$$= \int_{\varphi(U \cap \partial X)} \psi^* \omega.$$

Таким образом, выбрав на ∂X конечное покрытие и разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, получаем (5). $\square$

Литература

[1] Водопьянов, С. К. *Интегрирование по Лебегу: учебное пособие* / С. К. Водопьянов. – Новосибирск: НГУ, 2011. – 144 с.

[2] Гольдштейн, В. М. *Дифференциальные формы на липшицевом многообразии* / В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Сиб. мат. журн. – 1982. – Т. 23, 2. – С. 16 – 30.

[3] Гольдштейн, В. М. *Интегральное представление интеграла дифференциальной формы* / В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // *Функциональный анализ и математическая физика*. – Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. – С. 53 – 87.

[4] Спивак, М. *Математический анализ на многообразиях* / М. Спивак. – М.: Мир, 1968. – 164 с.

[5] Стейн, И. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* / И. М. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

[6] Федерер, Г. *Геометрическая теория меры* / Г. Федерер. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 760 с.

УДК 517.988.2, 514.763.2

ИЗОМЕТРИИ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ-СДВИГОВ

Д. В. Исангулова

ISOMETRIES ON ROTO-TRANSLATION GROUP

D. V. Isangulova

Описана группа C^2 -гладких изометрий на контактном субримановом многообразии — группе поворотов-сдвигов. Найдены условия, при которых векторное поле порождает локальную однопараметрическую группу контактных или локально билипшицевых преобразований группы поворотов-сдвигов.

We describe the group of C^2 -smooth isometries on contact sub-Riemannian manifold, precisely on roto-translation group. We find the conditions providing for a vector field to generate the local one-parameter group of contact or local biLipschitz transformations of roto-translation group.

Ключевые слова: группа поворотов-сдвигов, изометрия, однопараметрическая группа преобразований.

Keywords: roto-translation group, isometry, one-parameter group of transformations.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11-01-00819) и Совета по грантам Президента РФ по поддержке Ведущих научных школ (НШ-6613.2010.1).

1. Введение

В настоящей работе мы исследуем изометрические и билипшицевые отображения группы поворотов-сдвигов $\mathcal{RT}$ (roto-translation group). Группа поворотов-сдвигов — это трехмерное топологическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2 \times S^1$, с координатами (x, y, θ) и умножением

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) &= \\ &= (x_0 + x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0, y_0 + x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0, \\ &\quad \theta_0 + \theta). \end{aligned}$$

Векторные поля

$$\begin{aligned} A &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, & B &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ C &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

являются левоинвариантными. При этом выполняются следующие коммутационные условия:

$$[A, B] = -C, \quad [C, B] = A, \quad [A, C] = 0.$$

Заметим, что алгебра Ли группы $\mathcal{RT}$ не является нильпотентной.

На группе поворотов-сдвигов можно ввести субриманову структуру, то есть выделить горизонтальное подрасслоение $H = \text{span}\{A, B\}$ в касательном расслоении, которое своими коммутаторами порождает все касательное расслоение и определяет субримановую метрику (метрику Карно — Каратеодори). Метрика Карно — Каратеодори d задается как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор принадлежит H почти всюду). Для измерения длин горизонталь-

ных кривых введем такое внутреннее произведение на H , при котором векторные поля A и B ортонормированы.

Отметим, что локально геометрия группы поворотов-сдвигов близка к группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1$, поскольку $\mathbb{H}^1$ является касательным конусом к $\mathcal{RT}$ в смысле Громова [3]. Подробное описание группы $\mathcal{RT}$ с явным видом геодезических можно найти в книге [1].

Группа поворотов-сдвигов возникает в вопросах моделирования неголономного движения и оптимального контроля. Рассмотрим простейший пример средства передвижения — одноколесный велосипед. Для моделирования его движения в плоскости введем стандартные координаты на плоскости: (x, y) , и переменную θ , описывающую угол отклонения колеса от оси x . Пространство $\mathbb{R}^2 \times S^1$ описывает все возможные положения велосипеда. При прямолинейном движении без изменения угла, путь можно задать как $(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta)$. Беря производную по переменной t , получаем одно из возможных направлений движения: $A = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}$. Поскольку велосипедист может поворачивать колесо, стоя на месте, второе направление движения — это просто $B = \frac{\partial}{\partial \theta}$. Таким образом, мы получаем группу $\mathcal{RT}$ в качестве модели движения одноколесного велосипеда. Отметим, что мы не можем начинать движения в направлении векторного поля $C = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}$, поскольку оно ортогонально оси колеса. Однако, комбинируя движение вперед и повороты, велосипедист может достичь любой точки на плоскости с любым наперед заданным углом θ . Таким образом, нахождение геодезических в метрике Карно — Каратеодори d эквивалентно задаче нахождения оптимального пути.

Геометрия группы поворотов-сдвигов возникает также в задаче визуализации при моделировании восприятия человеческим мозгом плоского черно-белого изображения (см. работы А. Сартти и Дж. Читти [2], Р. К. Хладки и С. Д. Полса [4]). В построенной модели (x, y) — координаты точки на плоскости, а θ — направление градиента изменения цвета. То есть предполагается, что человек видит не сам цвет, а изменение цвета, что находится в полном соответствии с физиологическими исследованиями (см., например, Ж. Петито [6]). Построен алгоритм [4] восстановления закрытой части изображения с использованием минимальных поверхностей в субримановой метрике.

Настоящая работа посвящена исследованию изометрий, контактных и билипшицевых отображений на группе $\mathcal{RT}$. Напомним, что гомеоморфизм $F: \Omega \rightarrow \Omega'$ областей $\Omega, \Omega' \subset \mathcal{RT}$ называется *изометрией*, если он сохраняет расстояние: $d(F(\xi), F(\eta)) = d(\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \Omega$. В следующей теореме приведено описание группы C^2 -гладких изометрий.

Теорема 1. *Всякая C^2 -гладкая изометрия на*

группе $\mathcal{RT}$ есть композиция следующих отображений:

$$\begin{aligned} l_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y, \theta) &= (x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta), \\ \iota(x, y, \theta) &= (-x, y, -\theta) \\ \sigma(x, y, \theta) &= (-x, -y, \theta) \end{aligned} \quad \text{— отражения.}$$

Заметим, что, в отличие от евклидова пространства или группы Гейзенберга, на группе $\mathcal{RT}$ не определены аналоги поворотов.

Пусть Ω — область в $\mathcal{RT}$. C^1 -гладкое отображение $F: \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$ называется *контактным*, если оно сохраняет горизонтальное пространство: $AF(\xi), BF(\xi) \in H_{F(\xi)}$ для всех $\xi \in \Omega$. Известно (см., например, [7]), что гладкие липшицевые отображения являются контактными. Приведенное понятие контактности совпадает с классическим, поскольку на $\mathcal{RT}$ определена контактная левоинвариантная форма $\omega = -\sin \theta dx + \cos \theta dy$. При этом контактная структура согласована с субримановой: $\ker \omega = H$.

Говорят, что векторное поле v *генерирует поток* отображений F_s , если $\frac{d}{ds} F_s = v \circ F_s$, $F_0 = id$. Поле v называется также *инфинитезимальным генератором* потока F_s , причем F_s будет (локальной) однопараметрической группой преобразований. В теореме 2 приведены условия на v , при которых генерируемый поток является группой контактных преобразований.

Теорема 2. *Векторное поле вида*

$$v = -BqA + AqB + qC$$

(здесь q — произвольная гладкая вещественнозначная функция) генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований. Обратно, всякое гладкое векторное поле v , которое генерирует локальную однопараметрическую группу контактных преобразований, имеет такой вид с $q = \langle \omega, v \rangle$.

Теорема 2 показывает, в частности, что пространство контактных отображений на группе $\mathcal{RT}$ бесконечномерно.

Далее мы исследуем следующий вопрос: когда контактный поток F_s будет потоком локально билипшицевых отображений? Напомним, что отображение $F: \Omega \rightarrow \mathcal{RT}$, $\Omega \subset \mathcal{RT}$ называется *локально L -билипшицевым*, $L \geq 1$, если для всякой точки $\xi \in \Omega$ определена окрестность $U \Subset \Omega$, такая, что $\frac{1}{L}d(\zeta, \eta) \leq d(F(\zeta), F(\eta)) \leq Ld(\zeta, \eta)$ для всех $\zeta, \eta \in U$. Ответ дает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть q — гладкая функция и векторное поле $v = -BqA + AqB + qC$ порождает локальную однопараметрическую группу преобразований F_s . Если*

$$k = \sup \sqrt{(ABq)^2 + (BAq)^2 + \frac{1}{2}(A^2q - B^2q - q)^2} < +\infty,$$

то F_s — локально L_s -билипшицево с

$$\frac{1}{2} \left(L_s^2 + \frac{1}{L_s^2} \right) \leq e^{2k|s|}.$$

При доказательстве теорем 2 и 3 мы будем опираться на работу [5], где доказаны сходные факты для контактных и квазиконформных потоков группы Гейзенберга $\mathbb{H}^1$.

Несколько слов о структуре работы. Во втором параграфе доказывается теорема 1. Третий параграф посвящен доказательству теорем 2 и 3. Также в нем приведены два примера инфинитезимальных генераторов изометрических потоков.

2. Описание C^2 -гладких изометрий

Нетрудно проверить, что левые сдвиги и отражения являются изометриями, причем

$$\begin{aligned} \iota^2 &= \sigma^2 = id, & \iota \circ \sigma &= \sigma \circ \iota, \\ \iota \circ l_{(x_0, y_0, \theta_0)} &= l_{\iota(x_0, y_0, \theta_0)} \circ \iota, \\ \sigma \circ l_{(x_0, y_0, \theta_0)} &= l_{\sigma(x_0, y_0, \theta_0)} \circ \sigma. \end{aligned}$$

Покажем, что они порождают всю группу C^2 -гладких изометрий на $\mathcal{RT}$.

Пусть C^2 -гладкое отображение

$$F: (x, y, \theta) \mapsto (f, g, \varphi)$$

является изометрией. Тогда F будет дифференцируемым в субримановом смысле (hc -дифференцируемым, см., например, [7]) и, в частности, F будет контактным, то есть выполняется

$$\begin{aligned} AF(\xi) &= a_{11}A(\zeta) + a_{21}B(\zeta), \\ BF(\xi) &= a_{12}A(\zeta) + a_{22}B(\zeta), \end{aligned}$$

где $\xi = (x, y, \theta)$, $\zeta = F(\xi)$, или, эквивалентно:

$$\begin{cases} Af = a_{11} \cos \varphi, \\ Ag = a_{11} \sin \varphi, \\ A\varphi = a_{21}, \end{cases} \quad \begin{cases} Bf = a_{12} \cos \varphi, \\ Bg = a_{12} \sin \varphi, \\ B\varphi = a_{22}. \end{cases}$$

Отсюда получаем так называемые условия контактности:

$$Af \sin \varphi = Ag \cos \varphi, \quad Bf \sin \varphi = Bg \cos \varphi. \quad (1)$$

Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ с элементами

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{Af}{\cos \varphi} = \frac{Ag}{\sin \varphi}, & a_{21} &= A\varphi, \\ a_{12} &= \frac{Bf}{\cos \varphi} = \frac{Bg}{\sin \varphi}, & a_{22} &= B\varphi \end{aligned} \quad (2)$$

называется *горизонтальным дифференциалом* и обозначается символом $D_h F$. Применяя левые сдвиги, если требуется, всюду далее будем считать, что $\cos \varphi \neq 0$ и $\sin \varphi \neq 0$.

Если F — изометрия, то как и в евклидовом случае $D_h F$ должен быть ортогональной матрицей. Очевидно, что

$$|a_{11}| = |a_{22}|, \quad |a_{12}| = |a_{21}|,$$

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1.$$

Рассмотрим последнее равенство: $a_{21}^2 + a_{22}^2 = (A\varphi)^2 + (B\varphi)^2 = 1$. Введем новую переменную функцию $\alpha: (x, y, \theta) \mapsto (-\pi, \pi]$, такую, что

$$A\varphi = -\cos \alpha, \quad B\varphi = \sin \alpha.$$

Далее рассмотрим два возможных случая: дет $D_h F > 0$ и $\det D_h F < 0$.

1) $\det D_h F > 0$. Тогда $a_{11} = a_{22}$, $a_{21} = -a_{12}$. Покажем, что все производные от f и g выражаются через φ и α . Действительно:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{11} = a_{22}, \\ a_{21} = -a_{12}, \end{cases} & \implies \\ \implies \begin{cases} \frac{Af}{\cos \varphi} = \frac{Ag}{\sin \varphi} = B\varphi, \\ \frac{Bf}{\cos \varphi} = \frac{Bg}{\sin \varphi} = -A\varphi, \end{cases} & \implies \\ \implies \begin{cases} Af = \cos \varphi \sin \alpha, \\ Bf = \cos \varphi \cos \alpha, \\ Ag = \sin \varphi \sin \alpha, \\ Bg = \sin \varphi \cos \alpha. \end{cases} \end{aligned}$$

Соответственно,

$$Cf = [B, A]f = \cos \varphi (B\alpha \cos \alpha + A\alpha \sin \alpha) - \sin \varphi$$

и

$$Cg = [B, A]g = \cos \varphi + \sin \varphi (B\alpha \cos \alpha + A\alpha \sin \alpha).$$

Для вычисления функции α мы воспользуемся соотношениями на коммутаторы: $[A, C] = 0$ и $[B, C] = A$. Имеем:

$$0 = [A, C]f = ACf - CAf = \sin \varphi B\alpha + \cos \varphi (\cos \alpha - A\alpha B\alpha \sin \alpha + 2AB\alpha \cos \alpha - BA\alpha \cos \alpha + (A\alpha)^2 \cos \alpha + A^2\alpha \sin \alpha), \quad (3)$$

$$0 = [B, C]f - Af = BCf - CBf - Af = \sin \varphi A\alpha + \cos \varphi (-A\alpha B\alpha \cos \alpha + AB\alpha \sin \alpha - 2BA\alpha \sin \alpha + (B\alpha)^2 \sin \alpha - B^2\alpha \cos \alpha), \quad (4)$$

$$0 = [A, C]g = ACg - CAg = -\cos \varphi B\alpha - \sin \varphi (\cos \alpha - A\alpha B\alpha \sin \alpha + 2AB\alpha \cos \alpha - BA\alpha \cos \alpha + (A\alpha)^2 \cos \alpha + A^2\alpha \sin \alpha), \quad (5)$$

$$0 = [B, C]g - Ag = BCg - CBg - Ag = \cos \varphi A\alpha - \sin \varphi (-A\alpha B\alpha \cos \alpha + AB\alpha \sin \alpha - 2BA\alpha \sin \alpha + (B\alpha)^2 \sin \alpha - B^2\alpha \cos \alpha). \quad (6)$$

Сравнивая (3) с (5), и (4) с (6), получаем, что

$$\begin{aligned} B\alpha &= 0, \\ \cos \alpha - A\alpha B\alpha \sin \alpha + 2AB\alpha \cos \alpha - BA\alpha \cos \alpha + (A\alpha)^2 \cos \alpha + A^2\alpha \sin \alpha &= 0, \\ A\alpha &= 0, \\ -A\alpha B\alpha \cos \alpha + AB\alpha \sin \alpha - 2BA\alpha \sin \alpha + (B\alpha)^2 \sin \alpha - B^2\alpha \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Откуда очевидно следует, что

$$\begin{aligned} A\alpha = B\alpha = 0, \quad \cos \alpha = 0 &\implies \\ \implies \alpha \equiv -\frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \alpha \equiv \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(x, y, \theta) &= (x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0, \\ x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0, \theta + \theta_0) &= \\ &= l_{(x_0, y_0, \theta_0)}(x, y, \theta). \end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(x, y, \theta) &= (-x \cos \theta_0 - y \sin \theta_0 + x_0, \\ -x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + y_0, \theta_0 - \theta) &= \\ &= l_{(x_0, y_0, \theta_0)} \circ \iota(x, y, \theta). \end{aligned}$$

2) $\det D_h F < 0$. Имеем $a_{11} = -a_{22}$, $a_{12} = a_{21}$. Как и в предыдущем случае, производные от f и g можно выписать через α и φ :

$$\begin{aligned} Af &= -\cos \varphi \sin \alpha, \quad Bf = -\cos \varphi \cos \alpha, \\ Cf &= \sin \varphi - \cos \varphi (B\alpha \cos \alpha + A\alpha \sin \alpha); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Ag &= -\sin \varphi \sin \alpha, \quad Bg = -\sin \varphi \cos \alpha, \\ Cg &= -\cos \varphi - \sin \varphi (B\alpha \cos \alpha + A\alpha \sin \alpha). \end{aligned}$$

Выписывая коммутационные соотношения $[A, C] = 0$ и $A = [C, B]$ для функций f и g , мы получим в точности те же самые уравнения (3)–(6), что и в предыдущем случае (с точностью до умножения на -1). Соответственно, функция α может быть равна только $-\frac{\pi}{2}$ или $\frac{\pi}{2}$.

Если $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(x, y, \theta) &= (-x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 + x_0, \\ -x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0 + y_0, \theta + \theta_0) &= \\ &= l_{(x_0, y_0, \theta_0)} \circ \sigma(x, y, \theta). \end{aligned}$$

Если $\alpha \equiv -\frac{\pi}{2}$, то

$$\begin{aligned} F(x, y, \theta) &= (x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 + x_0, \\ x \sin \theta_0 - y \cos \theta_0 + y_0, \theta_0 - \theta) &= \\ &= l_{(x_0, y_0, \theta_0)} \circ \iota \circ \sigma(x, y, \theta). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

3. Однопараметрические группы преобразований

3.1. Генератор контактного потока

В данном параграфе мы приведем доказательство теоремы 2.

Рассмотрим векторное поле

$$v = a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} + c \frac{\partial}{\partial \theta} = pA + cB + qC,$$

где

$$p = a \cos \theta + b \sin \theta, \quad q = -a \sin \theta + b \cos \theta,$$

и

$$a = p \cos \theta - q \sin \theta, \quad b = p \sin \theta + q \cos \theta.$$

Здесь мы воспользовались следующими простыми соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta A - \sin \theta C, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta A + \cos \theta C,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = B.$$

ШАГ 1. Пусть a, b, c, p, q — гладкие функции и поле v задает однопараметрическую группу контактных отображений $F_s = (f_s, g_s, \theta_s)$ в виде решения дифференциального уравнения:

$$\frac{d}{ds} F_s = v \circ F_s, \quad F_0 = id.$$

Поскольку F_s — контактные отображения, то выполнены условия (1). Продифференцируем их по переменной s и перейдем к пределу при $s \rightarrow 0$:

$$0 = \frac{d}{ds}(\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s) = \cos \varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} A f_s + \sin \varphi_s A \frac{df_s}{ds} + \sin \varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} A g_s - \cos \varphi_s A \frac{dg_s}{ds} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{s \rightarrow 0} \cos \theta c A x + \sin \theta A a + \sin \theta c A y - \cos \theta A b = c + \sin \theta A a - \cos \theta A b,$$

и

$$0 = \frac{d}{ds}(\sin \varphi_s B f_s - \cos \varphi_s B g_s) = \cos \varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} B f_s + \sin \varphi_s B \frac{df_s}{ds} + \sin \varphi_s \frac{d\varphi_s}{ds} B g_s - \cos \varphi_s B \frac{dg_s}{ds} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{s \rightarrow 0} \cos \theta c B x + \sin \theta B a + \sin \theta c B y - \cos \theta B b = \sin \theta B a - \cos \theta B b.$$

Отсюда выводим 2 соотношения:

$$c + \sin \theta A a - \cos \theta A b = 0$$

и

$$\sin \theta B a - \cos \theta B b = 0.$$

Следовательно,

$$Aq = A(-a \sin \theta + b \cos \theta) =$$

$$= -\sin \theta A a + \cos \theta A b = c$$

и

$$Bq = B(-a \sin \theta + b \cos \theta) =$$

$$= -\sin \theta B a - a \cos \theta + \cos \theta B b - b \sin \theta = -p.$$

Окончательно получаем, что v является инфинитезимальным генератором контактного потока, если

$$v = -Bq A + Aq B + q C,$$

где

$$\langle \omega, v \rangle = -a \sin \theta + b \cos \theta =$$

$$= -\sin \theta (p \cos \theta - q \sin \theta) + \cos \theta (p \sin \theta + q \cos \theta) = q.$$

Теорема 2 доказана в одну сторону.

ШАГ 2. Обратно, пусть q — гладкая функция и векторное поле $v = -Bq A + Aq B + q C$ порождает локальную однопараметрическую группу преобразований $F_s = (f_s, g_s, \theta_s)$. Нам надо показать, что F_s удовлетворяют условиям контактности (1). Пусть $\xi = (x, y, \theta) \in \mathcal{RT}$, $F(\xi) = \zeta = (x_1, y_1, \theta_1) \in \mathcal{RT}$. Имеем:

$$\frac{d}{ds}(\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s) = \cos \varphi_s c(\zeta) A f_s + \sin \varphi_s A(a \circ F_s) + \sin \varphi_s c(\zeta) A g_s - \cos \varphi_s A(b \circ F_s) =$$

$$= \cos \varphi_s Aq(\zeta) A f_s + \sin \varphi_s \left(\frac{\partial a}{\partial x_1} A f_s + \frac{\partial a}{\partial y_1} A g_s + \frac{\partial a}{\partial \theta_1} A \varphi_s \right) + \sin \varphi_s Aq(\zeta) A g_s -$$

$$- \cos \varphi_s \left(\frac{\partial b}{\partial x_1} A f_s + \frac{\partial b}{\partial y_1} A g_s + \frac{\partial b}{\partial \theta_1} A \varphi_s \right).$$

Выписывая функции a, b через функции p, q , а производные по x_1, y_1 через производные вдоль A, C , после несложных вычислений получаем, что

$$\frac{d}{ds}(\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s) =$$

$$= Cq(\zeta)(\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s).$$

Следовательно,

$$\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s = \text{const} \cdot e^{\int Cq(\zeta) ds}.$$

Подставляя начальные данные $(\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s)|_{s=0} = 0$ (так как $F_0 = \text{id}$ является контактным), выводим, что $\sin \varphi_s A f_s - \cos \varphi_s A g_s = 0$.

Аналогично проверяем, что

$$\frac{d}{ds}(\sin \varphi_s B f_s - \cos \varphi_s B g_s) =$$

$$= Cq(\zeta)(\sin \varphi_s B f_s - \cos \varphi_s B g_s), \quad \text{где}$$

$$(\sin \varphi_s B f_s - \cos \varphi_s B g_s)|_{s=0} = 0$$

и, следовательно, $\sin \varphi_s B f_s - \cos \varphi_s B g_s = 0$. Таким образом, F_s удовлетворяет системе (1) и является контактным.

Теорема 2 доказана.

3.2. Поток локально билипшицевых преобразований

Данный параграф посвящен доказательству теоремы 3. Прежде чем переходить к доказательству, приведем вспомогательную лемму.

Лемма. Пусть q — гладкая функция и векторное поле $v = -Bq A + Aq B + q C$ порождает локальную однопараметрическую группу контактных преобразований F_s . Тогда

$$\frac{d}{ds} D_h F_s = V \cdot D_h F_s,$$

$$V = \begin{pmatrix} -ABq & -B^2q - q \\ A^2q & BAq \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Положим $F = (f, g, \varphi)$ (мы будем опускать нижний индекс s),
 $D_h F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, где элементы матрицы $D_h F$

определяются соотношениями (2): $\xi = (x, y, \theta) \in \mathcal{RT}$, $F(\xi) = \zeta = (x_1, y_1, \theta_1) \in \mathcal{RT}$.

Проверим, что для любой C^1 -гладкой функции h выполнено правило дифференцирования композиции:

$$\begin{aligned} A(h \circ F(\xi)) &= \frac{\partial h}{\partial x_1}(\zeta) A f(\xi) + \frac{\partial h}{\partial y_1}(\zeta) A g(\xi) + \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\zeta) A \varphi(\xi) = (A h(\zeta) \cos \varphi - C h(\zeta) \sin \varphi) A f + \\ &\quad + (A h(\zeta) \sin \varphi + C h(\zeta) \cos \varphi) A f \operatorname{tg} \varphi + B h A \varphi = A h a_{11} + B h a_{21}, \\ B(h \circ F(\xi)) &= \frac{\partial h}{\partial x_1}(\zeta) B f(\xi) + \frac{\partial h}{\partial y_1}(\zeta) B g(\xi) + \frac{\partial h}{\partial \theta_1}(\zeta) B \varphi(\xi) = (A h(\zeta) \cos \varphi - C h(\zeta) \sin \varphi) B f + \\ &\quad + (A h(\zeta) \sin \varphi + C h(\zeta) \cos \varphi) B f \operatorname{tg} \varphi + B h B \varphi = A h a_{12} + B h a_{22}. \end{aligned}$$

Выпишем элементы матрицы $\frac{d}{ds} D_h F_s$ покомпонентно:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} a_{11} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{A f}{\cos \varphi} \right) = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d}{ds} (A f) + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{ds} A f = \frac{1}{\cos \varphi} A \left(\frac{df}{ds} \right) + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} c(\zeta) A f = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} A(a \circ F) + \operatorname{tg} \varphi c(\zeta) a_{11} = \frac{1}{\cos \varphi} (A a a_{11} + B a a_{21}) + \operatorname{tg} \varphi c(\zeta) a_{11} = v_{11} a_{11} + v_{12} a_{21}. \end{aligned}$$

Вычислим v_{11} и v_{12} . Для этого вспомним, что $a(\xi) = p(\xi) \cos \theta - q(\xi) \sin \theta$, $c = A q$ и $p = -B q$. Следовательно,

$$A a = A p \cos \theta - A q \sin \theta,$$

$$\begin{aligned} B a &= B p \cos \theta - p \sin \theta - B q \sin \theta - q \cos \theta = \\ &= (-B^2 q - q) \cos \theta. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} v_{11} &= \frac{1}{\cos \varphi} (A p(\zeta) \cos \varphi - A q(\zeta) \sin \varphi) + \\ &\quad + \operatorname{tg} \varphi A q(\zeta) = -A B q(\zeta), \\ v_{12} &= \frac{1}{\cos \varphi} B a(\zeta) = -B^2 q(\zeta) - q(\zeta). \end{aligned}$$

Аналогично выводим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} a_{12} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{B f}{\cos \varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} \frac{d}{ds} (B f) + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \frac{d\varphi}{ds} B f = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} B \left(\frac{df}{ds} \right) + \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} c(\zeta) B f = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} B(a \circ F) + \operatorname{tg} \varphi c(\zeta) a_{12} = \\ &= \frac{1}{\cos \varphi} (A a a_{12} + B a a_{22}) + \operatorname{tg} \varphi c(\zeta) a_{12} = \\ &= v_{11} a_{12} + v_{12} a_{22}. \end{aligned}$$

Осталось найти производные по s от a_{21} и a_{22} :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} a_{21} &= \frac{d}{ds} (A \varphi) = A \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \\ &= A(c \circ F) = A c(\zeta) a_{11} + B c(\zeta) a_{21} = \\ &= v_{21} a_{11} + v_{22} a_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} a_{22} &= \frac{d}{ds} (B \varphi) = B \left(\frac{d\varphi}{ds} \right) = \\ &= B(c \circ F) = A c(\zeta) a_{12} + B c(\zeta) a_{22} = \\ &= v_{21} a_{12} + v_{22} a_{22}, \end{aligned}$$

где $v_{11} = A c(\zeta) = A^2 q(\zeta)$, $v_{22} = B c(\zeta) = B A q(\zeta)$.

Доказательство теоремы 3. Пусть поток $v = -B q A + A q B + q C$ порождает локальную однопараметрическую группу контактных преобразований F_s . Обозначим $M = D_h F_s$. В силу леммы 1 имеем $\frac{d}{ds} M = V \cdot M$. Отсюда:

$$\frac{d}{ds} (M^t M) = M^t (V^t + V) M = 2 M^t S M,$$

где

$$S = \frac{V^t + V}{2} = \begin{pmatrix} -A B q & \frac{A^2 q - B^2 q - q}{2} \\ \frac{A^2 q - B^2 q - q}{2} & B A q \end{pmatrix}.$$

Получаем дифференциальное неравенство:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \|M\|^2 &= 2 \operatorname{tr}(M^t S M) = 2 \operatorname{tr}(S M M^t) \leq \\ &\leq 2 \|S\| \|M\|^2 \leq 2k \|M\|^2. \end{aligned}$$

Здесь $\|M\|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 = \operatorname{tr}(M^t M)$, а $\|S\| = \sqrt{(A B q)^2 + (B A q)^2 + \frac{1}{2}(A^2 q - B^2 q - q)^2} \leq k < +\infty$ по условию теоремы.

Следовательно, $\|M\|^2$ можно оценить сверху:

$$\|M\|^2 \leq e^{2k|s|}.$$

Выведем из этой оценки, что F_s локально билипшицево. Обозначим через $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ собственные числа матрицы $M^t M$. Тогда $\frac{1}{\lambda_2} > \frac{1}{\lambda_1} > 0$

— собственные числа матрицы $(M^{-1})^t M^{-1}$. Для того чтобы отображение F_s было локально L -билиппицевым, необходима ограниченность величины $L^2 = \sup \max\{\lambda_1, \frac{1}{\lambda_2}\}$ на всей области определения.

Если $\lambda_1 \geq \frac{1}{\lambda_2}$, то

$$L^2 + \frac{1}{L^2} \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq 2e^{2k|s|}.$$

Если $\lambda_1 < \frac{1}{\lambda_2}$, то для функции F_{-s} будет выполнено

$$L^2 + \frac{1}{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \|D_h F_{-s}\|^2 = \|M^{-1}\|^2 \leq 2e^{2k|s|}.$$

3.3. Примеры изометрических потоков

1) Рассмотрим $q = -x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta$. Тогда $Aq = 0$, $Bq = -x_0 \cos \theta - y_0 \sin \theta$ и

$$v = (x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta)A + (-x_0 \sin \theta + y_0 \cos \theta)C = x_0 \frac{\partial}{\partial x} + y_0 \frac{\partial}{\partial y}.$$

Поле v порождает однопараметрическую группу левых сдвигов по переменным x, y :

$$F_s(x, y, z) = l_{(sx_0, sy_0, 0)}(x, y, z) = (sx_0 + x, sy_0 + y, \theta).$$

2) Пусть $q = \theta_0 x \cos \theta + \theta_0 y \sin \theta$. В этом случае $Aq = \theta_0$, $Bq = -\theta_0 x \sin \theta + \theta_0 y \cos \theta$ и векторное поле

$$v = (\theta_0 x \sin \theta - \theta_0 y \cos \theta)A + \theta_0 B + (\theta_0 x \cos \theta + \theta_0 y \sin \theta)C = -\theta_0 y \frac{\partial}{\partial x} + \theta_0 x \frac{\partial}{\partial y} + \theta_0 \frac{\partial}{\partial \theta}$$

порождает однопараметрическую группу левых сдвигов по переменной θ :

$$F_s(x, y, z) = l_{(0,0,s\theta_0)}(x, y, z) = (\cos(s\theta_0)x - \sin(s\theta_0)y, \sin(s\theta_0)x + \cos(s\theta_0)y, s\theta_0 + \theta).$$

Литература

- [1] Capogna, L. *An Introduction to the Heisenberg Group and the Sub-Riemannian Isoperimetric Problem* / L. Capogna, D. Danielli, S. D. Pauls, J. T. Tyson // Basel; Boston; Berlin; Birkhäuser, 2007.
- [2] Citti, G. *A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space* / G. Citti, A. Sarti // J. Math. Imaging Vision. – 2006. – Vol. 24, no. 3. – P. 307 – 326.
- [3] Gromov, M. *Carnot – Carathéodory spaces seen from within* / M. Gromov // In: Sub-Reimannian Geometry. – Basel: Birkhäuser, 1996. – P. 79 – 323.
- [4] Hladky, R. K. *Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neurobiological image completion model* / R. K. Hladky, S. D. Pauls // J. Math. Imaging Vision. – 2010. – Vol. 36, no. 1. – P. 1 – 27.
- [5] Korányi, A. *Quasiconformal mappings on the Heisenberg group* / A. Korányi, H. M. Reimann // Invent. math. – 1985. – Vol. 80. – P. 309 – 338.
- [6] Petitot, J. *The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure* / J. Petitot // Journal of Physiology. – Paris.: March, 2003. – Vol. 97, no. 2. – P. 265 – 309.
- [7] Vodopyanov, S. K. *Geometry of Carnot – Carathéodory spaces and differentiability of mappings* / S. K. Vodopyanov, V. I. Burenkov (ed.) et al. // The interaction of analysis and geometry. International school-conference on analysis and geometry. Novosibirsk, Russia, August 23 – September 3, 2004. – Providence, RI: American Mathematical Society. Contemporary Mathematics. – 2007. – Vol. 424. – P. 247 – 301.