ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ

УДК 514.76.2

ТЕОРЕМА СТОКСА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТИ

С. К. Водопьянов, А. О. Молчанова

STOKES' THEOREM FOR DIFFERENTIAL FORMS OF AN ARBITRARY SUMMABILITY

S. K. Vodopyanov, A. O. Molchanova

Работа посвящена исчислению дифференциальных форм соболевского типа. В работах [2, 3] *в ситуации, аналогичной теореме вложения пространства* W_p^1 *в пространство непрерывных функций при условии* $p > n$*, определяется интеграл* $\int_X \omega$ *и устанавливается теорема Стокса* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$.

В данной работе исследован случай, соответствующий вложению пространства Соболева W_p^1 *в пространство* L_q *при условии* $p \le n$*. В этом случае мы придаем смысл интегралу от* k*-формы по* k*-мерному ориентированному многообразию, чтобы он согласовывался с уже имеющейся теорией. Установлена справедливость формулы Стокса* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$ *в модельном случае* $X \subset \mathbb{R}^n$, $\dim X = n$*. Существование интеграла справа понимается в смысле, описанном в данной работе.*

The work is devoted to the calculus of differential forms of Sobolev type. The authors of [2, 3] *investigated a situation similar to the embedding theorem of Sobolev space* W_p^1 *into the space of continuous functions provided* $p > n$*, defined* $\int_X \omega$ *and established the Stokes' theorem* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$.

In this paper we study the case corresponding to the embedding of W_p^1 *into the* L_q *provided* $p \le n$*. In this case we give meaning to the integral of* k*-forms on* k*-dimensional oriented manifold, to be consistent with already existing theory. We set the Stokes' formula* $\int_X \omega = \int_{\partial X} d\omega$ *in the model case of* $X \subset \mathbb{R}^n$, $\dim X = n$*. The existence of the integral in the right hand side is understood in the sense described in this paper.*

Ключевые слова: дифференциальная форма, интеграл дифференциальной формы, теорема Стокса.

Keywords: differential form, integral of differential form, Stokes' theorem.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00662), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (НШ-6613.2010.1.)

1. Интегрирование форм класса $W_{p,q}^k$ по k-мерным многообразиям

1.1. Дифференциальные формы классов L_p и $W_{p,q}^k$

Дифференциальной формой степени k на n-мерном гладком многообразии D называется произвольное локально-интегрируемое сечение над D расслоения $\bigwedge^k T'D$ внешней степени кокасательного расслоения $T'D$. Две формы на D одинаковы, если они совпадают на D почти всюду. Множество всех дифференциальных форм степени k на D обозначим символом $F^k(D)$.

Дифференциальная форма ω степени k на D *обобщенно дифференцируема*, если существует дифференциальная форма θ степени $k+1$ на D, такая, что для каждой гладкой формы φ степени $n-k-1$, носитель которой компактен, не пересекается с краем многообразия D и содержится в ориентируемой области $V \subset D$, выполнено равенство:

$$\int_V \theta \wedge \varphi = (-1)^{k+1} \int_V \omega \wedge d\varphi.$$

Этим равенством форма θ определяется однозначно. Форма θ называется *внешним дифференциалом* $d\omega$ формы ω.

Предположим теперь, что на D задана гладкая риманова метрика. Эта метрика порождает в каждом слое расслоения $\bigwedge^k T'D$ скалярное произведение. Поэтому для каждой формы ω почти всюду на D определена функция $|\omega(x)|$. Положим

$$\|\omega\|_p = \left(\int_X |\omega(x)|^p \, d\mu_D \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|\omega\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} \{ |\omega(x)| : x \in D \}.$$

Здесь μ_D означает меру на D, порожденную римановой метрикой многообразия D.

Пространство $L_p^k(D)$ состоит из дифференциальных форм ω степени k, для которых $\|\omega\|_p < \infty$, пространство $W^k_{p,q}(D) = \{\omega : \omega \in L^k_p(D), d\omega \in L^{k+1}_q(D)\}$. Пространство $W^k_{p,q}(D)$ является банаховым относительно нормы $\|\omega\|_{p,q} = \|\omega\|_p + \|d\omega\|_q$.

Пусть X и Y — римановы многообразия. Рассмотрим отображение $\varphi : X \to Y$, дифференцируемое почти всюду и, кроме того, обладающее свойством: прообраз при отображении φ каждого множества меры 0 имеет меру 0. Пусть форма $\omega \in F^k(Y)$, $x \in X$, $e_i \in T_xX$, тогда $\varphi(x) \in Y$ и для почти всех x имеем $d\varphi(e_i) \in T_{\varphi(x)}Y$. Определим *перенесенную* форму $\varphi^*\omega \in F^k(X)$ равенством $\varphi^*\omega(x, e_1, \dots, e_k) = \omega(\varphi(x), d\varphi(e_1), \dots, d\varphi(e_k))$, которое выполнено почти всюду на X. При таком определении можно доказать, что $\varphi^*(\omega \wedge \theta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\theta$ для любых форм ω, $\theta \in F^k(Y)$.

Из [3, лемма 1] можно вывести следующее утверждение:

Лемма 1. *Если X, Y — римановы многообразия, X — компактно и $f : X \to Y$ — диффеоморфизм, то для любых $p \geq 1$, $q \geq 1$ отображение f^* переводит $L^k_p(Y)$ в $L^k_p(X)$, $W^k_{p,q}(Y)$ в $W^k_{p,q}(X)$, причем $\|f^*\omega\|_p \leq C_1\|\omega\|_p$, $f^*d\omega = df^*\omega$ и $\|f^*\omega\|_{p,q} \leq C_2\|\omega\|_{p,q}$.*

Лемма 2 [3]. *Если риманово многообразие D полно относительно метрики ρ_D, то гладкие на D формы, имеющие компактный носитель, плотны в $W^k_{p,q}(D)$ при $p < \infty$, $q < \infty$.*

1.2. Интегрирование дифференциальных форм

Пусть X — k-мерное подмногообразие в $(k+m)$-мерном римановом многообразии D. В [2] установлено, что для этой поверхности существуют такие дифференциальные формы τ степени m и φ степени $m-1$, заданные в D, что

$$\int\limits_X \omega = \int\limits_D \omega \wedge \tau + (-1)^k \int\limits_D d\omega \wedge \varphi$$

для гладких ограниченных форм ω на D.

Из этого интегрального представления в работе [3] (другим способом в [2]) получена оценка

$$\left|\int\limits_X \omega\right| \leq C\|\omega\|_{p,q}, \qquad p > m+1,\ q > m,$$

которая позволяет определить $\int\limits_X \omega$ для всех $\omega \in W^k_{p,q}(D)$.

В настоящей работе исследован другой случай, аналогичный теореме вложения W^1_p в пространство L_r, $1 \leq p \leq n$.

Пусть X — k-мерное компактное гладкое ориентируемое многообразие без края, B^m — единичный шар в $\mathbb{R}^m$, $D = X \times B^m$. В этом случае интегральное представление имеет вид:

$$\int\limits_X i^*\omega = \frac{1}{c_m}\int\limits_D \omega \wedge dy +$$

$$+(-1)^k \frac{1}{mc_m}\int\limits_D d\omega \wedge \left(\sum_{j=1}^m y_j(1-|y|^{-m})\right) d_jy, \quad (1)$$

где $d_jy = dy_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dy_j} \wedge \dots \wedge dy_m$.

Лемма 3. *Пусть ω — гладкая k-форма с компактным носителем на D, $q \leq m$, $1 \leq p$, $1 \leq r \leq \frac{mq}{m-q}$. Тогда существует константа C, зависящая только от X, m, k, p, q, такая, что выполнено неравенство*

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_{X\times\{y\}} \omega\right|^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\|\omega\|_{p,q}.$$

Доказательство. Используя интегральное представление (1) и неравенство Минковского для суммы, получаем:

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_{X\times\{z\}} \omega\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \leq \frac{1}{c_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D \omega \wedge dy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+\frac{1}{mc_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\sum_{j=1}^m \int\limits_D (y_j - z_j) d\omega \wedge d_jy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} +$$

$$+\frac{1}{mc_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D \sum_{j=1}^m |y-z|^{-m}(y_j - z_j) d\omega \wedge d_jy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Используя неравенство Гёльдера и Минковского, теорему Фубини, а также оценки на потенциал Рисса (см., например, [5, глава 5, теорема 1]), имеем оценку для третьего слагаемого:

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D \sum_{j=1}^m |y-z|^{-m}(y_j - z_j) d\omega \wedge d_jy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq C_1\left(\int\limits_{B^m}\left(\int\limits_X \int\limits_{B^m} |d\omega||y-z|^{1-m}\, dy\, dx\right)^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \leq$$

$$\leq C_2 \int\limits_X \left(\int\limits_{B^m}\left(\int\limits_{B^m} |d\omega||y-z|^{1-m}\, dy\right)^r dz\right)^{\frac{1}{r}} dx \leq$$

$$\leq C_3 \int\limits_X \left(\int\limits_{B^m}\left(\int\limits_{B^m} |d\omega||y-z|^{1-m}\, dy\right)^{q^*} dz\right)^{\frac{1}{q^*}} dx \leq$$

$$\leq C_4 \int\limits_X \left(\int\limits_{B^m} |d\omega|^q\, dy\right)^{\frac{1}{q}} dx \leq C_5\left(\int\limits_D |d\omega|^q\, dx\, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Первые два слагаемых оцениваются также с помощью неравенства Гёльдера с учетом соотношения $|y_j - z_j| \leq |y-z| \leq 2$:

$$\frac{1}{c_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_D \omega\wedge dy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \le C_6\left(\int\limits_D |\omega|^p\,dz\right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\frac{1}{mc_m}\left(\int\limits_{B^m}\left|\sum_{j=1}^m\int\limits_D (y_j-z_j)d\omega\wedge d_jy\right|^r dz\right)^{\frac{1}{r}} \le$$

$$\le C_7\left(\int\limits_D |d\omega|^q\,dz\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Неравенство данной леммы получается выбором подходящей константы C.

Если форма $\omega \in W^k_{p,q}(D)$, то в силу леммы 2 существует такая последовательность гладких k-форм с компактными носителями ω_j, что $||\omega_j-\omega||_{p,q}\to 0$. Лемма 3 дает, что

$$\left(\int\limits_{B^m}\left|\int\limits_{X\times\{y\}}\omega_j-\omega_i\right|^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \to 0.$$

Таким образом, последовательность $\int_{X\times\{y\}}\omega_j$ фундаментальна в $L_r(B^m)$, предел этой последовательности обозначим $\int_{X\times\{y\}}\omega$. Тогда (вообще говоря, для некоторой подпоследовательности ω_{j_k}, но переобозначив, можно считать, что для ω_j), для почти всех $y\in B^m$ выполнено:

$$\int\limits_{X\times\{y\}}\omega = \lim_{j\to\infty}\int\limits_{X\times\{y\}}\omega_j < \infty.$$

Получаем, что для любой формы $\omega\in W^k_{p,q}(D)$ и для почти всех $y\in B^m$ интегралу $\int_{X\times\{y\}}\omega$ можно приписать определенное значение. Определить слои $X\times\{y\}$, для которых определен интеграл $\int_{X\times\{y\}}\omega$, можно с помощью теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла (формулировку которой можно найти в [5, глава 1, теорема 1]).

Таким образом, если $\omega\in W^k_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ и $X\subset\mathbb{R}^n$ — k-мерное гладкое многообразие, то приведенные выше рассуждения позволяют определить интеграл $\int_X\omega$ следующим образом

Определение 1. *Интегралом от дифференциальной формы $\omega\in W^k_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ по k-мерному гладкому ориентируемому многообразию X будем называть совпадающие пределы*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B^m(r)|}\int\limits_{B^m(r)}\left(\int\limits_{X\times\{y\}}\omega\right)dy = \lim_{j\to\infty}\int\limits_X\omega_j \quad (2)$$

при условии, что они существуют и конечны. Общее значение пределов в (2) *называется интегралом* $\int_X\omega$.

2. Теорема Стокса для дифференциальных форм класса $W^k_{p,q}$

В этой главе установлена теорема Стокса для модельного случая: $X\subset\mathbb{R}^n$ — n-мерное гладкое компактное ориентируемое многообразие с краем ∂X, совпадающим с границей X, край обладает индуцированной ориентацией (другими словами, гладкая область с гладкой границей). Для такого многообразия X его край ∂X можно представить как поверхность уровня функции $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ класса C^1 такой, что $g^{-1}(0)=\partial X$, $\nabla g(x)\ne 0$ в точках $x\in\partial X$, $g<0$ на $X\setminus\partial X$ и $g>0$ вне X. Градиент $\nabla g(x)$ перпендикулярен касательной плоскости $T_x\partial X$, и направлен вне многообразия X. В силу непрерывности, градиент $\nabla g(x)$ будет также отличным от нуля и в некоторой окрестности многообразия ∂X. Для достаточно близких к нулю t обозначим

$$X_t = \{x:\, g(x)\le t,\, \nabla g(x)\ne 0 \text{ для } g(x)=t\},$$

при этом граница ∂X_t — многообразие размерности $n-1$.

В такой ситуации, если форма $\omega\in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, то интеграл $\int_X d\omega$ понимается в классическом смысле, а интеграл $\int_{\partial X}\omega$, определен формулой (2), которую следует понимать следующим образом:

$$\int\limits_{\partial X}\omega = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{\partial X_t}\omega\right)dt = \lim_{j\to\infty}\int\limits_{\partial X}\omega_j, \quad (3)$$

где ω_j — последовательность гладких k-форм с компактными носителями, которая фигурирует в определении 1.

Используя формулу коплощади можно показать, что $\int_{\partial X_t}\omega$ не зависит от выбора функции g.

Для доказательства теоремы нам также понадобится следующее техническое условие. На ∂X выберем счетный набор координатных окрестностей. Потребуем для любой окрестности U из этого набора выполнение условия:

$$\int\limits_{U\cap\partial X}\omega = \lim_{r\to 0}\frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^{r}\left(\int\limits_{U\cap\partial X_t}\omega\right)dy = \lim_{j\to\infty}\int\limits_{U\cap\partial X}\omega_j. \quad (4)$$

Теорема Стокса. *Пусть $X\subset\mathbb{R}^n$ — n-мерное гладкое компактное ориентируемое многообразие с краем ∂X, совпадающим с границей X, край обладает индуцированной ориентацией, форма $\omega\in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, и выполнены условия* (3) *и* (4). *Тогда*

$$\int\limits_X\omega = \int\limits_{\partial X}d\omega. \quad (5)$$

Доказательство. Для отрицательных t, достаточно близких к нулю, имеем

$$X_t \subset X,$$

где многообразие X_t определено выше. Рассмотрим форму $\omega \in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Имеем

$$d((g-t)\omega) = dg \wedge \omega + (g-t)d\omega. \qquad (6)$$

Лемма 4. *В условиях теоремы верно равенство*

$$\int\limits_{X_t} d((g-t)\omega) = 0. \qquad (7)$$

Доказательство. Форма $\omega \in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, для нее существует такая последовательность гладких $(n-1)$-форм с компактными носителями ω_j, что $\omega_j \to \omega$ в $W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Обозначим $\theta = (g-t)\omega$ и $\theta_j = (g-t)\omega_j$, возьмем компактно вложенную область $U \subset \mathbb{R}^n$. Тогда

$$\left|\int\limits_U d\theta - \int\limits_U d\theta_j\right| \le \int\limits_U |dg \wedge (\omega - \omega_j)| +$$
$$+\int\limits_U |(g-t)(d\omega - d\omega_j)| \le C\|\omega - \omega_j\|_{p,q} \to 0.$$

Таким образом, $\int\limits_U d\theta_j \to \int\limits_U d\theta$. Остается заметить, что θ_j — гладкая форма и на X_t верна классическая теорема Стокса, то есть $\int\limits_{X_t} d\theta_j = 0$. Отсюда получаем утверждение леммы, положив $U = X_t$.

Из (6) и (7) выводим $\int\limits_X dg \wedge \omega = -\int\limits_X g\, d\omega = -\int\limits_X (g-t)\, d\omega - t\int\limits_X d\omega$ и $\int\limits_{X_t} dg \wedge \omega = -\int\limits_X (g-t)\, d\omega$.

Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$\int\limits_{X\setminus X_t} dg \wedge \omega = -\int\limits_{X\setminus X_t} (g-t)\, d\omega - t\int\limits_X d\omega. \qquad (8)$$

Запишем форму ω в следующем виде: $\omega = \sum\limits_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Тогда

$$dg \wedge \omega = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_i \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Преобразуем левую часть (8) по формуле коплощади (см. [6, п. 3.2.12]), где $\mathcal{H}^n$ — n-мерная мера Хаусдорфа (подробнее см., например, [6, п. 2.10.2])

$$\int\limits_{X\setminus X_t} dg \wedge \omega = \int\limits_{g^{-1}(t,0)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_t^0 ds \int\limits_{g^{-1}(s)} \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) a_i(x)\, \frac{d\mathcal{H}^{n-1}(x)}{|\nabla g(x)|} \qquad (9)$$

($|\nabla g(x)|$ не равен нулю на $X \setminus X_t$ при t, достаточно близком к 0).

Обозначая символом $\eta(x) = (\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)) = |\nabla g(x)|^{-1}\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x)\right)$ нормированный градиент, из (8) и (9) получаем:

$$-\frac{1}{t}\int\limits_t^0 ds \int\limits_{g^{-1}(s)} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x) =$$
$$= \int\limits_X d\omega + \frac{1}{t}\int\limits_{X\setminus X_t} (g-t)\, d\omega.$$

Переходя в последней формуле к пределу при $t \to 0$, имеем:

$$\int\limits_X d\omega = \int\limits_{g^{-1}(0)} \sum_{i=1}^n \eta_i(x) a_i(x)\, d\mathcal{H}^{n-1}(x). \qquad (10)$$

Для доказательства теоремы остается проверить, что правая часть (10) совпадает с $\int_{\partial X} \omega$.

Если ω — непрерывная форма, то интеграл от формы ω по многообразию ∂X определяется с помощью разбиения единицы, подчиненного некоторому конечному покрытию многообразия ∂X, и равенству $\int\limits_{U\cap\partial X} \omega = \int\limits_{\varphi(U\cap\partial X)} \psi^*\omega$, для системы координат $(U \cap \partial X, \varphi)$ (см., например, [4]).

Равенство (10) устанавливается с помощью выбора подходящей системы координат на ∂X и свойств дифференциальных форм (подробнее см. [1]).

В случае произвольной формы $\omega \in W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ по лемме 2 выберем последовательность $\{\omega_j\}$ гладких форм с компактными носителями, сходящуюся к ω в $W^{n-1}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$.

Используя (4) и лемму 1 получаем:

$$\int\limits_{U\cap\partial X} \omega = \lim_{r\to 0} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \left(\int\limits_{U\cap(\partial X\times\{y\})} \omega\right) dy =$$
$$= \lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \left(\int\limits_{U\cap(\partial X\times\{y\})} \omega_j\right) dy =$$

$$= \lim_{r\to 0}\lim_{j\to\infty} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \left(\int\limits_{\varphi(U\cap(\partial X\times\{y\}))} \psi^*\omega_j\right) dy =$$
$$= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|2r|}\int\limits_{-r}^r \left(\int\limits_{\varphi(U\cap(\partial X\times\{y\}))} \psi^*\omega\right) dy$$

$$= \int\limits_{\varphi(U\cap\partial X)} \psi^*\omega.$$

Таким образом, выбрав на ∂X конечное покрытие и разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, получаем (5). $\square$

Литература

[1] Водопьянов, С. К. *Интегрирование по Лебегу: учебное пособие* / С. К. Водопьянов. – Новосибирск: НГУ, 2011. – 144 с.

[2] Гольдштейн, В. М. *Дифференциальные формы на липшицевом многообразии* / В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Сиб. мат. жур. – 1982. – Т. 23, 2. – С. 16 – 30.

[3] Гольдштейн, В. М. *Интегральное представление интеграла дифференциальной формы* / В. М. Гольдштейн, В. И. Кузьминов, И. А. Шведов // Функциональный анализ и математическая физика.– Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985. – С. 53 – 87.

[4] Спивак, М. *Математический анализ на многообразиях* / М. Спивак. – М.: Мир, 1968. – 164 с.

[5] Стейн, И. М. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций* / И. М. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 344 с.

[6] Федерер, Г. *Геометрическая теория меры* / Г. Федерер. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 760 с.

УДК 517.988.2, 514.763.2

ИЗОМЕТРИИ НА ГРУППЕ ПОВОРОТОВ - СДВИГОВ

Д. В. Исангулова

ISOMETRIES ON ROTO - TRANSLATION GROUP

D. V. Isangulova

Описана группа C^2-гладких изометрий на контактном субримановом многообразии — группе поворотов-сдвигов. Найдены условия, при которых векторное поле порождает локальную однопараметрическую группу контактных или локально билипшицевых преобразований группы поворотов-сдвигов.

We describe the group of C^2-smooth isometries on contact sub-Riemannian manifold, precisely on roto-translation group. We find the conditions providing for a vector field to generate the local one-parameter group of contact or local biLipschitz transformations of roto-translation group.

Ключевые слова: группа поворотов-сдвигов, изометрия, однопараметрическая группа преобразований.

Keywords: roto-translation group, isometry, one-parameter group of transformations.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 11–01–00819) и Совета по грантам Президента РФ по поддержке Ведущих научных школ (НШ–6613.2010.1).

1. Введение

В настоящей работе мы исследуем изометрические и билипшицевые отображения группы поворотов-сдвигов $\mathcal{RT}$ (roto-translation group). Группа поворотов-сдвигов — это трехмерное топологическое многообразие, диффеоморфное $\mathbb{R}^2 \times S^1$, с координатами (x, y, θ) и умножением

$$(x_0, y_0, \theta_0) \cdot (x, y, \theta) = \\ = (x_0 + x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0, y_0 + x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0, \\ \theta_0 + \theta).$$

Векторные поля

$$A = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}, \quad B = \frac{\partial}{\partial\theta},$$

$$C = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

являются левоинвариантными. При этом выполняются следующие коммутационные условия:

$$[A, B] = -C, \quad [C, B] = A, \quad [A, C] = 0.$$

Заметим, что алгебра Ли группы $\mathcal{RT}$ не является нильпотентной.

На группе поворотов-сдвигов можно ввести субриманову структуру, то есть выделить горизонтальное подрасслоение $H = \mathrm{span}\{A, B\}$ в касательном расслоении, которое своими коммутаторами порождает все касательное расслоение и определяет субриманову метрику (метрику Карно — Каратеодори). Метрика Карно — Каратеодори d задается как инфимум длин всех горизонтальных кривых, соединяющих две точки (кусочно-гладкая кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор принадлежит H почти всюду). Для измерения длин горизонталь-