УДК 517.938+517.987.5+519.214.8

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМАХ БИРКГОФА И БОУЭНА ДЛЯ ПОТОКОВ АНОСОВА

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин

ESTIMATES OF THE RATE OF CONVERGENCE IN BIRKHOFF AND BOWEN THEOREMS FOR ANOSOV FLOWS

A. G. Kachurovskii, I. V. Podvigin

Для равномерно гиперболических динамических систем получены экспоненциальные оценки на скорость сходимости почти всюду эргодических средних в теоремах Биркгофа и Боуэна с использованием ранее известных аналогичных оценок на скорость сходимости по мере в этих теоремах.

We obtain exponential estimates of the rate of convergence in Birkhoff and Bowen theorems for uniformly hyperbolic systems. Well-known analogous estimates for large deviations in these theorems, are used in the proof.

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, поток Аносова, теорема Биркгофа, теорема Боуэна.

Keywords: rates of convergence in ergodic theorems, Anosov flows, Birkhoff theorem, Bowen theorem.

Работа поддержана Программой государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-8508-2010.1).

Введение

Пусть $(\Omega, \lambda, \{T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}})$ – классическая динамическая система [1]. Это означает, что Ω – гладкое многообразие, T^τ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов на Ω, сохраняющих борелевскую меру λ, которую будем предполагать вероятностной, т. е. $\lambda(\Omega) = 1$. В локальных координатах многообразия Ω такая группа диффеоморфизмов определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{x_i} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n),\ i = 1, \dots, n,\ n = \mathrm{dim}\Omega. \quad (1)$$

Среди классических систем, обладающих существенно стохастическими свойствами и используемых для моделирования динамики физических процессов, выделяют равномерно гиперболические системы (диффеоморфизмы и потоки Аносова).

В этом случае T^τ – C^2-гладкий поток, Ω – компактное C^∞-гладкое риманово многообразие, для каждой точки $\omega = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ которого справедливо разложение касательного пространства $T_\omega\Omega$ в сумму трех подпространств, образующих в совокупности непрерывные подрасслоения расслоения $T\Omega$, инвариантные относительно дифференциала DT^τ [2, 3]:

$$T_\omega\Omega = E_\omega \oplus E^s_\omega \oplus E^u_\omega,$$

где E_ω – касательная к траектории системы (1), проходящей через ω, и

$$\|DT^\tau w\| \le ce^{-\theta\tau}\|w\|, w \in E^s_\omega, \tau \ge 0,$$

$$\|DT^\tau w\| \le ce^{\theta\tau}\|w\|, w \in E^u_\omega, \tau \le 0,$$

для некоторых констант c и θ, не зависящих от ω.

Множество инвариантных мер для гиперболических систем бесконечно. К примеру, так как периодические точки плотны в Ω, то инвариантными будут меры сосредоточенные на таких периодических орбитах. Для некоторых систем инвариантным может быть и риманов объём (мера Лебега), хотя число таких систем не велико, с точки зрения теории категорий. В качестве инвариантной меры мы будем рассматривать "физическую" меру Синая-Рюеля-Боуэна (SRB-мера) [3].

В дальнейшем будем использовать обозначения: μ – риманов объём, λ – SRB-мера, а ν – произвольная вероятностная мера.

Классическими примерами гиперболических систем являются геодезические на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны, а также специальные потоки над диффеоморфизмами Аносова [2, 4].

Будем предполагать поток T^τ топологически транзитивным, т. е. что для любых непустых открытых множеств $U, V \subset \Omega$ для некоторого t верно соотношение $U \cap T^t V \ne \emptyset$.

Замечание 1. Это условие не является ограничительным, так как, по теореме Смейла [2], о спектральном разложении в противном случае Ω разлагается в конечную сумму подмножеств, сужения, на которые дают топологически транзитивный поток.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$ и $t \in \mathbb{R}^+$ обозначим эргодическое среднее:

$$\overline{A}_t f(\omega) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(T^\tau\omega)\, d\tau,\ t > 0,\ \overline{A}_0 f = f.$$

Так как мера λ будет эргодической (т.е. инвариантными множествами будут только множества нулевой меры и все пространство), то теорема Биркгофа утверждает для всякой $f \in L_1(\Omega)$ существование λ-почти всюду предела, равного константе:

$$\lim_{t\to\infty} \overline{A}_t f = \int f d\lambda.$$

По теореме Боуэна [3, 5], этот предел для непрерывных функций существует и равен той же константе для μ-почти всех ω.

Замечание 2. Важность теоремы Боуэна и теоремы Биркгофа заключается, в частности, в том, что, используя их вместе, можно показать, что если гиперболическая система обладает инвариантным римановым объёмом μ, то тогда SRB-мера совпадает с ним, т. е. $\mu = \lambda$ [5].

Естественно попытаться ответить на вопрос: с какой скоростью для рассматриваемой динамической системы происходит стремление к пределу эргодических средних от непрерывной функции как в теореме Биркгофа, так и в теореме Боуэна?

Скорость сходимости почти всюду относительно меры ν средних $\overline{A}_t f$ к $\int f d\lambda$ будем определять убыванием при $s \to \infty$ для каждого $\varepsilon > 0$ величин

$$\overline{\mathrm{P}}_s^{\nu,\varepsilon} = \nu \left\{ \sup_{t\geq s} |\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \geq \varepsilon \right\}.$$

При $\nu = \lambda$ получаем скорость сходимости в теореме Биркгофа, а при $\nu = \mu$ и непрерывной функции f – в теореме Боуэна. Наряду с этим параметром будем рассматривать вероятности больших ε-уклонений, т. е. величины

$$\overline{\mathrm{p}}_s^{\nu,\varepsilon} = \nu \left\{ |\overline{A}_s f - \int f d\lambda| \geq \varepsilon \right\},$$

стремление которых к нулю при $s \to \infty$ означает сходимость по мере ν.

Основные результаты

Лемма об эквивалентности

Сходимость по мере не влечет сходимости почти всюду. Однако для эргодических средних от существенно ограниченных функций степенная сходимость по мере эквивалентна степенной же сходимости почти всюду [6, теорема 12]. Оказывается, и для более общих скоростей убывания справедлив аналогичный результат.

Лемма. *Пусть ν – произвольная вероятностная мера, $f \in L_\infty(\Omega,\nu) \bigcap L_1(\Omega,\lambda)$, и функция $\varphi(x) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ убывает (при $x > x_0$) к нулю так, что*

$$\int_N^\infty \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = O(\varphi(N)) \text{ при } N \to \infty, \tag{2}$$

тогда следующие утверждения равносильны:
1) $\overline{\mathrm{p}}_s^{\nu,\varepsilon} = O(\varphi(s))$ при $s \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$;
2) $\overline{\mathrm{P}}_s^{\nu,\varepsilon} = O(\varphi(s))$ при $s \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим класс функций, удовлетворяющих (2). Легко проверить, что функции вида $\varphi(x) = \frac{\psi(x)}{x^\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ и ψ – положительная невозрастающая (при $x > x_0$) функция, удовлетворяют условию (2).

Кроме степенных функций в таком виде представляются степенные с логарифмическим множителем и экспоненциальные функции. Кроме того, из функций, удовлетворяющих условию (2), можно получать новые функции с помощью степенной замены переменной. Таким образом, из экспоненциальной функции можно получить растянутые экспоненциальные функции $e^{-\gamma x^\delta}$, $\gamma, \delta > 0$. Таких функций достаточно для наших дальнейших рассмотрений.

Экспоненциальные оценки

Оценка в теореме Боуэна. Для потоков Аносова оценки вероятностей больших ε-уклонений относительно меры μ хорошо изучены. Как показано в [7, 8, 9], для всякой непрерывной на Ω функции f справедлив принцип больших уклонений:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \mu \left\{ |\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \geq \varepsilon \right\} \leq -\gamma_\mu(\varepsilon)$$

для некоторой константы $\gamma_\mu(\varepsilon) > 0$, зависящей от динамической системы и функции f. Откуда видно, что для достаточно больших t, т. е. для $t \geq T_\mu$, будет верно неравенство:

$$\overline{\mathrm{p}}_t^{\mu,\varepsilon} = \mu \left\{ |\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \geq \varepsilon \right\} \leq e^{-\gamma_\mu(\varepsilon) t}.$$

Тогда найдётся такая константа $C_\mu(\varepsilon) > 0$ (можно взять $C_\mu(\varepsilon) = e^{\gamma_\mu(\varepsilon) T_\mu}$), что для всех $t \geq 0$ будет верно неравенство

$$\overline{\mathrm{p}}_t^{\mu,\varepsilon} = \mu \left\{ |\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \geq \varepsilon \right\} \leq C_\mu(\varepsilon) e^{-\gamma_\mu(\varepsilon) t}.$$

Другими словами: $\overline{\mathrm{p}}_t^{\mu,\varepsilon} = O(e^{-\gamma_\mu(\varepsilon) t})$ при $t \to \infty$. Применяя лемму, получаем аналогичное асимптотическое соотношение для скорости сходимости в теореме Боуэна:

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\mu,2\varepsilon} = O(e^{-\gamma_\mu(\varepsilon) t}) \text{ при } t \to \infty. \tag{3}$$

Отметим, что соотношение (3) даёт отличное от оригинального доказательство самой теоремы Боуэна.

Оценка в теореме Биркгофа. Оценки вероятностей больших ε-уклонений относительно меры λ также интенсивно изучались последние двадцать лет. Кроме того, в случае меры λ получена более точная асимптотика.

В работе [10, раздел 7] показано, что для всякой гёльдеровской непрерывной на Ω функции f справедлив следующий принцип больших уклонений (который является следствием более общего принципа). Пусть J – замкнутый интервал, не содержащий значение $\int f d\lambda$, тогда найдутся константы C и $\gamma > 0$, зависящие от интервала J и от функции f, такие, что

$$\lambda\{\overline{A}_t f \in J\} \le C\frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{t}}$$

для достаточно больших t. Этот принцип справедлив в предположении, что функция f и поток T^τ независимы в смысле Лалли [10, определение 2; 11, гипотеза B].

Пусть $K = \sup\limits_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$, тогда $\overline{A}_t f(\omega) \in [-K, K]$ для λ-почти всех точек ω и $t \ge 0$. Используя этот факт и описанный выше принцип для достаточно больших t, т. е. для $t \ge T_\lambda$, получим неравенства:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{p}}_t^{\lambda,\varepsilon} &= \lambda\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} = \lambda\left\{\int f d\lambda - \varepsilon \ge \overline{A}_t f \ge \int f d\lambda + \varepsilon\right\} = \\ &= \lambda\left\{\overline{A}_t f \in \left[-K, \int f d\lambda - \varepsilon\right] \bigcup \left[\int f d\lambda + \varepsilon, K\right]\right\} = \\ &= \lambda\left\{\overline{A}_t f \in \left[-K, \int f d\lambda - \varepsilon\right]\right\} + \lambda\left\{\overline{A}_t f \in \left[\int f d\lambda + \varepsilon, K\right]\right\} \le \\ &\le C_1\frac{e^{-\gamma_1 t}}{\sqrt{t}} + C_2\frac{e^{-\gamma_2 t}}{\sqrt{t}} \le C_3\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon) t}}{\sqrt{t}},\end{aligned}$$

где константы C_1, γ_1 и C_2, γ_2 соответствуют отрезкам $J_1 = \left[-K, \int f d\lambda - \varepsilon\right]$ и $J_2 = \left[\int f d\lambda + \varepsilon, K\right]$, а $C_3 = \max\{C_1, C_2\}$ и $\gamma_\lambda(\varepsilon) = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$.

Тогда найдётся такая константа $C_\lambda(\varepsilon) > 0$ (можно взять $C_\lambda(\varepsilon) = \frac{\sqrt{T_\lambda}}{C_3} e^{\gamma_\lambda(\varepsilon) T_\lambda}$), что для всех $t > 0$ будет верно неравенство:

$$\overline{\mathrm{p}}_t^{\lambda,\varepsilon} = \lambda\left\{|\overline{A}_t f - \int f d\lambda| \ge \varepsilon\right\} \le C_\lambda(\varepsilon)\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon) t}}{\sqrt{t}}.$$

Таким образом получили, что $\overline{\mathrm{p}}_t^{\lambda,\varepsilon} = O\left(\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon) t}}{\sqrt{t}}\right)$ при $t \to \infty$. Применяя лемму, получаем аналогичное асимптотическое соотношение и на скорость сходимости в теореме Биркгофа:

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\lambda,2\varepsilon} = O\left(\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon) t}}{\sqrt{t}}\right) \text{ при } t \to \infty. \tag{4}$$

Связывающие константы. Асимптотические соотношения (3) и (4) можно переписать в виде неравенств с вполне определёнными константами. Для этого нужно получить неравенства, уточняющие соотношение (2) леммы для функций $\varphi_1 = e^{-\gamma t}, \varphi_2 = \frac{e^{-\gamma t}}{\sqrt{t}}, \gamma > 0$. Пусть

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\, dt, x > 0,$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2} dt, x \in \mathbb{R}.$$

Покажем, что для функций φ_1 и φ_2 выполняются неравенства при всех $N \ge 1$:

$$\frac{1}{\varphi_1(N)}\int_N^\infty \frac{\varphi_1(x)}{x}\, dx \le e^\gamma E_1(\gamma) < \ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right); \tag{5}$$

$$\frac{1}{\varphi_2(N)}\int_N^\infty \frac{\varphi_2(x)}{x}\, dx \le 2\left(1 - e^\gamma\sqrt{\pi\gamma}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})\right) < 2\frac{\sqrt{\gamma+2} - \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\gamma+2} + \sqrt{\gamma}}. \tag{6}$$

Действительно, обозначим левые части неравенств (5) и (6) как функции $F_1(N)$ и $F_2(N)$. Тогда легко проверить, что

$$F_1(N) = \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma N x}}{x+1}\, dx, \quad F_2(N) = \int_0^\infty \frac{e^{-\gamma N x}}{(x+1)^{3/2}}\, dx.$$

Обе функции являются убывающими и, следовательно, $F_i(N) \le F_i(1), i = 1, 2, N \ge 1$. Заменой переменной находим $F_1(1) = e^\gamma E_1(\gamma)$. Равенство

$$F_2(1) = 2\left(1 - e^\gamma\sqrt{\pi\gamma}\operatorname{erfc}(\sqrt{\gamma})\right)$$

получаем интегрированием по частям. Вторые неравенства в (5) и (6) см., например, в [12, соотношения 5.1.20 и 7.1.13].

Положим $\Delta = \sup_\Omega |f - \int f d\lambda|$, и $r(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{\Delta}$. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Пусть $(\Omega, \lambda, \{T^\tau\}_{\tau\in\mathbb{R}})$ – топологически транзитивный поток Аносова и f – гёльдеровская непрерывная функция; тогда для любого $\varepsilon > 0$ для введенных выше констант $\gamma_\mu(\varepsilon)$ и $C_\mu(\varepsilon)$ при всех $t \ge 0$ справедлива оценка*

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\mu,2\varepsilon} < C_\mu(\varepsilon)\left(1 + \frac{\ln(1 + 1/\gamma_\mu(\varepsilon))}{\ln r(\varepsilon)}\right) e^{-\gamma_\mu(\varepsilon) t}.$$

Если, кроме того, функция f и поток независимы в смысле Лалли, то для любого $\varepsilon > 0$ для введенных выше констант $\gamma_\lambda(\varepsilon)$ и $C_\lambda(\varepsilon)$ при всех $t > 0$ справедлива оценка

$$\overline{\mathrm{P}}_t^{\lambda,2\varepsilon} < C_\lambda(\varepsilon)\cdot \cdot\left(1 + 2\frac{\sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)+2} - \sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)}}{\ln r(\varepsilon)(\sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)+2} + \sqrt{\gamma_\lambda(\varepsilon)})}\right)\frac{e^{-\gamma_\lambda(\varepsilon) t}}{\sqrt{t}}.$$

Литература

[1] Арнольд, В. И. *Эргодические проблемы классической механики* / В. И. Арнольд, А. Авец. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 284 с.

[2] Смейл, С. *Дифференцируемые динамические системы* / С. Смейл // УМН. – 1970. – Т. 25. – С. 113–185.

[3] Песин, Я. Б. *Эргодическая теория гладких динамических систем. Гл. 7.// Общая теория гладких гиперболических систем. Динамические системы-2. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления,* **2** / Я. Б. Песин. – М.: ВИНИТИ, 1985. – С. 123 – 173.

[4] Аносов, Д. В. *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* / Д. В. Аносов // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1967. – Т. 90. – 211 с.

[5] Боуэн, Р. *Символическая динамика* / Р. Боуэн – М.: Мир, 1979. – 245 с.

[6] Качуровский, А. Г. *Скорости сходимости в эргодических теоремах* / А. Г. Качуровский // УМН. – 1996. – Т. 51. – С. 73 – 124.

[7] Orey, L. *Deviation of trajectory averages and the defect in Pesin's formula for Anosov diffeomorphisms* / L. Orey, S. Pelikan // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 315. – P. 741 – 753.

[8] Kifer, Y. *Large deviations in dynamical systems and stochastic processes* / Y. Kifer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 321. – P. 505 – 524.

[9] Young, L.-S. *Large deviations in dynamical systems* / L.-S. Young // Trans. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 318. – P. 525 – 543.

[10] Waddington, S. *Large deviation asymptotics for Anosov flows* / S. Waddington // Ann. Inst. Henri Poincaré. – 1996. – Vol. 13. – P. 44 – 484.

[11] Lalley, S. *Distribution of periodic orbits of symbolic and Axiom A flows* / S. Lalley // Adv. Appl. Math. – 1987. – Vol. 8. – P. 154 – 193.

[12] Абрамовец, М. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами* / М. Абрамовец, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

УДК 514.7

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ФИНИТНОГО СИГНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

М. С. Козаченко, В. В. Славский

PERIODIC COMPONENT OF FINITE SIGNAL IN THE LEBESGUE SPACE

M. S. Kozachenko, V. V. Slavsky

Важной прикладной задачей является спектральный анализ финитных сигналов [1]. Классический подход к решению данной задачи – анализ Фурье и различные его модификации (например вейвлет-анализ). Анализ Фурье наиболее приспособлен для исследования сигналов рассматриваемых на всей временной оси. Финитные сигналы, определенные на конечном промежутке, при этом приходится "искусственно" заменять на неограниченные.

Иногда для исследования сигнала не требуется определения его спектра, а достаточно найти его периодическую составляющую. В данной работе предлагается непосредственный прямой вариационный метод нахождения периодической составляющей финитных сигналов в пространствах Лебега $L_2[a,b]$ *и в более общем случае в пространствах Соболева* $W_2^p[a,b]$*. Находится наилучшая в смысле норм этих пространств периодическая составляющая. Для конечных цифровых сигналов данный алгоритм реализован в системе MatLab.*

Spectral analysis of signals is An important applied problem, in particular the allocation of the periodic component. The classical approach to this task solution - Fourier Analysis and its various modifications (such as wavelet analysis). Fourier analysis is best suited for the study of signals under consideration for the entire time axis.

The finite signals are defined on a finite interval with the "artificial" must be replaced at no limited. In this paper, a direct variational method for studying finite signals in Lebesgue spaces $L_2[a,b]$ *and more generally in the Sobolev spaces* $W_2^p[a,b]$ *. Located in the best sense of the norms of these spaces, the periodic component. For finite digital signals, the algorithm is implemented in the MatLab.*

Ключевые слова: периодическая составляющая, спектральный анализ, анализ Фурье, вариационный метод, конечный сигнал.

Keywords: periodic component, spectral analysis, Fourier analysis, variational method, finite signals.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (№ 08-01-98001), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ РФ (№ НШ-5682.2008.1), а также при поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).