УДК 517.987+519.214

НЕРАВЕНСТВА, ПОЗВОЛЯЮЩИЕ ОЦЕНИВАТЬ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев

INEQUALITIES FOR ESTIMATING CONVERGENCE RATES IN ERGODIC THEOREMS

A. G. Kachurovskii, V. V. Sedalishchev

Получены неравенства на скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана, вытекающие из эквивалентности друг другу степенной скорости сходимости в этой теореме, и степенной же (с тем же показателем степени) особенности в нуле спектральной меры усредняемой функции относительно соответствующей динамической системы. Эта же скорость сходимости оценена также через корреляционные коэффициенты. Отдельно рассмотрены важные для возможных приложений частные случаи степенной и экспоненциальной скорости убывания корреляционных коэффициентов. Получены оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа по известной скорости сходимости в теореме фон Неймана. Все результаты работы имеют точные аналоги для стационарных в широком смысле стохастических процессов.

Mean ergodic theorem convergence rate inequalities are obtained. The existence of such inequalities is implied by the equivalence between power-function convergence rate in this theorem and the presence of the power singularity (with the same exponent) of averaging function spectral measure at zero which is related with corresponding dynamical system. The same convergence rate was also estimated via correlation coefficients. Important for possible applications particular cases when correlation coefficients decay rate is power and exponential were considered apart. Estimates for pointwise ergodic theorem convergence rate were obtained for the case when mean ergodic theorem convergence rate is known. All results of the paper have their exact analogues for stationary in the wide sense stochastic processes.

Ключевые слова: эргодическая теорема фон Неймана, эргодическая теорема Биркгофа, скорости сходимости эргодических средних, спектральные меры динамической системы, стационарные в широком смысле стохастические процессы.

Keywords: mean ergodic theorem, pointwise ergodic theorem, ergodic averages convergence rate, spectral measures of dynamical system, stationary in the wide sense stochastic processes.

Работа поддержана программой государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-8508-2010.1).

1. Введение

Пусть T — эндоморфизм пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ с вероятностной мерой. Напомним, что эндоморфизмом пространства Ω называется отображение $T : \Omega \to \Omega$, такое, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$, и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Автоморфизмом пространства Ω называют его п.в. взаимнооднозначный эндоморфизм.

Для $f \in L_2(\Omega)$ введём эргодические средние

$$A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f \circ T^k.$$

Эргодические теоремы фон Неймана и Биркгофа гарантируют существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} A_n f = f^*$, первая теорема в смысле $L_2(\Omega)$, вторая — почти всюду в Ω. Для измерения скорости сходимости п.в. используются

$$P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{k\geq n} |A_k f - f^*| \geq \varepsilon\right\},$$

поскольку сходимость для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ последовательности P_n^ε к нулю эквивалентна сходимости п.в. $A_n f$ к f^*. Через U_T обозначим изометрический оператор (называемый иногда оператором Купмана), действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ по формуле $U_T f = f \circ T$ (в случае, когда T — автоморфизм, этот оператор, более того, является унитарным). Корреляционные коэффициенты $b_k f$ определим так: $b_k f = (U_T^k f, f)$ при $k \geq 0$ и $b_k f = \overline{b_{-k} f}$ при $k < 0$. Тогда, в силу теоремы Бохнера-Хинчина, корректно определена (единственная) спектральная мера σ_f усредняемой функции относительно динамической системы, связанной с эндоморфизмом T, т. е. такая конечная борелевская мера на единичной окружности, что

$$b_k f = \int\limits_{(-\pi,\pi]} e^{ikx} d\sigma_f(x)$$

для всех целых k.

2. Описание реализуемых скоростей сходимости в теореме фон Неймана и их численные оценки при наличии информации о спектральной мере

Скорость сходимости в теореме фон Неймана не может быть произвольной: соотношение $\|A_nf - f^*\|_2^2 = O(n^{-\alpha})$ при $\alpha > 2$ может иметь место лишь при $f - f^* = 0$ тождественно (см., например, следствие 5 в [2]), т. е. степенной скорости сходимости с показателем $\alpha > 2$ не бывает, за исключением упомянутого вырожденного случая. Про оставшийся диапазон $\alpha \in [0, 2]$ известно следующее: в [5] было показано (см. теорему 3), что для $\alpha \in [0, 2)$ утверждение $\|A_nf - f^*\|_2^2 = O(n^{-\alpha})$ эквивалентно утверждению $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] = O(\delta^\alpha)$ при $\delta \to 0$, а для $\alpha = 2$ эта эквивалентность не имеет места (аналогичные результаты для случая непрерывного времени были доказаны в работе [6]), более того, в [3] доказана импликация $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] = O(\delta^2) \Rightarrow \|A_nf - f^*\|_2^2 = O(\frac{\ln n}{n^2})$. Отметим также, что случай $\alpha = 2$ эквивалентен когомологичности нулю функции f, т. е. условию $f = g \circ T - g$ для некоторой функции $g \in L_2(\Omega)$ (см. лемму 5 в [9]).

Следующая теорема уточняет уже упоминавшуюся теорему-критерий 3 из [5] в направлении перехода от асимптотических соотношений к алгебраическим неравенствам и теорему 1 из [7] в направлении уменьшения фигурирующих в ней констант и исследования неравенств на точность.

Теорема 1. *Пусть $\alpha \in [0, 2)$. Тогда:*

1) Если для всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le A\delta^\alpha$, то
при $\alpha \in [0, 1)$:

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{-1-\alpha} - \left(\frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} - 2\right)n^{-2} - n^{-2-\alpha}\right) < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}n^{-1-\alpha}\right);$$

при $\alpha = 1$:

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 < A\pi\left(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2} - n^{-3}\right) < A\pi(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2});$$

при $\alpha \in (1, 2)$:

$$\|A_nf - f^*\|_2^2 < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + \left(4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\right)n^{-2} - \left(2 + \frac{1}{\alpha-1}\right)n^{-1-\alpha} - n^{-2-\alpha}\right) < A\pi^\alpha\left(\frac{2}{2-\alpha}n^{-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1})n^{-2}\right).$$

2) Если $\|A_nf - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, то для всех $\delta \in (0, \pi]$ будет $\sigma_{f-f^*}(-\delta, \delta] \le C\delta^\alpha$, где $C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4}B, & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}}B, & 1 \le \alpha < 2 \end{cases}$, причём C — неулучшаема в том смысле, что её нельзя уменьшить.

Как очевидное следствие этой теоремы, получаем следующее замечание, уточняющее асимптотическую теорему 4 из [5] и замечание 2 из [7].

Замечание 1. Если мера σ_{f-f^*} абсолютно непрерывна с плотностью $\rho \in L_\infty(-\pi, \pi]$, то $\|A_nf - f^*\|_2^2 < 2\pi\|\rho\|_\infty(2n^{-1} + \frac{\ln n}{n^2})$ для любого натурального n.

Следующая лемма, использовавшаяся при доказательстве теоремы 1, интересна также и сама по себе, поскольку показывает влияние меры σ_{f-f^*} на скорость сходимости $\|A_nf - f^*\|_2^2$ без предположения наличия степенной особенности в нуле меры σ_{f-f^*}, как это было в условии теоремы 1.

Лемма 1. *Положим $S_k = \sigma_{f-f^*}(-\frac{\pi}{k}, \frac{\pi}{k}]$, $\sigma_k = S_k - S_{k+1} = \sigma_{f-f^*}\{(-\frac{\pi}{k}; -\frac{\pi}{k+1}] \cup (\frac{\pi}{k+1}; \frac{\pi}{k}]\}$. Тогда для любого натурального n выполнено неравенство*

$$\frac{4}{\pi^2}S_n \le \|A_nf - f^*\|_2^2 \le S_n + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)^2\sigma_k = \frac{1}{n^2}\left(S_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)S_k\right).$$

3. Оценка скорости сходимости в теореме фон Неймана при наличии информации о корреляционных коэффициентах

Как уже отмечалось выше, скорость сходимости в эргодической теореме фон Неймана полностью определяется поведением меры σ_{f-f^*} в окрестности нуля, а так как определение этой меры вводится через корреляционные коэффициенты, то не вызывает удивления факт возможности получения оценок скорости сходимости через корреляционные коэффициенты. Следующая ниже теорема даёт либо эти оценки, либо даже тождества, выражающие $\|A_n f - f^*\|_2^2$ через всю совокупность $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}$ корреляционных коэффициентов при тех или иных предположениях о свойствах этих коэффициентов, уточняя тем самым теорему 6 из [5] и теорему 2 из [7].

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

1) $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \frac{1}{n} b_0(f-f^*) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1} |b_k(f-f^*)|$.

2) Если $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty} \in l_p$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *то* $\|A_n f - f^*\|_2^2 \le 2\|\{b_k(f-f^*)\}\|_p n^{-\frac{1}{p}}$.

3) Если ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f-f^*)$ *сходится абсолютно, то мера* σ_{f-f^*} *абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью* ρ; *при этом*

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f-f^*)e^{ikx}$$

для всех $x \in (-\pi, \pi]$, *и, следовательно,* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k(f-f^*) = 2\pi\rho(0)$, *причём*

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} = \\ = -\frac{1}{n^2}\sum_{|k|<n} |k| b_k(f-f^*) - \frac{1}{n}\sum_{|k|\ge n} b_k(f-f^*).$$

4) Если, более того, ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} k b_k(f-f^*)$ *сходится абсолютно, то, более того, плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференцируема; при этом*

$$\rho'(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik b_k(f-f^*)e^{ikx}$$

для всех $x \in (-\pi, \pi]$ *и, следовательно,* $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f-f^*) = 2\pi(\rho')^c(0)$, *где*

$$(\rho')^c(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |k| b_k(f-f^*)e^{ikx}$$

— сопряжённая функция к $\rho'(x)$ *(см. [1], глава VIII), причём*

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2} = \\ = \frac{1}{n^2}\sum_{|k|\ge n} (|k|-n) b_k(f-f^*).$$

Для некоторых типов динамических систем (например, системы бильярдного типа, системы Аносова) при надлежащем выборе функции f, по которой производится усреднение, удаётся получить оценки на скорости убывания корреляционных коэффициентов, оказывающиеся степенными или экспоненциальными. Предыдущая теорема с учётом таких частных случаев убывания $\{b_k(f-f^*)\}_{k=0}^{\infty}$ приводит нас к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть корреляционные коэффициенты со степенной скоростью стремятся к нулю, т.е. для некоторой положительной константы* C *при всех натуральных* n *выполнено неравенство* $|b_n(f-f^*)| \le Cn^{-\gamma}$. *Тогда:*

1) Если $0 \le \gamma < 1$, *то для всех* n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \|f-f^*\|_2^2 n^{-1} + \frac{2C}{1-\gamma}n^{-\gamma} \le \\ \le \left(\|f\|_2^2 + \frac{2C}{1-\gamma}\right)n^{-\gamma}.$$

2) Если $\gamma = 1$, *то для всех* n

$$\|A_n f - f^*\|_2^2 \le \|f-f^*\|_2^2 n^{-1} + 2C\frac{\ln n + \frac{n-1}{n}}{n} < \\ < \left(\|f\|_2^2 + 2C\right)\frac{\ln n + 1}{n}.$$

Если $\gamma > 1$, *то мера* σ_{f-f^*} *абсолютно непрерывна с непрерывной (неотрицательной) плотностью* ρ; *при этом* $2\pi\rho(0) \le \|f\|_2^2 + 2C\frac{\gamma}{\gamma-1}$, *причём:*

3) Если $1 < \gamma < 2$, *то для всех* $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < \\ < 2C\left(\frac{1}{\gamma-1} + \frac{1}{2-\gamma}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)n^{-\gamma}.$$

4) Если $\gamma = 2$, *то для всех* $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1}\right| < \\ < 2C\left(\ln n + 2 + \frac{1}{n(n-1)}\right)n^{-2}.$$

5) Если $\gamma > 2$, *то, более того, плотность* ρ *меры* σ_{f-f^*} *непрерывно дифференцируема; при этом* $|2\pi(\rho')^c(0)| \le 2C\frac{\gamma-1}{\gamma-2}$, *причём для всех* $n \ge 2$

$$\left|\|A_n f - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2}\right| < \\ < \frac{2C}{\gamma-2}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 n^{-\gamma}.$$

6) Если, более того, корреляционные коэффициенты убывают экспоненциально, т.е. $|b_n(f-f^*)| \le Ae^{-Bn}$ *для некоторых констант* $A > 0$ *и* $B > 0$ *при всех* n *(что эквивалентно аналитичности плотности* ρ *— см., например, [1], глава I, §25), то*

$$2\pi\rho(0) \le \|f\|_2^2 + \frac{2A}{e^B - 1},$$

$$|2\pi(\rho')^c(0)| \le \frac{2A}{(e^B-1)(1-e^{-B})}$$

и для всех n

$$\left|\|A_nf - f^*\|_2^2 - 2\pi\rho(0)n^{-1} + 2\pi(\rho')^c(0)n^{-2}\right| \le$$
$$\le 2A\frac{e^B}{e^B-1}\left(1+\frac{1}{e^B-1}\cdot\frac{1}{n}\right)\frac{e^{-Bn}}{n}.$$

4. Неравенства, связывающие между собой скорости сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа

Как было показано в [5], нельзя сказать что-либо о скорости сходимости $\|A_nf - f^*\|_2^2$, зная только поведение P_n^ε; в то же время в работах [3], [4] и [5] приводились оценки асимптотики убывания P_n^ε при известной скорости убывания $\|A_nf - f^*\|_2^2$, но они были только в терминах "O" и "o". Следующая теорема уточняет эти результаты в направлении перехода от асимптотических оценок к алгебраическим.

Теорема 4. *Пусть для любого натурального n выполнено неравенство $\|A_nf - f^*\|_2^2 \le Bn^{-\alpha}$, где B — некоторая положительная константа, $\alpha \in (0,2]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при всех натуральных $n \ge 2$ выполнено неравенство:*

$$P_n^\varepsilon = \lambda\left\{\sup_{k\ge n}|A_kf - f^*| \ge \varepsilon\right\} < \varphi(\alpha,n)B\varepsilon^{-2},$$

причём в зависимости от α:

1. Если $\alpha \in (0,1)$, то
$\varphi(\alpha,n) = \frac{2^{1+\alpha}}{1-2^{-\alpha}}\left(1+\frac{1}{(1-2^{\frac{\alpha-1}{2}})^2}\right)n^{-\alpha}$.

2. Если $\alpha = 1$, то $\varphi(\alpha,n) = 8\frac{(1+\log_2 n)^2+3}{n}$.

3. Если $\alpha \in (1,2]$, то

$\varphi(\alpha,n) = 8\left(1+\frac{\pi^2}{6}\frac{1+2^{1-\alpha}}{(1-2^{1-\alpha})^3}\right)n^{-1}$.

Замечание 2. При $\alpha = 2$ неравенство в предыдущей теореме можно заменить на

$$\lambda\left\{\sup_{k\ge n}|A_kf - f^*| > \varepsilon\right\} < Bn^{-1}\varepsilon^{-2}.$$

Замечание 3. Как показано в [5] (пример 1 после доказательства теоремы 11), оценка пункта 1 предыдущей теоремы асимптотически (по n) неулучшаема.

5. Связь полученных результатов с теорией стационарных в широком смысле стохастических процессов

Напомним (см., например, [8], гл. 6), что стационарными в широком смысле процессами $\xi = (\dots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\dots)$ (с конечным вторым моментом) называются последовательности комплекснозначных случайных величин, удовлетворяющие (помимо требования существования конечного второго момента) ещё двум условиям: $\mathrm{E}\xi_n = \mathrm{E}\xi_0$ и $\mathrm{cov}(\xi_{n+m},\xi_n) = \mathrm{cov}(\xi_m,\xi_0)$ при всех целых m и n. Без потери общности можно считать, что $\mathrm{E}\xi_0 = 0$, что мы и будем делать всюду в дальнейшем.

Введём ковариационную функцию $R(n)$, определённую на множестве всех целых чисел, по формуле $R(n) = \mathrm{cov}(\xi_n,\xi_0)$, тогда, в силу теоремы Герглотца, найдётся функция $F(\lambda)$, (называемая спектральной функцией стационарного процесса ξ), такая, что будет справедливо спектральное представление ковариационной функции:

$$R(n) = \int\limits_{(-\pi,\pi]} e^{i\lambda n}F(d\lambda)$$

для всех целых n.

Далее нам потребуются стационарные в узком смысле случайные последовательности (см., например, [8], гл. 5). Пусть $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots)$ — последовательность случайных величин. Введём следующее обозначение: $\theta_k\xi = (\xi_{k+1},\xi_{k+2},\dots)$. Говорят, что последовательность ξ стационарная в узком смысле, если для любого натурального $k \ge 1$ распределения вероятностей для последовательностей $\theta_k\xi$ и ξ совпадают. Имеется тесная связь между эндоморфизмами пространств с вероятностной мерой и стационарными в узком смысле процессами: если $\xi_1(\omega)$ — случайная величина на $(\Omega,\mathfrak{F},\lambda)$, а T — эндоморфизм, как и ранее, этого пространства, то последовательность $(\xi_1,\xi_1(T\omega),\xi_1(T^2\omega),\dots)$ будет стационарной в узком смысле, т. е. наличие эндоморфизма позволяет построить стационарную в узком смысле последовательность. В определённом смысле верно и обратное: для каждой стационарной последовательности ξ можно указать вероятностное пространство $(\tilde\Omega,\tilde{\mathfrak{F}},\tilde\lambda)$, последовательность $\tilde\xi$ случайных величин в нём, совпадающую по распределению с ξ и эндоморфизм $\tilde T$, такие, что $\tilde\xi = (\tilde\xi_1(\tilde\omega),\tilde\xi_1(\tilde T\tilde\omega),\tilde\xi_1(\tilde T^2\tilde\omega),\dots)$ для некоторой случайной величины $\tilde\xi_1(\tilde\omega)$. Доказательства этих фактов можно найти в главе 5 монографии [8].

Стационарные в широком смысле процессы, оправдывая своё название, содержат как подкласс стационарные в узком смысле процессы (см. главу 6 в [8]). Несмотря на это, приведённые ранее теоремы 1–4 имеют очевидные точные аналоги для стационарных в широком смысле процессов. Приведём здесь соответствующий аналог теоремы 1.

Теорема 5. *Пусть $\{X_n, n\in\mathbb{Z}\}$ — стационарный в широком смысле процесс (с конечным вторым моментом), $\mathbf{E}X_n = 0$, $F(\lambda)$ — спектральная функция, $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1}X_k$ и пусть $\alpha \in [0,2)$. Тогда:*

1) Если для некоторой положительной кон-

станты A при всех $\delta \in (0, \pi]$ выполняется неравенство $F(\delta) - F(-\delta) \le A\delta^\alpha$, то для любого натурального n
при $\alpha \in [0, 1)$:

$$\mathsf{D}\,S_n < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \right. \\ \left. -(\frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} - 2) - n^{-\alpha} \right) < \\ < A\pi^\alpha (\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha});$$

при $\alpha = 1$:

$$\mathsf{D}\,S_n < A\pi(2n + \ln n - n^{-1}) < A\pi(2n + \ln n);$$

при $\alpha \in (1, 2)$:

$$\mathsf{D}\,S_n < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}) - \right. \\ \left. -(2 + \frac{1}{\alpha-1}) n^{1-\alpha} - n^{-\alpha} \right) < \\ < A\pi^\alpha \left(\frac{2}{2-\alpha} n^{2-\alpha} + (4 - \frac{2}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}) \right).$$

2) Если для некоторой положительной константы B при всех натуральных n выполняется неравенство $\mathsf{D}\,S_n \le Bn^{2-\alpha}$, то для любого $\delta \in (0, \pi]$

$$F(\delta) - F(-\delta) \le C\delta^{2-\alpha}, \text{ где } C = \begin{cases} \frac{\pi^{2-\alpha}}{4} B, & 0 \le \alpha < 1 \\ \frac{\pi^{2-\alpha}}{2^{3-\alpha}} B, & 1 \le \alpha < 2 \end{cases}$$

причем константа C неулучшаема в том смысле, что её нельзя уменьшить.

Аналог теоремы при $\alpha = 2$ не имеет места ни с какими константами, а степенного убывания $\mathsf{D}\,S_n$ (случай $\alpha > 2$) при $X_n \not\equiv 0$ просто не бывает.

Литература

[1] Бари, Н. К. *Тригонометрические ряды* / Н. К. Бари. – М.: Физматгиз, 1961.

[2] Гапошкин, В. Ф. *Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями* / В. Ф. Гапошкин // Извест. АН СССР. Сер. матем. – 1975. – Том 39, №6. – С. 1366 – 1392.

[3] Гапошкин, В. Ф. *О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов* / В. Ф. Гапошкин // Математические заметки. – 1998. – Том 64, №3. – С. 366 – 372.

[4] Гапошкин, В. Ф. *Несколько примеров к задаче об ε-уклонениях для стационарных последовательностей* / В. Ф. Гапошкин // Теория вероятностей и её применения. – 2001. – Том 46, №2. – С. 370 – 375.

[5] Качуровский, А. Г. *Скорости сходимости в эргодических теоремах* / А. Г. Качуровский // УМН. – 1996. – Том 51, № 4. – С. 73 – 124.

[6] Качуровский, А. Г. *О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем* / А. Г. Качуровский, А. В. Решетенко // Матем. сб. – 2010. – Том 201, № 4. – С. 25 – 32.

[7] Качуровский, А. Г. *О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана* / А. Г. Качуровский, В. В. Седалищев // Математические заметки. – 2010. – Том 87, № 5. – С. 756 – 763.

[8] Ширяев, А. Н. *Вероятность* / А. Н. Ширяев. – М.: Наука, 1989.

[9] Browder, F. *On the iteration of transformations in noncompact minimal dynamical systems* / F. Browder // Proc. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 9, no. 5. – P. 773 – 780.