

УДК 515.17 + 517.545

ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. В. Чуешев

PRYM DIFFERENTIALS ON COMPACT RIEMANN SURFACE

V. V. Chueshev

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима для случая специальных характеристик на компактной римановой поверхности нашла приложения в геометрической теории функций комплексного переменного, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [1-9]. В [8] начато построение общей теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности для произвольных характеристик.

В данном обзоре представлены результаты по теории мультипликативных функций и дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях рода $g > 1$, полученные в работах В.В. Чуешева, М.И. Головиной и Т.А. Пушкаревой [15-19].

Аналогичные результаты есть для дифференциалов Прима на торах (Т.С. Крепицина) и на конечных римановых поверхностях (А.А. Казанцева). Эти три случая существенно отличаются друг от друга и по результатам, и по методам.

The theory of multiplicative functions and Prym differentials for case special characters on a compact Riemann surface has found numerous applications in geometrical theory function complex variable, analytic number theory and equations of mathematical physics [1-9]. In [8] is begun construction a general theory of multiplicative functions and Prym differentials on a compact Riemann surface for arbitrary characters.

In this survey is represented results on theory of multiplicative functions and Prym differentials on a variable compact Riemann surfaces of genus $g > 1$, which obtained in papers V.V. Chueshev, M.I. Golovina and T.A. Pushkareva.

There are analogous results for Prym differentials on torus (T.S. Krepizina) and on finite Riemann surfaces (A.A. Kazanzeva). These three cases essentially differ from each other and by results, and by methods.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизоры, абелевы дифференциалы, переменная риманова поверхность, переменные характеристики, мероморфные дифференциалы, гармонический дифференциал Прима, пространство Тейхмюллера.

Keywords: Prym differential, divisors, abelians differentials, variable Riemann surfaces, variable characters, meromorphic differentials, harmonic Prym differential, Teichmueller space.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №02.740.11.0457; РФФИ 09 - 01 - 00255; НШ - 7347.2010.1; РФФИ 11 - 01 - 90709.

1. Предварительные сведения

Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F . По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0 , Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Эта группа имеет представление $\Gamma = \langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^g C_j = I \rangle$, где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \dots, g$, а I – тождественное отображение [10; 11].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0 , т. е. выражением вида

$\mu(z)dz/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0 , где $\mu(z)$ – комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ . Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0 . Пусть $M(F)$ – множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0 , $Diff^+(F)$ – группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, а $Diff_0(F)$ – нормальная подгруппа в $Diff^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0 . Группа $Diff^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \rightarrow f^*\mu$, где $f \in Diff^+(F)$, $\mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [10; 11].

Так как отображение $U \rightarrow F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ -дифференциала Бельтрами μ на U , т. е.

$\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty = \operatorname{esssup}_{z \in U} |\mu(z)| < 1$ и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$.

Если Γ -дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \rightarrow T^\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, \dots, B_g^\mu : \prod_{j=1}^g [A_j^\mu, B_j^\mu] = I \rangle.$$

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса [10] и других авторов утверждают, что:

1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексно аналитическим многообразием размерности $3g-3$ при $g \geq 2$; 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \rightarrow M(F)/\operatorname{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ будет голоморфным и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от $[\mu]$.

Два Γ -дифференциала Бельтрами μ и ν будут конформно эквивалентными, если и только если $w^\mu T (w^\mu)^{-1} = w^\nu T (w^\nu)^{-1}$, $T \in \Gamma$. Естественно, что выбор образующих $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F)$ эквивалентен выбору системы образующих $\{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g$ в $\pi_1(F_\mu)$, и $\{A_j^\mu, B_j^\mu\}_{j=1}^g$ в Γ_μ для любого $[\mu]$ из $\mathbf{T}_g$. Отсюда получим отождествления $M(F)/\operatorname{Diff}_0(F) = \mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(\Gamma)$. При этом имеем взаимно однозначное соответствие между классами дифференциалов Бельтрами $[\mu]$, классами конформно эквивалентных отмеченных римановых поверхностей $[F_\mu; \{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g]$ и отмеченными квазифуксовыми группами Γ_μ [11].

Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть якобиан $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [12].

В работе Л. Берса [10, с. 99] построены голоморфные формы $\zeta_1[\mu] = \zeta_1([\mu], \xi) d\xi, \dots$, $\zeta_g[\mu] = \zeta_g([\mu], \xi) d\xi$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} \zeta_j([\mu], \xi) &= \zeta_j(T([\mu], \xi)) \frac{\partial T}{\partial \xi}([\mu], \xi), \\ \int_{\xi}^{\xi + A_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w) dw &= \delta_{jk}, \end{aligned}$$

для всех $T \in \Gamma$, $[\mu] \in \mathbf{T}_g$, $\xi \in w^\mu(U)$, $j, k = 1, \dots, g$, где интеграл берется по любому пути в $w^\mu(U)$ от ξ до $A_k^\mu(\xi)$. Для любого фиксированного $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ эти формы являются поднятиями на $w^\mu(U)$ голоморфных на F_μ абелевых дифференциалов $\zeta_1[\mu], \dots, \zeta_g[\mu]$, которые образуют канонический базис на F_μ , двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k(\mu), b_k(\mu)\}_{k=1}^g$ на F_μ . Указанный базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ . Кроме того, матрица b –периодов

$\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ состоит из комплексных чисел $\pi_{jk}[\mu] = \int_{\xi}^{\xi + B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w) dw$, $\xi \in w^\mu(U)$ и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \rightarrow \mathbf{C}^g$ по правилу:

$$\varphi_j(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w) dw, j = 1, \dots, g. \text{ Тогда } \varphi \text{ индуцирует послонное голоморфное вложение из } F_\mu \text{ в } J(F_\mu).$$

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbf{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbf{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ . Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n , который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби ($n \geq 1$) ограничение которого на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi : F_\mu \rightarrow J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \setminus F_g^1[\mu] \rightarrow W_g[\mu] \setminus W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu] - g$ -кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g-2$ [6; 13]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла s для $\Phi : M(F) \rightarrow \mathbf{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [12].

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \rightarrow (\mathbf{C}^*, \cdot)$, $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), \dots, \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)) \in (\mathbf{C}^*)^{2g}$.

Определение 1.1. Мультипликативной функцией f на F_μ для характера ρ назовем мероморфную на $w^\mu(U)$ функцию f , такую, что $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $z \in w^\mu(U)$, $T \in \Gamma_\mu$.

Определение 1.2. m -дифференциалом Прима относительно фуксовой группы Γ для ρ , или (ρ, m) -дифференциалом, называется дифференциал $\phi = \phi(z) dz^m$, такой, что $\phi(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\phi(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$, $\rho : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}^*$. В частности, при $m = 0$ это мультипликативная функция относительно Γ для ρ .

Если f_0 – мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \zeta_j([\mu])$ и

$$f_0([\mu], P) = \exp \int_{P_0[\mu]}^P 2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu], \rho) \in \mathbf{C}$, $j = 1, \dots, g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ . При этом интегрирование от фиксированной $P_0[\mu]$ до текущей P на переменной поверхности F_μ , и $s[\mu]$ – сечение К. Эрла [12] над $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$. Получим, что характер ρ для f_0 имеет вид:

$$\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho),$$

$$\rho(b_k^\mu) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \pi_{jk}([\mu])),$$

$k = 1, \dots, g$.

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) – *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$. Обозначим через $[S^1]^{2g}$ подгруппу нормированных характеров на F , т. е. эти характеры принимают свои значения только на единичной окружности S^1 .

Лемма 1.1. [8, с. 106]. *Голоморфное главное $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ -расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению $\mathbf{T}_g(F) \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ над $\mathbf{T}_g(F)$.*

Определение 1.3. Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на $F = U/\Gamma$ для ρ называется *мультипликативно точным*, если $\phi = df(z)$ и $f(Tz) = \rho(T)f(z)$, $T \in \Gamma$, $z \in U$, т. е. f – мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ .

Обозначим через $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для $\rho \in \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma_\mu \rightarrow \mathbf{C}$, таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma_\mu$ [4].

Каждый элемент $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ будет единственно определяться упорядоченным набором комплексных чисел $\phi(A_1), \dots, \phi(A_g), \phi(B_1), \dots, \phi(B_g)$, удовлетворяющих уравнению $\sum_{j=1}^g [\sigma(B_j)\phi(A_j) - \sigma(A_j)\phi(B_j)] = 0$, ко-

торое получается из соотношения $\prod_{j=1}^g C_j = I$ в Γ_μ , где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma_\mu$. Тогда $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g - 1)$ -мерное пространство для $\rho \neq 1$ и $2g$ -мерное пространство для $\rho = 1$. Пусть $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – одномерное подпространство в $Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$, порожденное элементом σ . Тогда $H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ – комплексное векторное $(2g - 2)$ -мерное пространство для $\rho \neq 1$. Будем называть множество $G = \bigcup_{\rho \neq 1, [\mu]} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ когомологическим расслоением Ганнинга над $\mathbf{T}_g \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus \{1\})$ [4].

Пусть ϕ – замкнутый дифференциал Прима на $F = F_0$ для ρ . Проинтегрировав этот дифференциал от фиксированной точки z_0 до $z \in U$, получим, что $f(Tz) - f(Tz_0) = \rho(T)(f(z) - f(z_0))$, где

$\phi = df(z)$, $z \in U$, $f(z)$ – интеграл Прима на круге U для дифференциала Прима ϕ , определенный с точностью до аддитивного слагаемого. Отсюда для $T \in \Gamma$ верно равенство $f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi_{f, z_0}(T)$, где $\phi_{f, z_0}(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$. Таким образом, каждому $T \in \Gamma$ соответствует число $\phi_{f, z_0}(T)$, а значит, определено отображение $\phi_{f, z_0} : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$. Это отображение называется отображением периодов для ϕ . Оно зависит от выбора интеграла Прима $f(z)$ на U и базисной точки z_0 . Если $f_1(z) = f(z) + c$ – другой интеграл Прима для того же дифференциала Прима ϕ , то $\phi_{f_1, z_0}(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0) = \phi_{f, z_0}(T) + c\sigma(T)$, $T \in \Gamma$. Легко проверить, что оба отображения ϕ_{f, z_0} и ϕ_{f_1, z_0} удовлетворяют коциклическому соотношению $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$. Это означает, что они принадлежат пространству $Z^1(\Gamma, \rho)$ и представляют один и тот же класс периодов $[\phi]$ из $H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F .

Для замкнутого дифференциала Прима ϕ можно определить так называемые классические периоды. Для $T \in \Gamma$ соответствующий ему классический период $\phi_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} \phi$ и верно равенство $\phi_{z_0}(T) = \phi_{f, z_0}(T) - f(z_0)\sigma(T)$.

Следовательно, отображения вида $T \rightarrow \phi_{f, z_0}(T)$ (периоды по Р. Ганнингу) и вида $T \rightarrow \phi_{z_0}(T)$ (классические периоды [8]) определяют один и тот же класс периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ для дифференциала Прима ϕ на F для ρ . Поэтому корректно определено $\mathbf{C}$ -линейное отображение $p : \phi \rightarrow [\phi]$ из векторного пространства замкнутых дифференциалов Прима ϕ на F для ρ в векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$.

Обозначим через $\Omega_{2, \rho}(F_\mu)$ пространство дифференциалов Прима второго рода на F_μ для характера ρ [8; 13].

Лемма 1.2. *Если $\omega \in \Omega_{2, \rho}(F_\mu)$ имеет класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, то ω – мультипликативно точный дифференциал на F_μ для ρ .*

Доказательство. Достаточно доказать это для фиксированных поверхности и характера. Будем рассматривать классические периоды $\omega_{z_0}(\gamma_1), \dots, \omega_{z_0}(\gamma_m)$, которые получаются при обходе по петлям $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ вокруг отдельных полюсов $P_1, \dots, P_m$ для дифференциала ω соответственно. Число этих полюсов конечно ввиду компактности F_μ . Периоды $\omega_{z_0}(\gamma_1), \dots, \omega_{z_0}(\gamma_m)$ все обращаются в нуль, так как эти периоды равны вычетам для ветвей нашего многозначного дифференциала, а эти полюса второго или большего порядка.

Если класс периодов $[\omega] = 0$, то отсюда классический период $\omega_{z_0}(T) = c\sigma(T)$, $c \neq 0$ для любого T , где $\omega_{z_0}(T) = f(Tz_0) - f(z_0) = c(1 - \rho(T))$, а f – некоторый интеграл Прима для дифференциала ω . Тогда $\tilde{f} = (f - c)$ будет мультипликативной функцией для ρ и $\omega = d\tilde{f} = d(f - c)$. Поэтому периоды $\tilde{\omega}_{z_0}(a_1), \dots, \tilde{\omega}_{z_0}(b_g)$ все равны нулю для некоторого представителя из класса $[\omega]$. Следовательно,

ω является мультипликативно точным дифференциалом для ρ на F_μ . Лемма доказана.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1} \dots P_k^{n_k}$, $P_j \in F_\mu$, $n_j \in \mathbf{Z}$, $j = 1, \dots, k$. Имеет место следующая

Теорема (Римана-Роха для характеров) [6; 8]. Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Теорема (Абея для характеров) [6; 8]. Пусть D – дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1(\mu), \dots, a_g(\mu), b_1(\mu), \dots, b_g(\mu)\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ – характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера $\rho \Leftrightarrow \deg D = 0$ и

$$\begin{aligned} \varphi(D) = & \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \log \rho(b_j(\mu)) e^{(j)}[\mu] - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \log \rho(a_j(\mu)) \pi^{(j)}[\mu] (= \psi(\rho, [\mu])) \end{aligned}$$

в $\mathbf{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu], \dots, e^{(g)}[\mu]$, $\pi^{(1)}[\mu], \dots, \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы $a(\mu)$ – периодов и $b(\mu)$ – периодов на F_μ , где $\varphi[\mu]$ – отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu)$.

Отметим, что, по теореме Л. Берса [10, с. 99], отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

Теорема 1.1. Для любого существенного характера ρ на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существуют $g - 1$ различных точек $P_1, \dots, P_{g-1}$, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ , таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F_μ , чьи особенности в этих точках – полюса порядка не выше 1, т.е. $r_\rho(\frac{1}{P_1 \dots P_{g-1}}) = 0$ или $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_{g-1}) = 0$.

Теорема 1.2. Для любого несущественного характера $\rho \neq 1$ на компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ существует g различных точек $P_1, \dots, P_g$, голоморфно зависящих от ρ и от $[\mu]$, таких, что не существует мультипликативных функций для ρ на F_μ , чьи особенности в этих точках – полюса порядка не выше 1, т.е. $r_\rho(\frac{1}{P_1 \dots P_g}) = 1$ или $i_{\rho^{-1}}(P_1 \dots P_g) = 0$.

Определение 1.4. Точка P на компактной римановой поверхности F рода $g > 1$ называется мультипликативной точкой Вейерштрасса для существенного (несущественного) характера ρ , если

в ней можно задавать единственный полюс, мероморфной мультипликативной функции для ρ , порядка, не превышающего $g - 1$ (порядка, не превышающего g).

Определение 1.5. Точка $P \in F$ называется мультипликативной q -точкой Вейерштрасса ($q \geq 1$) для существенного характера ρ на F , если строго положителен ее вес $\tau_{\rho,q}(P)$, относительно пространства $\Omega_{\rho^{-1}}^q(1)$ голоморфных q -дифференциалов Прима для ρ^{-1} на F .

Последнее условие при $g \geq 2$ эквивалентно тому, что существует нетривиальный голоморфный q -дифференциал Прима ϕ для ρ^{-1} на F , такой, что $\text{ord}_P \phi \geq \dim \Omega_{\rho^{-1}}^q(1) = d$, причем $d = g - 1$ при $q = 1$ и $d = (2q - 1)(g - 1)$ при $q > 1$.

Э. Арбарелло [14] доказал, что (классические) точки Вейерштрасса на переменной компактной римановой поверхности F_μ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ для поверхности. Установим аналог этого результата для мультипликативных точек Вейерштрасса

Теорема 1.3. Для любого $q \geq 1$, $q \in \mathbf{N}$, мультипликативные q -точки Вейерштрасса для переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g > 1$ локально голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ и от характеров ρ , а пробелы в мультипликативных 1-точках Вейерштрасса и вес мультипликативных q -точек Вейерштрасса являются локально постоянными функциями от $[\mu]$ и от ρ со значениями в $\mathbf{N}$.

Доказательство. По заданному базису [8, с. 105] голоморфных (ρ, q) -дифференциалов Прима на F_μ составим вронскиан W_q , который также локально голоморфно зависит от $[\mu]$ и от ρ . Его нули есть мультипликативные q -точки Вейерштрасса на F_μ .

Для несущественного характера ρ числа $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_g - 1$ являются порядками нулей, а для существенного характера ρ числа $n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_{g-1} - 1$ являются порядками нулей, адаптированного базиса 1-дифференциалов, где числа n_j – мультипликативные пробелы в 1-точках Вейерштрасса на F_μ .

По теореме о неявной функции, нули вронскиана, а значит и мультипликативные q -точки Вейерштрасса на F_μ , порядки нулей вронскиана (веса мультипликативных q -точек Вейерштрасса) локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и от ρ . В силу целочисленности пробелов и целочисленности весов в 1-точках Вейерштрасса, числа пробелы n_j , а также все веса q -точек Вейерштрасса будут локально постоянными функциями от $[\mu]$ и от ρ . Теорема 1.3 доказана.

2. Элементарные дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую

роль играют так называемые элементарные дифференциалы [6; 13] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2 , либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от характеристик ρ и от модулей $[\mu]$ отмеченных компактных римановых поверхностей.

В этом параграфе будет найден общий вид элементарных (ρ, q) -дифференциалов Прима на F_μ .

Сначала найдем общий вид (ρ, q) -дифференциалов второго рода $\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}$ с единственным полюсом $Q = Q[\mu]$ точно порядка $m \geq 2$ на F_μ , где $q \geq 1$.

При $m \geq 2$, по теореме Римана-Роха, для (ρ, q) -дифференциалов на F_μ найдем размерность

$$i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_{\rho}^q\left(\frac{1}{Q^m}\right) = \\ = (g-1)(2q-1) - \deg D + r\left(\frac{(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}}{D}\right),$$

где $D = \frac{1}{Q^m}$, Z_{μ}^{q-1} – канонический класс дивизоров абелевых $(q-1)$ -дифференциалов на F_μ , $f[\mu]$ – любая мультипликативная функция для ρ на F_μ голоморфно зависящая от $[\mu]$ и ρ [8, с.43]. Отсюда

$$i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = (g-1)(2q-1) + m \geq 3.$$

Здесь $r\left(\frac{(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}}{D}\right) = 0$, так как $\deg \frac{(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}}{D} > 0$ при наших условиях. Действительно, $\deg(f[\mu]) = 0$, $\deg Z_{\mu}^{q-1} = (q-1)(2g-2) \geq 0$ и $\deg\left(\frac{1}{D}\right) = m > 0$. Это же можно доказать другим способом. От противного, предположим, что существует функция g на F_μ с условием $(g) \geq Q^m(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}$, тогда

$$0 = \deg(g) \geq \deg Q^m(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1} \geq 3.$$

Противоречие.

Так как

$$\deg(f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}Q^m = 0 + (q-1)(2g-2) + m - 1 \geq 1 > 0,$$

то

$$i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = (g-1)(2q-1) - \\ - \deg\left(\frac{1}{Q^m}\right) + r((f[\mu])Z_{\mu}^{q-1}Q^m) = \\ = (g-1)(2q-1) + m$$

и

$$i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right) = (g-1)(2q-1) + m - 1.$$

Следовательно, $i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^m}\right) = i_{\rho, q}\left(\frac{1}{Q^{m-1}}\right) + 1$. Значит, существует (ρ, q) -дифференциал $\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}$ с полюсом точно порядка m в точке Q на F_μ , т. е. $(\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m}$ на F_μ , $R_j \neq Q$, $j = 1, \dots, N$, где $N = (2g-2)q + m$.

Из [8, с. 67] получаем уравнение $\varphi_{P_0}[\mu](R_1 \dots R_N) - \varphi_{P_0}[\mu](Q^m) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$ в

многообразии Якоби $J(F_\mu)$, где $K[\mu]$ – вектор констант Римана, голоморфно зависящий от модулей римановых поверхностей и от выбора базисной точки, а также зависящий от выбора канонического базиса $a_j(\mu), b_j(\mu)$ петель на F_μ . Уравнение $\varphi_{P_0}[\mu](R_1 \dots R_N) - \varphi_{P_0}[\mu](Q^m) = -2K[\mu]q + \psi(\rho)$ понимаем как равенство в переменном якобиане $J(F_\mu)$, т. е. в слое из универсального расслоения Якоби, лежащем над отмеченной поверхностью $F_\mu \equiv [\mu]$. Отсюда,

$$\varphi(R_1 \dots R_N) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) + \psi(\rho) = a,$$

или

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = a - \varphi(R_{g+1} \dots R_N). \quad (1)$$

Таким образом, для определения нулей дифференциала $\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}$ имеем

$$N - g = m + (2g-2)q - g \geq g(\geq 2)$$

свободных параметров, которые можно выбирать произвольно на F_μ , и локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ . По теореме К. Эрла [12], можно выбрать дивизор $R_{g+1} \dots R_N$ на F_μ как локально голоморфное сечение для расслоения дивизоров степени $N - g$ над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$.

Решая проблему обращения Якоби в универсальном расслоении Якоби над $\mathbf{T}_g$, найдем дивизор $R_1 \dots R_g$ на F_μ , который будет единственным решением уравнения (1), если его правая часть равенства не принадлежит $W_g^1[\mu] \subset J(F_\mu)$ [6]. Размерность этого подмножества не превышает $g-2$, но $N - g > g-2$ при наших условиях, и при этом $R_1, \dots, R_g$ голоморфно зависят от наших параметров, так как правая сторона (1) была выбрана голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ . Следовательно, доказана

Теорема 2.1. Для любого характера ρ на F_μ рода $g, g \geq 2$ и любых натуральных чисел $m > 1, q > 0$ существует элементарный (ρ, q) -дифференциал $\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}$ второго рода с полюсом в любой точке $Q = Q[\mu] \in F_\mu$ точно порядка m , локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{\rho, q; Q}^{(m)}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q^m}$, где

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + \psi(\rho).$$

При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N - g$ над $\mathbf{T}_g$, $N = (2g-2)q + m$ и $Q = Q[\mu]$ – локально голоморфное сечение дивизоров степени 1 на F_μ для любого $[\mu]$ из односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbf{T}_g$ и для любого $\rho \in U(\rho_0) \subset \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbb{C}^*)$.

Рассуждая аналогично, как в доказательстве теоремы 2.1, получим:

Теорема 2.2. Для любого характера ρ на F_μ рода $g, g \geq 2$ и любого натурального числа $q \geq 1$ существует элементарный (ρ, q) -дифференциал

$\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}$ третьего рода точно с простыми полюсами $Q_1 = Q_1[\mu], Q_2 = Q_2[\mu] \in F_\mu$, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$, у которого общий вид дивизора $(\tau_{\rho,q;Q_1Q_2}) = \frac{R_1 \dots R_N}{Q_1 Q_2}$, где

$$\varphi(R_1 \dots R_g) =$$

$$= -2K[\mu]q + \varphi(Q_1 Q_2) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + \psi(\rho).$$

При этом точки $R_{g+1}, \dots, R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N - g$ над $\mathbf{T}_g$, $N = (2g - 2)q + 2$, и $Q_1 = Q_1[\mu], Q_2 = Q_2[\mu]$ — локально голоморфные сечения дивизоров степени 1 на F_μ для любого $[\mu]$ из одностойной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbf{T}_g$ и для любого $\rho \in U(\rho_0) \subset \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$.

Теорема 2.3. 1) Для любого существенного характера ρ , точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q \geq 1$ и несущественного характера ρ , точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q > 1$ существует элементарный (ρ, q) -дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ , локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$;

2) Для любого несущественного характера ρ , точки $Q_1 \in F_\mu$ при $q = 1$ не существует элементарный $(\rho, 1)$ -дифференциал τ_{ρ,Q_1} третьего рода с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ .

Доказательство. 1) Если ρ — существенный характер и $q = 1$, то, по теореме Римана-Роха, для характеров имеем равенство :

$$i_\rho\left(\frac{1}{Q_1}\right) = -1 + g + 1 + r_{\rho^{-1}}(Q_1),$$

$i_\rho\left(\frac{1}{Q_1}\right) = g$ и $i_\rho(1) = g - 1$. Отсюда следует, что $i_\rho\left(\frac{1}{Q_1}\right) = i_\rho(1) + 1$. Поэтому существует дифференциал Прима τ_{ρ,Q_1} для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Если ρ — произвольный характер и $q > 1$, то, по теореме Римана-Роха, для (ρ, q) -дифференциалов [8, с. 43] имеем :

$$i_{\rho,q}(D) = (2q - 1)(g - 1) - \deg D + r((f) \frac{Z^{q-1}}{D})$$

и $i_{\rho,q}(1) = (2q - 1)(g - 1)$, где f — мультипликативная функция для ρ и Z — канонический класс для абелевых дифференциалов на F_μ . Поэтому

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_1}\right) = i_{\rho,q}(1) + 1 + r((f)Z^{q-1}Q_1).$$

Таким образом, имеем равенство

$$i_{\rho,q}\left(\frac{1}{Q_1}\right) = i_{\rho,q}(1) + 1,$$

так как $\deg((f)Z^{q-1}Q_1) = 0 + (q - 1)(2g - 2) + 1 > 0$. Следовательно, существует (ρ, q) -дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Построим конструктивно такие дифференциалы, локально голоморфно зависящие от ρ и $[\mu]$:

а) такой (ρ, q) -дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ можно задать в виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f\omega_0^q$, где f — мультипликативная функция для существенного характера ρ на F_μ , $q \geq 1$ и ω_0 — любой голоморфный абелев дифференциал на F_μ . Дивизор

$$(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1 \dots R_N}{(\omega_0)^q Q_1}(\omega_0)^q,$$

где $N = q(2g - 2) + 1$ и точка Q_1 не принадлежит дивизору (ω_0) . Отсюда получаем равенство

$$\begin{aligned} \varphi(R_1 \dots R_g) &= -2Kq + \varphi(Q_1) - \\ &- \varphi(R_{g+1} \dots R_N) + -\psi(\rho) = a \end{aligned} \quad (*)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ ;

б) в случае $\rho = 1$ или ρ — несущественный характер при $q > 1$ такой дифференциал ищем в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f_0 f_1 \omega_0^q$, где f_1 — однозначная мероморфная функция с дивизором $(f_1) = \frac{R_1 \dots R_N}{(\omega_0)^q Q_1}$ и f_0 — мультипликативная единица для ρ на F_μ . Здесь $\psi(\rho) = 0$ и, по теореме Абеля, имеем равенство :

$$\varphi(R_1 \dots R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1} \dots R_N) = a. \quad (**)$$

При наших условиях в обоих случаях а) и б) верно неравенство $N - g \geq g - 1$ и $\dim W_g^1 \leq g - 2$. Шевелением дивизоров $R_{g+1} \dots R_N$ можно добиться, что a не принадлежит W_g^1 и уравнения (*) и (**), в многообразии Якоби, имеют единственные решения $R_1 \dots R_g$.

Выбирая локально голоморфное сечение по $[\mu]$ и ρ дивизоров $R_{g+1} \dots R_N$ над $\mathbf{T}_g$, получим дивизор $R_1 \dots R_g$ (как единственное решение предыдущих уравнений в $J(F_\mu)$), тоже голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$. Причем малым шевелением дивизоров $R_{g+1} \dots R_N$ можно добиться, чтобы точка Q_1 не совпадала с точками $R_1, \dots, R_N$.

2) Если существует дифференциал τ_{ρ,Q_1} для несущественного характера ρ с вычетом $\text{res}_{Q_1} \tau_{\rho,Q_1} = c_{Q_1} \neq 0$ для некоторой его ветви, то $f_0^{-1} \tau_{\rho,Q_1}$ — абелев дифференциал с единственным простым полюсом в Q_1 и f_0 — мультипликативная функция для ρ на F_μ . По теореме о вычетах $f_0^{-1}(\tilde{Q}_1)c_{Q_1} = 0$, где $\tilde{Q}_1 \neq Q_1$. Противоречие.

Это утверждение также следует из теоремы Римана-Роха так как $i_\rho(Q_1^{-1}) = g = i_\rho(1)$ для несущественного характера ρ . Действительно, $0 = r_{\rho^{-1}}(Q_1) = \deg\left(\frac{1}{Q_1}\right) - g + 1 + i_\rho\left(\frac{1}{Q_1}\right) = -1 - g + 1 + i_\rho\left(\frac{1}{Q_1}\right)$. Теорема 2.3 доказана.

Ясно, что (ρ, m) -дифференциал ω имеет единственный дивизор $D = (\omega)$ из своих нулей и полюсов, с учетом кратности, на F рода $g \geq 2$, и $\deg D = (2g - 2)m$, $m \geq 1$.

Вывясним будет ли по заданному дивизору D на F рода $g \geq 2$, $\deg D = (2g - 2)m$ определяться (ρ, m) -дифференциал ω с точностью до умножения на ненулевую константу на F .

Известно из [8, с. 23], что любой дивизор D на F рода $g \geq 2$ степени $(2g - 2)m$, $g \geq 1$, $m \geq 1$ есть дивизор единственного (с точностью до умножения на ненулевую константу) (ρ, m) -дифференциала, принадлежащего к единственному нормированному характеру ρ .

Теорема 2.4. Пусть D — дивизор, $\deg D = (2g - 2)m$, $m \geq 0$ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, тогда:

1) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2 , $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для одного и того же характера ρ , то $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = \text{const} \neq 0$ на F ;

2) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2 , $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2 , $\rho_1 \neq \rho_2$, то $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F , где $\rho_1 = \rho_2 \rho_0$;

3) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2 , $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2 , то $\rho_1 = \rho_2$ и $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = \text{const} \neq 0$ на F .

3. Однозначные мероморфные дифференциалы на переменной компактной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega_2(F_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на F_μ , а через $\Omega_{2,e}(F_\mu)$ — подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменной поверхности F_μ .

Рассмотрим $\tilde{E}_1 = \bigcup_{[\mu]} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$, векторное расслоение у которого над точкой $[\mu]$ из базы $\mathbf{T}_g$ лежит слой $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$.

Теорема 3.1. Векторное расслоение $\tilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g$ над базой $\mathbf{T}_g$ при $g \geq 2$. При этом наборы классов смежности дифференциалов

$$\zeta_1, \dots, \zeta_g, \tau_{\tilde{P}_1}^{(n_1+1)}, \dots, \tau_{\tilde{P}_1}^{(n_g+1)} \quad (*)$$

и

$$\zeta_1, \dots, \zeta_g, \tau_{\tilde{P}_1}^{(2)}, \dots, \tau_{\tilde{P}_g}^{(2)} \quad (**)$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, \dots, n_g$ — пробелы Вейерштрасса в $\tilde{P}_1$ на F_μ и $r(\frac{1}{\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_g}) = 1$ на F_μ .

Доказательство. Зададим отображение Φ_1 из пространства $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ на $\mathbf{C}^{2g}$ по правилу: сопоставляем ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi_1 : \omega \rightarrow \left(\int_{a_1} \omega, \dots, \int_{a_g} \omega, \int_{b_1} \omega, \dots, \int_{b_g} \omega \right) \in \mathbf{C}^{2g}.$$

Ядро отображения Φ_1 совпадает с $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды для дифференциала ω равны нулю, то и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал

ω будет точным на F_μ , а значит, принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Ясно также, что если дифференциал принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$, то все его периоды равны нулю. Так как отображение Φ_1 взаимнооднозначно и линейно на факторпространстве, то $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \leq 2g$.

Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \geq 2g$$

и построим базис этого факторпространства.

Возьмем мероморфные дифференциалы из набора (*) на поверхности F_μ . Покажем, что классы смежности с такими дифференциалами будут линейно независимы над $\mathbf{C}$ на F_μ . От противного. Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты нули, равная нулевому классу, тогда верно равенство $C_1 \zeta_1 + \dots + C_g \zeta_g + \tilde{C}_1 \tau_{\tilde{P}_1}^{(n_1+1)} + \dots + \tilde{C}_g \tau_{\tilde{P}_1}^{(n_g+1)} = df$, где df — точный дифференциал второго рода, а f — однозначная мероморфная функция на F_μ .

Выберем среди коэффициентов $\tilde{C}_j \neq 0$ коэффициент с максимальным номером, например, $j = j_0$. Тогда f будет иметь в качестве особенностей только один полюс $\tilde{P}_1$ порядка n_{j_0} . Это противоречит выбору пробелов в точке $\tilde{P}_1$ на F_μ . Поэтому $\tilde{C}_1 = \dots = \tilde{C}_g = 0$.

Осталось равенство $C_1 \zeta_1 + \dots + C_g \zeta_g = df$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $C_1, \dots, C_g$. Так как $\zeta_1, \dots, \zeta_g$ — канонический базис, то a_j — период левой части будет равен C_j , а для правой части все периоды равны нулю. Отсюда $C_1 = \dots = C_g = 0$. Таким образом, доказали линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора (*).

Рассмотрим набор (**). Если существует линейная комбинация

$$C_1 \zeta_1 + \dots + C_g \zeta_g + \tilde{C}_1 \tau_{\tilde{P}_1}^{(2)} + \dots + \tilde{C}_g \tau_{\tilde{P}_g}^{(2)} = df,$$

то все коэффициенты $\tilde{C}_j = 0$, $j = 1, \dots, g$, так как в противном случае функция f будет иметь дивизор $(f) \geq \frac{1}{\tilde{P}_1 \dots \tilde{P}_g}$, что противоречит выбору точек $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_g$ на F_μ . Аналогично, как для набора (*), показывается, что $C_k = 0$, $k = 1, \dots, g$.

Поэтому $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) = 2g$.

Известно, что дифференциалы $\tau_{\tilde{P}_1}^{(n_j+1)}$ можно выбрать голоморфно зависящими от $[\mu]$ [10; 11]. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. Расслоение $\tilde{E}_1$ является голоморфным (глобально) тривиальным над пространством Тейхмюллера и существуют глобальные сечения для $\tilde{E}_1$ над $\mathbf{T}_g$, т.е. существуют $2g$ абелевых дифференциалов первого и второго рода, которые являются глобальными функциями от $[\mu]$ на $\mathbf{T}_g$.

Доказательство. Это следует из теоремы Грауэрта, в силу односвязности базы $\mathbf{T}_g$, о том,

что над такой базой расслоение становится глобально тривиальным или комплексно аналитически эквивалентным $\mathbf{T}_g \times \mathbf{C}^{2g}$. Следствие 3.1 доказано.

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}, F_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов с дивизорами кратными $\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}$, где $Q_1 \dots Q_s$ — локально голоморфное сечение в пространстве дивизоров степени s над $\mathbf{T}_g$, где $s \geq 2$.

Пусть $\tilde{E}_2 = \bigcup_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}, F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbf{T}_g$. По теореме Римана-Роха, $r(Q_1 \dots Q_s) = -s - g + 1 + i(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s})$. Отсюда $i(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}) = s + g - 1$, так как $r(Q_1 \dots Q_s) = 0$.

Рассмотрим набор дифференциалов

$$\zeta_1, \dots, \zeta_g, \tau_{Q_2 Q_1}, \dots, \tau_{Q_s Q_1}, \quad (1)$$

которые, по теореме Берса и по классическим результатам, локально голоморфно зависят от $[\mu]$.

Этот набор линейно независим над $\mathbf{C}$. Если $C_1 \zeta_1 + \dots + C_g \zeta_g + \tilde{C}_1 \tau_{Q_2 Q_1} + \dots + \tilde{C}_{s-1} \tau_{Q_s Q_1} = 0$ на F_μ , то $\tilde{C}_1 = \dots = \tilde{C}_{s-1} = 0$, так как нет особенностей в правой части. Коэффициенты $C_1 = \dots = C_g = 0$ в силу независимости $\zeta_1, \dots, \zeta_g$ над $\mathbf{C}$ на F_μ . Таким образом, доказано предложение.

Предложение 3.1. Векторное расслоение $\tilde{E}_2$ ранга $g + s - 1$ при $s \geq 2$ является голоморфным векторным расслоением над $\mathbf{T}_g$, а набор дифференциалов (1) дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

Следствие 3.2. Векторное расслоение $\tilde{E}_2$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbf{T}_g \times \mathbf{C}^{g+s-1}$ и существуют $g+s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbf{T}_g$.

Обозначим через $\tilde{E}_3 = \bigcup_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}, F_\mu) / \Omega(1, F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbf{T}_g$, $s \geq 2$, где $\Omega(1, F_\mu)$ — пространство голоморфных абелевых дифференциалов на F_μ .

По теореме Римана-Роха, $i(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}) = g + s - 1$ и $i(1) = g$ поэтому

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}, F_\mu) / \Omega(1, F_\mu) = s - 1.$$

Докажем, что набор классов смежности дифференциалов

$$\tau_{Q_2 Q_1}, \dots, \tau_{Q_s Q_1} \quad (2)$$

будет линейно независим над $\mathbf{C}$ на F_μ . Если $C_1 \tau_{Q_2 Q_1} + \dots + C_{s-1} \tau_{Q_s Q_1} = \omega$, где ω — голоморфный дифференциал, то все коэффициенты $C_1 = \dots = C_{s-1} = 0$, так как особые точки правой и левой сторон различны. Таким образом, доказали предложение.

Предложение 3.2. Векторное расслоение $\tilde{E}_3$ будет голоморфным векторным расслоением ран-

га $s - 1$ над $\mathbf{T}_g$, и классы смежности дифференциалов набора (2) образуют базис локально голоморфных сечений этого расслоения. Кроме того, $\tilde{E}_3$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbf{T}_g \times \mathbf{C}^{s-1}$ и существуют $s - 1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbf{T}_g$.

4. Пространства дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов второго рода для характера ρ на F_μ , а через $\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ — подпространство всех мультипликативно точных дифференциалов для ρ . Пусть ω_j — абелев дифференциал второго рода на F_μ с единственным полюсом в точке P_j точно второго порядка с нулевыми a -периодами, $j = 1, \dots, g$. Пусть $\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}$ — любой базис пространства голоморфных дифференциалов Прима для существенного характера ρ на F_μ , которые голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ и характера ρ [8, с. 105].

Введем наборы дифференциалов, представляющих классы смежности в фактор пространстве $\Omega_{2,\rho}(F_\mu) / \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$:

(i) для несущественных характеров

$$f_0 \zeta_1, \dots, f_0 \zeta_g, f_0 \omega_1, \dots, f_0 \omega_g, \quad (1)$$

$$f_0 \zeta_1, \dots, f_0 \zeta_g, f_0 \tau_{P_1}^{(n_1+1)}, \dots, f_0 \tau_{P_1}^{(n_g+1)}, \quad (2)$$

где $\tau_{P_1}^{(m)}$ — абелев дифференциал, $n_1, \dots, n_g$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса в точке P_1 на F_μ и $r_\rho(\frac{1}{P_1 \dots P_g}) = 1$;

(ii) для существенных характеров

$$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \tilde{\tau}_{P_1}^{(2)}, \dots, \tilde{\tau}_{P_{g-1}}^{(2)}, \quad (3)$$

$$\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_{g-1}, \tilde{\tau}_{P_1}^{(\tilde{n}_1+1)}, \dots, \tilde{\tau}_{P_1}^{(\tilde{n}_{g-1}+1)}, \quad (4)$$

где $\tilde{\tau}_P^{(m)}$ — дифференциал Прима, $\tilde{n}_j$ — мультипликативные пробелы Вейерштрасса на F_μ в точке $\tilde{P}_1$, и $r_\rho(\frac{1}{P_1 \dots P_{g-1}}) = 0$.

Обозначим через $E_1 = \bigcup_{[\mu], \rho} \Omega_{2,\rho}(F_\mu) / \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$

векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$, а $E_2 = \bigcup_{[\mu], \rho} \Omega_{2,\rho}(F_\mu) / \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus L_g$. В силу леммы 1.1, указанные расслоения корректно определены над такими базами.

Для любого характера $\rho \neq 1$ определим отображение из $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, сопоставляя дифференциалу ω его класс периодов $[\omega] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ [4]. При $\rho \neq 1$ пространство $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ является комплексным векторным пространством размерности $2g - 2$.

Поднимем $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$ на U , где $F_\mu = U/\Gamma'$. Найдём классические периоды

$\omega_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} \omega + m_1 \int_{\gamma_1} \omega + \dots + m_k \int_{\gamma_k} \omega$, где обозначили через γ_j петлю обходящую только вокруг полюса Q_j и не обходящую вокруг остальных полюсов для ω на F_μ и $m_j \in \mathbf{Z}, j = 1, \dots, k$. При этом интеграл $\int_{z_0}^{Tz_0} \omega$ берется по некоторому специальному пути в круге U , не проходящему через полюса дифференциала ω .

Так как ω – дифференциал Прима второго рода, то все вычеты для всех ветвей ω в полюсах равны нулю. Поэтому существует первообразная мероморфная функция $f(z)$ на U такая, что $\omega = df$ на $F_\mu \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\}$ и $\omega_{z_0}(T) = \int_{z_0}^{Tz_0} df(z)$ для любого $T \in \Gamma'$.

Зададим отображение

$$\begin{aligned} \Omega_{2,\rho}(F_\mu) \ni \omega &\rightarrow [\omega] = \\ &= \{\omega_{z_0}(A_1), \dots, \omega_{z_0}(B_g), \omega_{z_0}(\gamma_1), \dots, \omega_{z_0}(\gamma_k)\} \in \\ &\in H^1(\Gamma'', \rho'), \end{aligned}$$

где $\rho'(\gamma_j) = 1, j = 1, \dots, k, \rho' = \rho$ на $\pi_1(F_\mu) \cong \Gamma'$. Здесь Γ'' – фуксова группа первого рода униформизирующая поверхность $F_\mu \setminus \{Q_1, \dots, Q_k\}$ в круге U . Так как все $\omega_{z_0}(\gamma_j), j = 1, \dots, k$, равны нулю, то класс $[\omega]$ выражается только через $\omega_{z_0}(A_1), \dots, \omega_{z_0}(B_g)$, которые удовлетворяют уравнению $0 = \sum_{j=1}^g [\sigma(B_j)\omega_{z_0}(A_j) - \sigma(A_j)\omega_{z_0}(B_j)]$, и для $\rho \neq 1$ существует такое k , что при $\rho(A_k) \neq 1$ период $\omega_{z_0}(A_k) = 0$ и при $\rho(B_k) \neq 1$ период $\omega_{z_0}(B_k) = 0$ [4].

Значит, отображение $\Omega_{2,\rho}(F_\mu) \ni \omega \rightarrow [\omega] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ корректно определено, хотя сначала $[\omega] \in H^1(\Gamma'', \rho')$.

По лемме 1.2, если класс периодов $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ для некоторого $\omega \in \Omega_{2,\rho}(F_\mu)$, то дифференциал ω является мультипликативно точным для ρ на F_μ , а значит, $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$.

Если $\omega \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$, то как раньше все $\omega_{z_0}(\gamma_j) = 0, j = 1, \dots, k$. По условию $\omega = df$, где f – мультипликативная мероморфная функция на F_μ . Отсюда все периоды, по Р. Ганнингу, для ω принадлежат пространству $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Следовательно, $[\omega] = 0$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$.

Поэтому для любого $\rho \neq 1$ отображение периодов из $\Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu)$ в $H^1(\Gamma_\mu, \rho)$, задаваемое по правилу $\omega + \Omega_{e,\rho} \rightarrow [\omega + \Omega_{e,\rho}] = [\omega]$ будет корректно определено, взаимнооднозначно и линейно. Следовательно, $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \leq 2g - 2$ для любого $\rho \neq 1$.

Теорема 4.1. *Векторное расслоение E_1 над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$, причем сокращенные наборы (1) и (2) из $2g - 2$ классов смежности дифференциалов будут базисами локально голоморфных се-*

чений векторного расслоения E_1 . Кроме того, E_1 аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $2g - 2$.

Доказательство. Покажем, что верно обратное неравенство для размерностей и построим базис в нашем фактор-пространстве.

Рассмотрим наборы (1) и (2). Нужно показать, что два класса из перечисленных будут линейно зависеть от $2g - 2$ остальных классов. Вместо одного из дифференциалов $f_0\zeta_1, \dots, f_0\zeta_g$ можно взять df_0 , который представляет нулевой класс смежности. Действительно, если $\rho_0 \neq 1$ на F_{μ_0} , то существует $A_k \in \Gamma_\mu$, такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(A_k) \neq 1$. Поэтому $c_k \neq 0$ для любого ρ из достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset L_g \setminus \{1\}$ и для любого $[\mu] \in U[\mu_0]$. Так как $df_0 = 2\pi i c_1 f_0\zeta_1 + \dots + 2\pi i c_g f_0\zeta_g$, то $f_0\zeta_k$ выражается линейно через остальные.

Заметим, что верно неравенство $(f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}) \geq \frac{1}{P_1^{n_1+1}} \geq \frac{1}{P_1^{n_j+1}}$ для любого $j = 2, \dots, g$ и первый дифференциал $f_0\tau_{P_1}^{(n_1+1)}$ лежит во всех пространствах $\Omega_\rho(\frac{1}{P_1^{n_j+1}}), j = 2, \dots, g$, а значит, выражается как линейная комбинация через $g - 1$ остальных дифференциалов.

Покажем, что сокращенный набор (1) классов смежности для дифференциалов $f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, f_0\omega_2, \dots, f_0\omega_g$ будет линейно независим над $\mathbf{C}$.

Предположим, что существует линейная комбинация, с коэффициентами не всеми равными нулю, вида

$$\begin{aligned} C_1 f_0\zeta_1 + \dots + \widehat{C_k f_0\zeta_k} + \dots + C_g f_0\zeta_g + \\ + \tilde{C}_2 f_0\omega_2 + \dots + \tilde{C}_g f_0\omega_g = df, \end{aligned}$$

где f – (мероморфная) функция для ρ и $df \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$, а $\rho(A_k) \neq 1$. Верно неравенство $(f) \geq \frac{1}{P_2 \dots P_g} \geq \frac{1}{P_1 \dots P_g}$, но в силу выбора точек $P_1, \dots, P_g$ не существует таких функций f на F_μ для ρ . Поэтому коэффициенты $\tilde{C}_2 = \dots = \tilde{C}_g = 0$.

Оставшееся равенство влечет, что f является мультипликативной единицей и $f = C'_1 f_0$. Если $C'_1 = 0$, то $\zeta_1, \dots, \widehat{\zeta_k}, \dots, \zeta_g$ будут линейно зависимы на F_μ . Противоречие.

Если $C'_1 \neq 0$, то $C'_1 df_0 = df = \sum_{j \neq k} C_j f_0\zeta_j$. Для $\rho_0 \neq 1, \rho_0(A_k) \neq 1$, имеем

$$C'_1 df_0 = \left(\sum_{j \neq k} C'_1 2\pi i c_j f_0\zeta_j \right) + C'_1 2\pi i c_k f_0\zeta_k$$

на F_μ , где $C'_1 c_k \neq 0$. Отсюда получаем на F_μ равенство вида $\left(\sum_{j \neq k} (C'_1 2\pi i c_j - C_j) \zeta_j \right) + C'_1 2\pi i c_k \zeta_k = 0$.

Противоречие с линейной независимостью абелевых дифференциалов $\zeta_1, \dots, \zeta_g$. Поэтому $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Покажем, что сокращенный набор (2) классов смежности для дифференциалов $f_0\zeta_1, \dots, \widehat{f_0\zeta_k}, \dots, f_0\zeta_g, f_0\tau_{P_1}^{(n_2+1)}, \dots, f_0\tau_{P_1}^{(n_g+1)}$ будет

линейно независим над $\mathbf{C}$. Предположим, что существует линейная комбинация, с коэффициентами не всеми равными нулю, вида

$$C_1 f_0 \zeta_1 + \dots + \widehat{C_k f_0 \zeta_k} + \dots + C_g f_0 \zeta_g + \\ + \widetilde{C_2 f_0 \tau_{P_1}^{(n_2+1)}} + \dots + \widetilde{C_g f_0 \tau_{P_1}^{(n_g+1)}} = df,$$

где f – мероморфная функция для ρ и $df \in \Omega_{e,\rho}(F_\mu)$.

Выберем среди коэффициентов $\widetilde{C_j} \neq 0$ коэффициент с максимальным номером, например, $j = j_0$. Тогда f будет иметь в качестве особенностей только один полюс P_1 порядка n_{j_0} . Это противоречит выбору мультипликативных пробелов в точке P_1 на F_μ . Поэтому $\widetilde{C_2} = \dots = \widetilde{C_g} = 0$. Обращение в нуль коэффициентов $C_1, \dots, \widehat{C_k}, \dots, C_g$ доказывается также, как для предыдущего набора.

Таким образом, построили два вида наборов классов смежности, локально голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ , которые являются линейно независимыми над $\mathbf{C}$. Следовательно, верно обратное неравенство $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \geq 2g - 2$. Поэтому $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) = 2g - 2$.

По теореме Грауэрта [4; 11], в силу односвязности базы $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$, это расслоение аналитически эквивалентно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $2g - 2$. Теорема 4.1 доказана.

Замечание 4.1. Из теоремы 4.1 следует, что для расслоения E_1 существуют $2g - 2$ глобальных голоморфных сечений над базой $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$.

Теорема 4.2. Векторное расслоение E_2 над $\mathbf{T}_g \times (\text{Нот}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus L_g)$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$. При этом наборы (3) и (4) классов смежности дифференциалов будут базисами локально голоморфных сечений этого расслоения.

Доказательство. Нужно только доказать, что верно обратное неравенство для размерностей и построить базис в нашем фактор-пространстве. По теореме 1.1 существует $g - 1$ различных точек $P_1, \dots, P_{g-1}$ на F_μ , голоморфно зависящих от $[\mu]$ и ρ , таких, что $r_\rho(\frac{1}{P_1 \dots P_{g-1}}) = 0$, или не существует мультипликативных функций f для ρ на F_μ , чьи особенности только полюса порядка не выше 1 в этих точках.

Кроме того, по теореме 1.3 о мультипликативных пробелах Вейерштрасса для существенного характера ρ в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ , голоморфно зависящей от $[\mu]$ и ρ , имеется ровно $g - 1$ мультипликативных пробелов $\widetilde{n}_1, \dots, \widetilde{n}_{g-1}$, удовлетворяющих условию $1 \leq \widetilde{n}_1 < \widetilde{n}_2 < \dots < \widetilde{n}_{g-1} < 2g$ [8, с. 76].

Покажем, что классы смежности, задаваемые дифференциалами Прима из набора (3) или (4) для ρ , будут линейно независимы над $\mathbf{C}$ на F_μ .

Докажем от противного. Если набор (3) линейно не зависим, то верно равенство

$$C_1 \widetilde{\zeta}_1 + \dots + C_{g-1} \widetilde{\zeta}_{g-1} + C'_1 \widetilde{\tau}_{P_1}^{(2)} + \dots + C'_{g-1} \widetilde{\tau}_{P_{g-1}}^{(2)} = df,$$

в котором не все коэффициенты равны нулю, где f – мероморфная функция для ρ на F_μ . Коэффициенты $C'_1 = C'_2 = \dots = C'_{g-1} = 0$, так как не существует функции f для ρ , у которой только точки $P_1, \dots, P_{g-1}$ будут простыми полюсами.

Если числа $C_1, \dots, C_{g-1}$ не все равны нулю, то ввиду голоморфности левой части получим, что f – единица для ρ и характер ρ – несущественный. Получили противоречие с условием. Поэтому $C_1 = \dots = C_{g-1} = 0$.

Таким образом, показали, что набор (3) дает линейно независимые над $\mathbf{C}$ классы смежности нашего фактор пространства.

Покажем, что набор (4) представляет линейно независимые классы смежности. Предположим, что есть линейная зависимость и верно равенство

$$C_1 \widetilde{\zeta}_1 + \dots + C_{g-1} \widetilde{\zeta}_{g-1} + \\ + C'_1 \widetilde{\tau}_{\widetilde{P}_1}^{(\widetilde{n}_1+1)} + \dots + C'_{g-1} \widetilde{\tau}_{\widetilde{P}_{g-1}}^{(\widetilde{n}_{g-1}+1)} = df,$$

где f – мероморфная функция для ρ на F_μ . Если не все коэффициенты $C'_1, \dots, C'_{g-1}$ равны нулю, то существует коэффициент $C'_{j_0} \neq 0$ с максимальным номером, а значит, функция f имеет полюс только в точке $\widetilde{P}_1$ точно порядка $\widetilde{n}_{j_0}$. Противоречие, так как $\widetilde{n}_{j_0}$ – мультипликативный пробел Вейерштрасса в $\widetilde{P}_1$ на F_μ для ρ . Равенство нулю коэффициентов $C_1, \dots, C_{g-1}$ доказывается также, как выше. Таким образом, $\dim \Omega_{2,\rho}(F_\mu)/\Omega_{e,\rho}(F_\mu) \geq 2g - 2$ для существенных характеров ρ на F_μ . Теорема 4.2 доказана.

Обозначим через $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu)$ пространство мероморфных дифференциалов Прима для ρ с полюсами не выше первого порядка в точках $Q_1, \dots, Q_s$, $s \geq 2$, а через $\Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$ – подпространство мультипликативно точных голоморфных дифференциалов для ρ , где дивизор $Q_1 \dots Q_s$ на F_μ понимается как глобальное вещественно аналитическое сечение K . Эрла [12] расслоения целых дивизоров степени s над пространством Тейхмюллера $\mathbf{T}_g$ [8].

Введем наборы дифференциалов, представляющих классы смежности нашего фактор пространства: для несущественных характеров

$$f_0 \zeta_1, \dots, \widehat{f_0 \zeta_k}, \dots, f_0 \zeta_g, f_0 \tau_{Q_2 Q_1}, \dots, f_0 \tau_{Q_s Q_1}; \quad (*)$$

для существенных характеров

$$\widetilde{\zeta}_1, \dots, \widetilde{\zeta}_{g-1}, \widetilde{\tau}_{\rho; Q_2 Q_1}, \dots, \widetilde{\tau}_{\rho; Q_s Q_1}, \widetilde{\tau}_{\rho; Q_1}. \quad (**)$$

Для несущественного $\rho \neq 1$ дифференциал $df_0 \neq 0$ порождает одномерное подпространство в $\Omega_\rho(1; F_\mu)$, т.е. $\Omega_\rho(1; F_\mu) = \langle df_0 \rangle \oplus H$, где H будет $(g - 1)$ -мерным подпространством. Так если

$\rho_0 \neq 1$, то существует a_k такое, что $\exp 2\pi i c_k = \rho_0(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0 \pmod{\mathbf{Z}}$. Далее

$$\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i(c_1\zeta_1 + \dots + c_g\zeta_g).$$

Отсюда $2\pi i c_k f_0 \zeta_k = df_0 - \sum_{j \neq k} 2\pi i c_j f_0 \zeta_j$ и $H = \bigoplus_{j \neq k} \langle f_0 \zeta_j \rangle$. В достаточно малых окрестностях $U([\mu_0])$ и $U(\rho_0)$ для такого характера ρ_0 для всех $\rho \in U(\rho_0)$ верно $\rho(a_k) \neq 1$ или $c_k \neq 0$.

Обозначим через

$$E_3 = \bigcup_{[\mu], \rho} \Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu\right) / \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$$

векторное расслоение над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$.

Используя формулу Римана-Роха, для любого характера найдем размерность $\Omega_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu)$. Имеем

$$r_{\rho^{-1}}(Q_1 \dots Q_s) = \deg\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}\right) - g + 1 + i_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}\right).$$

Предположим, что существует $f \neq 0, f \in L_{\rho^{-1}}(Q_1 \dots Q_s)$, т. е. f для ρ^{-1} , такая, что $(f) \geq Q_1 \dots Q_s, s \geq 1$. Следовательно,

$$0 = \deg(f) \geq s \geq 1 > 0.$$

Противоречие. Поэтому $r_{\rho^{-1}}(Q_1 \dots Q_s) = 0$ и $i_\rho(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}) = g + s - 1$.

Теорема 4.3. Векторное расслоение E_3 над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $g + s - 2$, причем сокращенный набор (*) из $g + s - 2$ классов смежности дифференциалов будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения, где $s \geq 2$. Кроме того, E_3 аналитически изоморфно тривиальному векторному расслоению над $\mathbf{T}_g \times (L_g \setminus \{1\})$ ранга $g + s - 2$.

Доказательство. Пусть ρ – несущественный характер и $\rho \neq 1$. Тогда существует f_0 мультипликативная единица, т. е. $(f_0) = 1$ такая, что $0 \neq df_0 \in \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Покажем, что нет других базисных элементов, кроме $cdf_0, c \neq 0$, в $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Предположим противное, пусть существует $\omega \neq 0$ и $\omega \neq cdf_0$, принадлежащий $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Тогда $\omega = df$ – мультипликативно точный голоморфный дифференциал, и существует голоморфная функция f для ρ и $\deg(f) = 0$. Так как у f нет полюсов, то нет и нулей, и f – мультипликативная единица для ρ на F_μ . Поделив f на f_0 , получим функцию $g = \frac{f}{f_0}$, такую, что $(g) = (\frac{f}{f_0}) = (f) = 1$, где g – однозначная голоморфная функция на F_μ , а значит, g константа, отличная от нуля. Тогда $f = cf_0$, и $\omega = df = cdf_0, c \neq 0$. Противоречие. Поэтому $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = \langle df_0 \rangle$ и $\dim_{\mathbf{C}} \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = 1$.

Отсюда получаем, что

$$\dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu\right) / \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = g + s - 2.$$

Для несущественного характера ρ построим базис в этом фактор пространстве. Возьмем для $\rho_0 \neq 1, \rho_0(a_k) = \exp 2\pi i c_k$ следующие дифференциалы : $f_0\zeta_1, \dots, f_0\zeta_k, \dots, f_0\zeta_g, f_0\tau_{Q_2 Q_1}, \dots, f_0\tau_{Q_s Q_1}$, где $2\pi i c_k f_0 \zeta_k = df_0 - 2\pi i \sum_{j \neq k} c_j f_0 \zeta_j, c_k \neq 0$. Пусть существует линейная комбинация, у которой не все нулевые коэффициенты, такая, что

$$C_1 f_0 \zeta_1 + \dots + \widehat{C_k f_0 \zeta_k} + \dots + C_g f_0 \zeta_g +$$

$$\tilde{C}_2 f_0 \tau_{Q_2 Q_1} + \dots + \tilde{C}_s f_0 \tau_{Q_s Q_1} = df$$

на F_μ , где f – голоморфная мультипликативная функция на F_μ . Тогда коэффициенты $\tilde{C}_2 = 0, \dots, \tilde{C}_s = 0$, так как дифференциалы в правой и левой частях имеют разные особые точки.

Теперь, как в доказательстве теоремы 4.1, получим, что $C_j = 0$ для всех $j \neq k$.

Таким образом, набор классов смежности $[f_0\zeta_1], \dots, [\widehat{f_0\zeta_k}], \dots, [f_0\zeta_g], [f_0\tau_{Q_2 Q_1}], \dots, [f_0\tau_{Q_s Q_1}]$ будет базисом в нашем фактор пространстве для несущественного характера $\rho \neq 1$, который голоморфно зависит от $[\mu] \in U[\mu_0]$ и от $\rho \in U(\rho_0)$. Теорема 4.3 доказана.

Заметим, что для $\rho \equiv 1, s > 1$, дифференциалы $\zeta_1, \dots, \zeta_g, \tau_{Q_2 Q_1}, \dots, \tau_{Q_s Q_1}$ образуют базис в пространстве $\Omega(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu)$ и $\Omega_e(1; F_\mu) = \{0\}$, так как, по классической теореме Римана-Роха,

$$i\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}\right) = s + g - 1 + r(Q_1 \dots Q_s) = s + g - 1.$$

Теорема 4.4. Векторное расслоение E_4 над $\mathbf{T}_g \times (\text{Нот}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus L_g)$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $g + s - 1$. При этом набор (**) классов смежности дифференциалов будет базисом локально голоморфных сечений этого векторного расслоения, где $s \geq 1, g > 1$.

Доказательство. Пусть ρ – существенный характер. Рассмотрим пространство $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$. Предположим, что существует $\omega \neq 0, \omega \in \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu)$, тогда $\omega = df$ – голоморфный мультипликативно точный дифференциал для ρ . Следовательно, f – глобальная голоморфная мультипликативная функция для существенного ρ . Известно, что $\deg(f) = 0$, поэтому f – мультипликативная единица для ρ , а значит ρ – несущественный. Получили противоречие. Поэтому $\Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = \{0\}$.

Таким образом :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu\right) / \Omega_{e, \rho}(1; F_\mu) = \\ = \dim_{\mathbf{C}} \Omega_\rho\left(\frac{1}{Q_1 \dots Q_s}; F_\mu\right) = g + s - 1. \end{aligned}$$

С учетом теоремы 2.3, для существенного характера ρ имеем $g + s - 1$ линейно независимых дифференциалов $\zeta_1, \dots, \zeta_{g-1}, \tilde{\tau}_{\rho; Q_2 Q_1}, \dots, \tilde{\tau}_{\rho; Q_s Q_1}, \tilde{\tau}_{\rho; Q_1}$.

Действительно, если существует линейная комбинация с ненулевыми коэффициентами вида

$$c_1\tilde{\zeta}_1 + \dots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} + c'_1\tilde{\tau}_{\rho;Q_1} + \\ + c'_2\tilde{\tau}_{\rho;Q_2Q_1} + \dots + c'_s\tilde{\tau}_{\rho;Q_sQ_1} = df,$$

где df — голоморфный мультипликативно точный дифференциал Прима для ρ , то коэффициенты $c_2 = \dots = c_s = 0$, поскольку точки $Q_2, \dots, Q_s$ не являются особыми для правой части. Затем $c_1 = 0$, так как в противном случае функция f не будет локально однозначна в проколотой окрестности точки Q_1 , что противоречит условию $\rho(\gamma_1) = 1$, где γ_1 — петля, обходящая точку Q_1 . Остается равенство $c_1\tilde{\zeta}_1 + \dots + c_{g-1}\tilde{\zeta}_{g-1} = df$. В нашем случае $df = 0$, а значит, коэффициенты $c_1 = \dots = c_{g-1} = 0$. Теорема 4.4 доказана.

Теорема 4.5. На компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для первой голоморфной группы когомологий де Рама

$$H_{hol,\rho}^1(F_\mu) = \Omega_\rho(1; F_\mu) / \Omega_{e,\rho}(1; F_\mu)$$

для характеров верно, что $\dim_{\mathbb{C}} H_{hol,\rho}^1(F_\mu) = g-1$, если $\rho \neq 1$. В этих фактор пространствах на F_μ :

(i) для несущественного характера $\rho_0 \neq 1, \rho_0(a_k) \neq 1$, классы смежности $[f_0\zeta_1], \dots, [f_0\zeta_k], \dots, [f_0\zeta_g]$ дифференциалов образуют базис, которые локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ ;

(ii) для существенного характера ρ классы смежности $[\tilde{\zeta}_1], \dots, [\tilde{\zeta}_{g-1}]$ дифференциалов образуют базис, где $\zeta_1, \dots, \zeta_{g-1}$ — любой базис голоморфных дифференциалов в пространстве $\Omega_\rho(1; F_\mu)$, которые локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и от ρ .

5. Гармонические дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности

Гармоническим дифференциалом Прима ϕ на F для $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма

$$\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(\bar{z})d\bar{z}$$

на U , такая, что $\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)dz + \phi_2(\bar{z})d\bar{z})$, $T \in \Gamma, z \in U$.

Гармонический дифференциал Прима ϕ на U представляется в виде $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(\bar{z})d\bar{z}$, где $\phi_1(z)dz = df_1(z), \phi_2(\bar{z})d\bar{z} = df_2(\bar{z}), f_j(z)$ — голоморфные функции на $U, j = 1, 2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi = df(z)$, где $f(z) = f_1(z) + f_2(\bar{z})$ — комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала ϕ). Также получаем следующие соотношения:

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T), \phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T),$$

где

$$\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0) = \phi_1(T) + \phi_2(T),$$

$$\phi_1(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0),$$

$$\phi_2(T) = \overline{f_2(Tz_0)} - \rho(T)\overline{f_2(z_0)}.$$

Здесь $\phi_1(Tz)dTz = \rho(T)\phi_1(z)dz, \phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} = \rho(T)\phi_2(\bar{z})d\bar{z}, T \in \Gamma, z \in U$. Следовательно, отображение периодов $\phi : T \rightarrow \phi(T)$ или $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$, относительно гармонического интеграла Прима $f(z)$, есть элемент из $Z^1(\Gamma, \rho)$. Если $\hat{f}_1(z) = f_1(z) + c_1, \hat{f}_2(z) = f_2(z) + c_2$ — другие интегралы Прима для $\phi_1(z)dz, \phi_2(\bar{z})d\bar{z}$ соответственно, то

$$\widehat{\phi}_1(T) = \phi_1(T) + c_1\sigma(T),$$

$$\widehat{\phi}_2(T) = \overline{(f_2(Tz_0) + c_2)} - \rho(T)\overline{(f_2(z_0) + c_2)} = \\ = \phi_2(T) + \overline{c_2}\sigma(T).$$

Таким образом,

$$\widehat{\phi}(T) = \phi(T) + (c_1 + \overline{c_2})(1 - \rho(T)), T \in \Gamma,$$

и отображения периодов при различных гармонических интегралах Прима для одного и того же гармонического дифференциала Прима будут отличаться на элемент из $B^1(\Gamma, \rho)$. Поэтому $\mathbb{C}$ -линейное отображение $p : \phi \rightarrow [p] \in H^1(\Gamma, \rho)$, которое гармонический дифференциал Прима ϕ переводит в его класс периодов $[p]$, корректно определено.

Обозначим через $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ пространство всех гармонических дифференциалов Прима для ρ на F .

Теорема 5.1. Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, ϕ — гармонический дифференциал Прима на F для $\rho \in [S^1]^{2g}$ и $[\phi] = 0$ в $H^1(\Gamma, \rho)$. Тогда $\phi = 0$ на F .

Доказательство 1. [8, с. 155]. По лемме 3.2.1 [8] дифференциал $\phi = \varpi + \bar{\varphi}$, где ϖ и φ — голоморфные дифференциалы Прима для ρ и $\bar{\rho}$ соответственно на F . Из условия $[\phi] = 0$ и леммы 3.2.2 [8] следует существование мультипликативной функции f на F для ρ , такой, что $\varpi + \bar{\varphi} = df(z)$ на U . Покажем, что $\varpi = 0 = \varphi$ на U . От противного. Предположим, что $\varphi \neq 0$ на фундаментальной области Δ для группы Γ (или на F). Тогда, положив $\varphi = g(z)dz$ на Δ , имеем :

$$\frac{i}{2} \int_{\Delta} \int_{\Delta} \varphi \wedge \bar{\varphi} = \int_{\Delta} \int_{\Delta} |g(z)|^2 dx \wedge dy > 0.$$

С другой стороны,

$$\varphi \wedge \bar{\varphi} = \varphi \wedge \varpi + \varphi \wedge \bar{\varphi} = \\ = \varphi \wedge df = -d(f\varphi).$$

Отсюда

$$\int_{\Delta} \int_{\Delta} \varphi \wedge \bar{\varphi} = \int_{\Delta} \int_{\Delta} \varphi \wedge df = - \int_{\partial\Delta} f\varphi = 0$$

по теореме 3.2.3 [8, с. 155], так как $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \bar{\rho}$, $\rho\bar{\rho} = 1$ и для дифференциала df все a -периоды и b -периоды равны 0. Получили противоречие. Поэтому $\phi = \varpi$.

Повторяя предыдущие рассуждения с ϖ , получим, что $\varpi = 0$ на U .

Доказательство 2. Используя обозначения предыдущего доказательства, получим, что

$$0 \leq (\phi, \phi) = \int \int_{\Delta} \phi \wedge \bar{\phi} = \int_{\partial\Delta} f(z)(\bar{*}\phi) = 0.$$

Последнее равенство снова выводится из теоремы 3.2.3 [8]. Отсюда, $(\phi, \phi) = 0$ на Δ и $\phi = 0$ на Δ . Следовательно, $\phi = 0$ на F . Теорема доказана.

Следствие 5.1. Гармонический дифференциал Прима ϕ на F для $\rho \in [S^1]^{2g} \setminus 1$ единственно определяется своим классом периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ и $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$.

Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $\rho \in \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g - 2)$ -мерное векторное пространство $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ при $\rho \notin L_g \cup \bar{L}_g$, так как

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho)),$$

где $\bar{L}_g$ — образ L_g при отображении $\rho \rightarrow \bar{\rho}$. Выберем базис $\{\phi_j(z; \rho, [\mu])dz\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, голоморфно зависящий от ρ в достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$ и голоморфно зависящий от $[\mu]$ в достаточно малой окрестности $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ [8, с. 105; 4]. Одновременно выберем базис $\{\phi_j(z; \bar{\rho}, [\bar{\mu}])dz\}_{j=1}^{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\bar{\rho}))$, голоморфно зависящий от $\bar{\rho}$ в $U(\rho_0)$ (образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho \rightarrow \bar{\rho}$, это отображение будет автоморфизмом на $L_g \cup \bar{L}_g$) и голоморфно зависящий от $[\bar{\mu}]$ в достаточно малой окрестности $\bar{U}([\mu_0])$. Здесь класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1, c_2, \dots, c_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $[\bar{\mu}]$ имеет модули $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$.

Поэтому набор гармонических дифференциалов Прима

$$\begin{aligned} \phi_1(z; \rho, [\mu])dz, \dots, \phi_{g-1}(z; \rho, [\mu])dz, \\ \overline{\phi_1(z; \rho, [\mu])dz}, \dots, \overline{\phi_{g-1}(z; \rho, [\mu])dz} \end{aligned}$$

образует базис, голоморфно зависящий от $\rho \in U(\rho_0)$ и от $[\mu]$.

Таким образом, на комплексном векторном расслоении (это есть так называемое гармоническое расслоение Прима)

$$\mathbf{HP} = \bigcup_{[\mu], \rho \notin L_g \cup \bar{L}_g} \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{0,1}$$

ранга $2g - 2$ над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ определено по формуле:

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int \int_{w^s([\mu])(\Delta)} (u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2) dz \wedge d\bar{z},$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U ; $\phi_j = u_j(z)dz + v_j(z)d\bar{z}$, $j = 1, 2$. Здесь $s([\mu])$ — локально голоморфное сечение Эрла над пространством Тейхмюллера [12].

Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1, \phi_2) = (\phi_2, \phi_1)$. Легко видеть, что $\mathbf{C}$ -линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как, если $\phi_1 = u(z)dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, $\phi_2 = v(z)d\bar{z} \in \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$, тогда $(\phi_1, \phi_2) = \int \int_{w^s([\mu])(\Delta)} u dz \wedge \overline{v(z)d\bar{z}} = 0$. Векторные расслоения $\mathbf{P}_{1,0}$, $\mathbf{P}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$. Следовательно, доказана

Теорема 5.2. Гармоническое расслоение Прима $\mathbf{HP} = \bigcup_{([\mu], \rho)} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$. Кроме того, $\mathbf{HP}$ является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных $*$ -инвариантных векторных подрасслоений $\mathbf{P}_{1,0}$ и $\mathbf{P}_{0,1}$ ранга $g - 1$ над

$$\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$$

при любом $g \geq 2$.

Зададим конечное покрытие для $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1$ открытыми окрестностями $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}$, $j = 1, \dots, g$. Рассмотрим характер $\rho \in ([S^1]^{2g} \setminus 1) \cap U_1$. Для других окрестностей U_j , $j = 2, \dots, 2g$ рассмотрения будут аналогичны.

Следствие 5.2. Для любого $\rho_0 \in [S^1]^{2g} \setminus 1$ существует окрестность $U(\rho_0) \subset \{[S^1]^{2g} \setminus 1\}$, такая, что для $\rho \in U(\rho_0) \cap U_1$ в $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима $\phi_1 = \phi_1(\rho; z), \dots, \phi_{2g-2} = \phi_{2g-2}(\rho; z)$, вещественно-аналитически зависящий от ρ и имеющий матрицу периодов, относительно $A_2, \dots, A_g, B_2, \dots, B_g$, вида I_{2g-2} (единичная матрица порядка $2g - 2$).

Обозначим через $Z^1(\Gamma, \rho)$ при $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$, таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$.

Приведем основные свойства таких отображений:

1) $\phi(1) = 0$, так как $\phi(S \cdot 1) = \phi(S) + \rho(S)\phi(1)$ и $\rho(S) \neq 0$;

2) $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как

$$0 = \phi(1) = \phi(SS^{-1}) = \phi(S) + \rho(S)\phi(S^{-1})$$

и $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$;

3) $\phi([A, B] \cdot [C, D]) = \phi([A, B]) + \phi([C, D])$, так как $\rho([A, B]) = 1$;

4) $\phi([A, B]) = \sigma(B)\phi(A) - \sigma(A)\phi(B)$ для любых $A, B \in \Gamma$, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma$;

5)

$$\phi(ABA^{-1}) = \phi([A, B]B) =$$

$$\phi([A, B]) + \phi(B), \quad A, B \in \Gamma;$$

6) $\phi(ABA^{-1}) = \rho(A)\phi(B)$, $A \in \Gamma, B \in [\Gamma, \Gamma]$.

Теорема 5.3. Когомологическое расслоение Ганнинга G является голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$ над

$$\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1).$$

Доказательство. При $\rho_\mu \neq 1$ существует изоморфизм векторного пространства $H^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$ и векторного пространства $\text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$, состоящего из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu] \rightarrow (\mathbf{C}, +)$, таких, что $\phi_0(S^\mu T^\mu (S^\mu)^{-1}) = \rho_\mu(S^\mu)\phi_0(T^\mu)$, где $T^\mu \in [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], S^\mu \in \Gamma_\mu, [\Gamma, \Gamma]$ — коммутант группы Γ . Таким образом, расслоение G над $\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1)$ изоморфно расслоению со слоем $\text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ над $([\mu], \rho)$, где

$$\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu), \rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu), j = 1, \dots, g.$$

Зададим карту $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g)$ над $\mathbf{T}_g(F) \times U_l$ биективно отображающую $G|_{\mathbf{T}_g(F) \times U_l}$ на $\mathbf{T}_g(F) \times U_l \times \mathbf{C}^{2g-2}$ по правилу: элементу $\phi_0([\mu], \rho_\mu) \in \text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ сопоставляется набор :

$$([\mu], \rho; \xi_1^l, \dots, \xi_{g-1}^l, \eta_1^l, \dots, \eta_{g-1}^l).$$

Здесь над U_l имеем:

$$\xi_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_j^\mu, A_l^\mu]), \eta_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_j^\mu, A_l^\mu]),$$

а над $U_{g+1} -$

$$\xi_j^{g+1} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_j^\mu, B_l^\mu]),$$

$$\eta_j^{g+1} = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_j^\mu, B_l^\mu]),$$

где $\tilde{j} = j$, при $1 \leq j \leq l-1$, и $\tilde{j} = j+1$, при $l \leq j \leq g-1$. Для $\rho \in U_1$, например, будет $\sigma_\mu(A_1^\mu) = 1 - \rho_\mu(A_1^\mu) \neq 0$ и любой элемент $\phi_0 = \phi_0([\mu], \rho_\mu) \in \text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ можно задать как $\phi_0 = \phi_1|_{[\Gamma_\mu, \Gamma_\mu]}$ для $\phi_1 = \phi_1([\mu], \rho_\mu) \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$, такого, что

$$\phi_1(A_1^\mu) = 0, \phi_1(T^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-1}\phi_0([T^\mu, A_1^\mu]), T^\mu \in \Gamma_\mu.$$

Отсюда получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \xi_j^1 &= \phi_0([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \\ &= \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(A_{j+1}^\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_j^1 &= \phi_0([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \\ &= \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(B_{j+1}^\mu), \quad j = 1, \dots, g-1. \end{aligned}$$

Кроме того, из основного коциклического соотношения и задания координат над U_1 следует, что :

$$\phi_1(B_1^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-2} \sum_{j=1}^{g-1} [\sigma_\mu(B_{j+1}^\mu)\xi_j^1 - \sigma_\mu(A_{j+1}^\mu)\eta_j^1].$$

Таким образом, $\phi_1(A_j^\mu), \phi_1(B_j^\mu), j = 1, \dots, g$, выражаются через $\xi_j^1, \eta_j^1, j = 1, \dots, g-1$, и последние можно взять в качестве координат для ϕ_0 в слоях над $\mathbf{T}_g(F) \times U_1$. Аналогично можно поступить для остальных окрестностей.

Координаты ξ_j^l, η_j^l являются линейными комбинациями от $\phi_l(A_j), \phi_l(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_l$, а также линейными комбинациями от $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$, так как $\phi_l|_{[\Gamma, \Gamma]} = \phi_0 = \phi_k|_{[\Gamma, \Gamma]}$ над $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$ (здесь ϕ_k и ϕ_l определяются, аналогично, как ϕ_1 над U_1 , над U_k и U_l соответственно). Далее, $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ — линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k$. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l будут линейными комбинациями от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$. Таким образом, получим, что матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на

$$\mathbf{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$$

для всех $k, l = 1, \dots, 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g), l = 1, \dots, 2g$, задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1)$. Теорема доказана.

Теорема 5.4. Векторные расслоения Ганнинга $G = \bigcup_{([\mu], \rho)} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и Прима $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$ будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга G над

$$\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$$

равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g-1$ для любого $g \geq 2$.

Доказательство. Имеем включения

$$[S^1]^{2g} \setminus 1 \subset \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L_g}) \subset \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1,$$

что сразу следует из теоремы Фаркаша–Кра [6, с.130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g} \setminus 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L_g})$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L_g})$, ограниченные на $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [8; 4], а послойный $\mathbf{C}$ –линейный изоморфизм p будет

также вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$.

Второе утверждение следует из теорем 3.1, 3.3 и 4.1, а также из теоремы 3.1.3 [8, с. 140]. Теорема доказана.

Литература

- [1] Prym, F. *Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's* / F. Prym, G. Rost. – Leipzig: Teubner, 1911.
- [2] Appell, P. *Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application au developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques* / P. Appell // Acta Math. – 1890. – Vol. 13:3/4. – P. 1 – 174.
- [3] Petersson, H. *Über eine metrisierung der automorphen Formen in die Theorie der Poincareschen Reinen* / H. Petersson // Math. Ann. – 1940. – Vol. 117:4. – P. 453 – 457.
- [4] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differentials* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.
- [5] Fay, J. *Analytic Torsion and Prym differential* / J. Fay // Proc. of the 1978 Stony Brook Conf. – Princeton : Princeton Univ. Press. – 1980. – P. 107 – 122.
- [6] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math.. – Vol. 71. – New-York: Springer, 1992.
- [7] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин – М.: МГУ, 1986.
- [8] Чуешев, В.В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.
- [9] Чуешев, В. В. *Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев // Матем. заметки. – 2003 – Vol. 74:4. – С. 629 – 636.
- [10] Альфорс Л. В., Берс, Л. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.:ИЛ, 1961.
- [11] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2005.
- [12] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.
- [13] Спрингер, Дж. *Введение в теорию римановых поверхностей* / Дж. Спрингер. – М.: ИЛ, 1960.
- [14] Arbarello, E. *Weierstrass points and moduli of curves* / E. Arbarello // Compositio Math. – 29 (1974). – P. 325 – 342.
- [15] Головина, М. И. *Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности* / М. И. Головина // Вестник КемГУ. – 2011. – Vol. 3/1. – С. 193 – 199.
- [16] Пушкарева, Т. А. *Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов на переменной компактной римановой поверхности* / Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев // Вестник КемГУ. – 2011. – Vol. 3/1. – С. 211 – 216.
- [17] Golovina, M. I. *Meromorphic Prym differentials on a variable Riemann surface* / M.I. Golovina // International conference ISAAC. – Moscow, August 2011. – 1 с.
- [18] Пушкарева, Т.А. *Классы периодов гармонических дифференциалов Прима на переменной компактной римановой поверхности* / Т.А. Пушкарева // [Электронный ресурс]. Тезисы Международной школы-конференции по геометрии и анализу. Кемерово. – 2011. 2 с. Зарегистрировано в Депозитарии электронных изданий "Информрегистр". – № 0321102235. – Режим доступа: <http://conference.kemsu.ru/conf/GA2011/tesis.zip>, свободный.
- [19] Казанцева, А. А., Чуешев, В. В. *Элементарные мероморфные дифференциалы Прима на конечной римановой поверхности* / А. А. Казанцева, В. В. Чуешев // [Электронный ресурс]. Тезисы Международной школы-конференции по геометрии и анализу. Кемерово. – 2011. 4 с. Зарегистрировано в Депозитарии электронных изданий "Информрегистр". – № 0321102235. – Режим доступа: <http://conference.kemsu.ru/conf/GA2011/tesis.zip>, свободный.