(x, t) = 0$):

$$-u_t^n + u_{xxxx}^n = 0 \quad (7)$$

с начальным условием

$$u^n|_{t=0} = \frac{\cos nx}{n^5} \quad (8)$$

и краевыми условиями

$$u_x^n|_{x=0, x=\pi} = 0, \quad u_{xxx}^n|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (9)$$

Решением задачи (7), (8), (9) будет функция

$$u^n(x, t) = \frac{e^{n^4 t} \cos nx}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 4. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \frac{\pi}{2}), t \in (0, 1)\}$ рассмотрим модельное уравнение
($k(t) = -1$, $c(x, t) = b(x, t) = a(x, t) = d(x, t) = 0$):

$$-u_t^n + u_{xxxx}^n = 0 \quad (10)$$

с начальным условием

$$u^n|_{t=0} = \frac{\sin(2n-1)x}{n^5} \quad (11)$$

и краевыми условиями

$$u^n|_{x=0} = 0, u_x^n|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, u_{xx}^n|_{x=0} = 0, u_{xxx}^n|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0. \quad (12)$$

Решением задачи (10), (11), (12) будет функция

$$u^n(x, t) = \frac{e^{(2n-1)^4 t} \sin(2n-1)x}{n^5},$$

которая показывает, что нулевое решение этой задачи неустойчивое.

Задача 5. В области $D = \{(x, t) \in R^2, x \in (0, \pi), t \in (0, \frac{1}{2})\}$ рассмотрим уравнение

$$(1-t)u_t + u_{xxxx} + a(x, t)u_{xxx} - u_{xx} + a(x, t)u_x - \frac{3}{2}u = -\frac{1}{2} \sin x \quad (13)$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = 0 \quad (14)$$

и краевыми условиями

$$u|_{x=0, x=\pi} = 0, u_{xx}|_{x=0, x=\pi} = 0. \quad (15)$$

Пусть $a(x, t)$ – аналитическая функция. Решением этой задачи будет функция

$$u(x, t) = (\sqrt{1-t} - 1) \sin x. \quad (16)$$

Коэффициенты и правая часть уравнения (13) – аналитические функции, но решение (16) задачи

(13), (14), (15) не принадлежит классу функций $H^{4,1}(D)$.

Литература

[1] Березанский, Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов* / Ю. М. Березанский. – Киев: Наукова думка, 1965. – 800 с.

[2] Чушева, Н. А., *Об одной смешанной задаче для уравнения 4-го порядка* // Н. А. Чушева // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики: сб. науч. тр. / АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т математики. – Новосибирск, 1979. – С. 146 – 151.

[3] Galahtionov, V. A. *On interfaces and oscillatory solutions of higher order semilinear parabolic equations with non Lipschitz nonlinearities* // V. A. Galahtionov // Stud. Appl. Math. – 2006. – 117. – № 4. – P. 353 – 389.

[4] Usman, Muhammad *Forced oscillations of a class of nonlinear dispersive wave equations and their stability* / Muhammad Usman, Bingyu Zhang // J. Syst. Sci and Complex. – 2007. – Vol. 20. – № 2. – С. 284 – 292.

[5] Mamedov, Y. A. *On solution of a mixed problem for an equation of the fourth order with discontinuous coefficient* / Yusif A. Mamedov, Saleh Z. Akhmedov // Trans. Nat. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys. - Techn. and Math. Sci. – 2006. – Vol. 26. – № 4. – P. 137 – 144.

УДК 517. 95

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Е. В. Максимова, Н. А. Чушева

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATION FOURTH ORDER

E. V. Maksimova, N.A. Chuesheva

Исследование разрешимости краевых задач для уравнений четвертого порядка занимают многие математики в России и за рубежом. Данная работа посвящена исследованию 3 краевых задач для одного уравнения четвертого порядка. Регулярное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка существует и единственно. Построены примеры не единственности решений двух других краевых задач для этого уравнения.

Investigation solvability boundary value problem for differential equation fourth order be occupied with many mathematicians in Russia and in abroad. This paper devoted investigation three boundary value problem for one equation fourth order. Regular solution one boundary value problem for differential equation with partial derivative fourth order exist and uniquely. Constructed examples non uniquely solutions for two other boundary value problem for this equation.

Ключевые слова: краевая задача, дифференциальное уравнение с частными производными четвертого порядка, существование решения, единственность решения, корректная постановка задачи.

Keywords: Boundary value problem, differential equation with partial derivative fourth order, existence solution, uniquely solution, correct statement problem.