

$\phi_l|_{[\Gamma, \Gamma]} = \phi_0 = \phi_k|_{[\Gamma, \Gamma]}$ над $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$ (здесь ϕ_k и ϕ_l определяются аналогично как ϕ_1 над U_1 , над U_k и U_l соответственно). Далее, $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ — линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k$. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l будут линейными комбинациями от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$. Таким образом, получим, что матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на

$$\mathbf{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$$

для всех $k, l = 1, \dots, 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g), l = 1, \dots, 2g$ задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1)$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Векторные расслоения Ганнинга $G = \bigcup_{([\mu], \rho)} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и Прима $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$ будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга G над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$ равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g - 1$ для любого $g \geq 2$.

Доказательство. Имеем включения

$$[S^1]^{2g} \setminus 1 \subset \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L}_g) \subset \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1,$$

что сразу следует из теоремы Farkas–Kra [5, с.130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g} \setminus 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L}_g)$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и $\mathbf{HP}$ над

$\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L}_g)$, ограниченные на $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [3; 4], а послойный $\mathbf{C}$ -линейный изоморфизм p будет также вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$.

Второе утверждение следует из теорем 3.1, 3.3, и 4.1, а также из теоремы 3.1.3 [3, с. 140]. Теорема доказана.

Литература

[1] Appell, P. *Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application au developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques* / P. Appell // Acta Math. – 1890. – Vol. 13: 3/4. – P. 1 – 174.

[2] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности*. / В. В. Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2005.

[3] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч. 2.* / В. В. Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2003.

[4] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differential* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[5] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – Vol. 71, New-York: Springer, 1992.

6. Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

УДК 517.54: 517.862

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БЕРСА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МЕРОМОРФНЫХ (q, ρ) -ФОРМ

О. А. Сергеева

THE INTEGRAL BERS OPERATOR IN THE NORMED SPACES OF MEROMORPHIC (q, ρ) -FORMS

О. А. Sergeeva

В пространствах мультипликативных мероморфных автоморфных форм для произвольного характера вводятся интегральная норма, билинейное спаривание и интегральный оператор Берса. Получены аналог неравенства Шварца для билинейного спаривания, универсальная оценка нормы и свойство самосопряженности для интегрального оператора Берса в случае мероморфных (q, ρ) -форм.

In spaces of multiplicative meromorphic automorphic forms the integral norm, bilinear pairing and the integral Bers operator for any character are entered. Under study an universal estimation of norm, selfadjointness for Bers operator in case of meromorphic (q, ρ) - forms and an analog of an inequality of Schwarz are received.

Ключевые слова: интегральный оператор Берса, мультипликативная мероморфная автоморфная форма, билинейное спаривание, двойственность.

Keywords: Integral Bers operator, multiplicative meromorphic automorphic form, bilinear pairing, duality.

Работа поддержана грантом ФЦП № 02.740. 11. 0457.

1. Предварительные сведения

Пусть D – ограниченное открытое множество в $\overline{\mathbb{C}}$, конформно эквивалентное единичному кругу Δ ; G – отмеченная конечнопорожденная разрывная группа конформных преобразований множества D на себя, такая, что $D/G = F$ – отмеченная компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$.

Пусть $\lambda = \lambda_D$ задаёт метрику Пуанкаре на D по правилу: для конформного отображения $f: \Delta \rightarrow D$ $\lambda_D(f(z))|f'(z)| = \lambda_\Delta(z)$, $z \in \Delta$, где $\lambda_\Delta(z) = \frac{1}{1-|z|^2}$ – коэффициент метрики Пуанкаре в единичном круге Δ . Известно [1], что для любого конформного преобразования множества D справедливо равенство $\lambda_{A(D)}(Az)|A'(z)| = \lambda_D(z)$, $z \in D$.

Обозначим через $\text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ группу всех одномерных комплексных характеров (гомоморфизмов) ρ из G в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ с естественной операцией умножения.

Определение 1. Измеримой (мероморфной, голоморфной) мультипликативной автоморфной формой порядка q с характером ρ на F ((q, ρ) -формой) называется однозначная измеримая (мероморфная, голоморфная) функция φ на D с условием:

$$\varphi(Az)A'(z)^q = \rho(A)\varphi(z), A \in G, z \in D, D/G = F.$$

При этом (q, ρ) -форма и $(q, \frac{1}{\rho})$ -форма считаются ρ -двойственными, а (q_1, ρ) -форма и (q_2, ρ) -форма – q -двойственными формами для $q = q_1 + q_2$. Формы одновременно q - и ρ -двойственные называются (q, ρ) -двойственными формами.

Мультипликативная автоморфная форма f нулевого порядка с характером ρ называется мультипликативной функцией для ρ . Если f_1 – мультипликативная функция для ρ_1 без нулей и полюсов на D , то характер ρ_1 называется несущественным ([2, 3]), а сама такая функция f_1 называется мультипликативной единицей для ρ_1 .

Ключевая роль в развитии мультипликативной теории измеримых автоморфных форм принадлежит разложению Фаркаша-Кра ([2, 3]): для произвольного характера $\rho \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ существует и единственно представление в виде $\rho = \rho_0 \cdot \rho_1$, где ρ_0 – нормированный характер, т. е. $|\rho_0(A)| = 1$ для любого $A \in G$, а ρ_1 – несущественный характер с мультипликативной единицей f_1 .

Определение 2. ([1]) Измеримая на $\mathbb{C}$ функция $\nu_q(z)$, $2 \leq q \in \mathbb{N}$ называется обобщённым коэффициентом Бельтрами для разрывной группы G преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с множеством разрывности $\Omega(G)$, если

$$\nu_q(Az)A'(z)^{1-q}\overline{A'(z)} = \nu_q(z), A \in G, z \in \Omega(G),$$

$$\nu_q|_{\Lambda(G)} = 0, \Lambda(G) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega(G),$$

и почти всюду на $\mathbb{C}$ верна оценка

$$|\nu_q(z)| \leq K\lambda(z)^{2-q}, \text{ где } K = \text{const}. \quad (1)$$

Замечание 1. При $q = 2$ обобщенные коэффициенты Бельтрами являются обычными коэффициентами Бельтрами, возникающими в теории квазиконформных отображений.

Лемма 1. ([1]) Если $\psi \in \mathcal{L}_q^\infty(D, G)$, т. е. ψ – измеримая ограниченная автоморфная форма, то $\lambda(z)^{2-2q} \cdot \overline{\psi(z)}$ является обобщенным коэффициентом Бельтрами для q , у которого коэффициент K из оценки (1) равен

$$K = \|\psi\|_{q, \infty} = \sup_{z \in D} \{ \lambda(z)^{-q} |\psi(z)| \} < \infty.$$

Кроме того, любой обобщенный коэффициент Бельтрами получается таким способом из измеримой ограниченной автоморфной формы.

Отсюда получаем важную в последующем лемму

Лемма 2. Пусть ν_{q_1} и ν_{q_2} – два обобщенных коэффициента Бельтрами для q_1 и q_2 соответственно. Тогда

$$\mu_q(z) = \frac{\nu_{q_1}(z) \cdot \nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2}, z \in D \quad (2)$$

тоже обобщенный коэффициент Бельтрами для $q = q_1 + q_2$ на D . Кроме того, таким способом можно получить любой обобщенный коэффициент Бельтрами для $q = q_1 + q_2$.

2. Нормы в пространствах голоморфных и мероморфных (q, ρ) -форм

В работах [4, 5, 6] рассмотрены нормированные пространства $A_{q, \rho}^p(D, G)$ голоморфных (q, ρ) -форм ϕ , интегрируемых со степенью p , с нормой

$$\|\phi\|_0^p = \iint_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left| \frac{\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty \quad (3)$$

для некоторого p , $1 \leq p \in \mathbb{R}$, где f_1 – мультипликативная единица для несущественного характера ρ_1 в разложении Фаркаша-Кра $\rho = \rho_0 \rho_1$, $|\rho_0(A)| = 1$, $A \in G$.

Для голоморфных (q, ρ) -форм ϕ на D , интегрируемых со степенью p , зададим другую норму по правилу:

$$\|\phi\|_1^p = \iint_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p)} \left| \frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty, \quad (4)$$

где ν_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для q .

Выражение, стоящее под знаком интеграла в (4), инвариантно относительно преобразований из

группы G :

$$\begin{aligned} & \lambda(Az)^{2(1-p)} \left| \frac{\nu_q(Az)\phi(Az)}{f_1(Az)} \right|^p |d(Az) \wedge d(\overline{Az})| = \\ & = \lambda(z)^{2(1-p)} |A'(z)|^{-2(1-p)} \times \\ & \times \left| \frac{\nu_q(z) A'(z)^{q-1} \overline{A'(z)}^{-1} \phi(z) A'(z)^{-q} \rho(A)}{f_1(z) \rho_1(A)} \right|^p \times \\ & \times |A'(z)|^2 |dz \wedge d\bar{z}| = \\ & = \lambda(z)^{2(1-p)} \left| \frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p \left| \frac{\rho_1(A)\rho_0(A)}{\rho_1(A)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| = \\ & = \lambda(z)^{2(1-p)} \left| \frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}|. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|\phi\|_1$ не зависит от выбора конкретной фундаментальной области ω для G в D , реализующей на плоскости компактную риманову поверхность $D/G = F$. Ясно, что при фиксированном ν_q , непрерывном в D , выражение для $\|\phi\|_1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Нетрудно установить, что для голоморфных (q, ρ) -форм ϕ на D

$$\|\phi\|_1^p \leq K \cdot \|\phi\|_0^p, \quad (5)$$

где K – константа из оценки обобщенного коэффициента Бельтрами ν_q : $|\nu_q| \leq K\lambda^{2-q}$. Действительно:

$$\begin{aligned} \|\phi\|_1^p &= \iint_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p)} \left| \frac{\nu_q(z)\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \iint_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p)} |\nu_q(z)|^p \left| \frac{\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| \leq \\ &\leq K^p \iint_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p)} \lambda(z)^{(2-q)p} \left| \frac{\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= K^p \iint_{D/G} \lambda(z)^{2-pq} \left| \frac{\phi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| = K^p \|\phi\|_0^p. \end{aligned}$$

Если дополнительно потребовать, чтобы

$$\nu_q(a_i) = 0, \quad a_i \in D, \quad i = 1, \dots, s, \quad (6)$$

то (4) будет задавать норму и для мероморфных (q, ρ) -форм, кратных дивизору $\left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)$ (имеющих в качестве возможных особенностей только простые полюса в точках $a_1, \dots, a_s$) и интегрируемых со степенью p . Пространство таких форм будем обозначать $\Omega_{q,\rho}^p\left(D, G; \left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)\right)$.

Для голоморфных форм $\phi_1 \in A_{q,\rho}^p(D, G)$ и $\phi_2 \in A_{q,\rho}^{p'}(D, G)$, с условием $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, определено билинейное спаривание [4, 5]:

$$(\phi_1, \phi_2)_{q,\rho,G,D} = \frac{i}{2} \iint_{D/G} \lambda(z)^{2-2q} \frac{\phi_1(z) \overline{\phi_2(z)}}{|f_1(z)|^2} dz \wedge d\bar{z},$$

которое работает только с голоморфными (q, ρ) -формами, имеющими общий порядок q и общий характер ρ .

Для случая (q, ρ) -двойственных форм на D рассмотрим соответствующее билинейное спаривание:

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{q_1, q_2, D, G} = \frac{i}{2} \iint_{D/G} \mu_q(z) \varphi(z) \psi(z) dz \wedge d\bar{z}, \quad (7)$$

где μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D)$ для $q = q_1 + q_2$.

Теорема 1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда симметричное билинейное спаривание (7) задает линейное отображение между пространствами $\Omega_{q_1, \rho}^p(D, G; A)$ и $\left(\Omega_{q_2, \frac{1}{\rho}}^{p'}(D, G; \frac{1}{A})\right)^*$, где $\left(\Omega_{q_2, \frac{1}{\rho}}^{p'}(D, G; \frac{1}{A})\right)^*$ – пространство, сопряженное к $\Omega_{q_2, \frac{1}{\rho}}^{p'}(D, G; \frac{1}{A})$, A – произвольный дивизор на D .

Кроме того, если $\varphi \in A_{q_1, \rho}^p(D, G; (a_1 \dots a_s))$ и $\psi \in \Omega_{q_2, \frac{1}{\rho}}^{p'}\left(D, G; \left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)\right)$, то

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_{q_1, q_2, D, G}| \leq \frac{K_1}{2} \|\varphi\|_0 \cdot \|\psi\|_1, \quad (8)$$

где коэффициенты Бельтрами $\mu_{q_1+q_2}$ и ν_{q_1} (в задании билинейного спаривания (7) и нормы (4) в пространстве мероморфных (q, ρ) -форм соответственно) связаны формулой (2), причем $\nu_{q_2}(a_i) = 0$, $a_i \in D$, $i = 1, \dots, s$, а K_1 – константа из оценки ν_{q_1} .

Доказательство. Первая часть теоремы очевидно следует из задания билинейного спаривания (7). Докажем оценку (8):

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, \psi \rangle_{q_1, q_2, D, G}| &= \left| \frac{i}{2} \iint_{D/G} \mu_{q_1+q_2}(z) \varphi(z) \psi(z) dz \wedge d\bar{z} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \iint_{D/G} |\mu_{q_1+q_2}(z)| |\varphi(z)| |\psi(z)| |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{D/G} \frac{|\nu_{q_1}(z)| |\nu_{q_2}(z)|}{\lambda(z)^2} |\varphi(z)| |\psi(z)| |dz \wedge d\bar{z}| \leq \\ &\frac{K_1}{2} \iint_{D/G} \frac{\lambda(z)^{2-q_1} |\nu_{q_2}(z)|}{\lambda(z)^2} \left| \frac{\varphi(z)}{f_1(z)} \right| |\psi(z) f_1(z)| |dz \wedge d\bar{z}|. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} & \iint_{D/G} |U(z) V(z)| d\sigma \leq \\ & \leq \left(\iint_{D/G} |U(z)|^p d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint_{D/G} |V(z)|^{p'} d\sigma \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, для случая, когда мера $d\sigma = \lambda(z)^2 |dz \wedge d\bar{z}|$ и функции $U(z) = \lambda(z)^{-q_1} \frac{\varphi(z)}{f_1(z)}$, $V(z) = \frac{\nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2} \psi(z) f_1(z)$. Получим

$$\begin{aligned} & \left| \langle \varphi, \psi \rangle_{q_1, q_2, D, G} \right| \leq \\ & \leq \frac{K_1}{2} \left(\iint_{D/G} \lambda(z)^2 \left| \lambda(z)^{-q_1} \frac{\varphi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ & \times \left(\iint_{D/G} \lambda(z)^2 \left| \frac{\nu_{q_2}(z)}{\lambda(z)^2} \psi(z) f_1(z) \right|^{p'} |dz \wedge d\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ & = \frac{K_1}{2} \left(\iint_{D/G} \lambda(z)^{2-pq_1} \left| \frac{\varphi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ & \times \left(\iint_{D/G} \lambda(z)^{2(1-p')} \left| \frac{\nu_{q_2}(z)\psi(z)}{f_1(z)} \right|^{p'} |dz \wedge d\bar{z}| \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ & = \frac{K_1}{2} \|\varphi\|_0 \cdot \|\psi\|_1. \end{aligned}$$

3. Модифицированный оператор Берса $\mathcal{B}_C^{ord}$ в пространстве мероморфных (q, ρ) -форм

Пусть C – квазиокружность в $\overline{\mathbb{C}}$, то есть ориентируемая замкнутая жорданова кривая в $\overline{\mathbb{C}}$, которая является образом единичной окружности по квазиконформному отображению. Обозначим $D_1 = \text{Int}C$, $D_2 = \text{Ext}C$, $\lambda_{D_j}(z)|dz|$ – метрику Пуанкаре в D_j , $j = 1, 2$. Далее там, где это не может привести к путанице, будем опускать обозначение области, принимая $\lambda(z)|dz|$ за метрику Пуанкаре, заданную в $D_1 \cup D_2$.

Пусть G – отмеченная конечнопорожденная квазифуксова группа первого рода дробно-линейных преобразований $\overline{\mathbb{C}}$ с инвариантной кривой C , такая, что D_1/G – компактная риманова поверхность рода $h \geq 2$.

Для дальнейших оценок по норме рассматриваемых пространств полезными оказываются следующие факты:

Лемма 3. ([1, 7]) Если D – односвязная жорданова область, ∞ не принадлежит D и $\lambda = \lambda_D$ задаёт метрику Пуанкаре на D , то для любой $z \in D$

$$\lambda(z)|z - \partial D| \geq \frac{1}{4}, \quad (9)$$

где ∂D – граница D , $|z - \partial D| = \inf_{z_1 \in \partial D} |z - z_1|$.

Для вышеопределённых C , D_1 и D_2 ясно, что $\partial D_1 = C = \partial D_2$ и для любых $\zeta \in D_1$, $z \in D_2$ верно $|z - C| \leq |z - \zeta|$, $|\zeta - C| \leq |z - \zeta|$.

Лемма 4. ([7]) Для каждого целого $q \geq 2$ и фиксированного $z \in D_2$ функция ${}_q\omega_z = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q}}$, $\zeta \in D_1$, голоморфна на D_1 и верна оценка

$$\iint_{D_1} \frac{\lambda_{D_1}(\zeta)^{2-q}}{|\zeta - z|^{2q}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leq \frac{4^{q-2} 2\pi}{q} \frac{1}{|z - C|^q}. \quad (10)$$

Введём $k_q = \frac{4^{2(q-1)} 2\pi}{q}$ – константу для целого $q \geq 2$.

Так как фундаментальная область ω_2 для группы G в D_2 всегда может быть выбрана односвязной и не содержащей ∞ (без ограничения общности можно считать, что $\infty \in \partial\omega$), то, ввиду свойства (9) метрики Пуанкаре и интегральной оценки (10), получаем:

$$\iint_{D_1} \frac{\lambda_{D_1}(\zeta)^{2-q}}{|\zeta - z|^{2q}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leq k_q \lambda_{D_2}(z)^q \quad (11)$$

для $z \in \omega_2 \subset D_2$, $q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 2$. Отметим также, что функция ${}_q\omega_z = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q}}$, как функция двух переменных $\zeta \in D_1$, $z \in D_2$, симметрична и обладает свойством инвариантности относительно группы G :

$$\frac{1}{(A\zeta - Az)^{2q}} = \frac{1}{(\zeta - z)^{2q} A'(\zeta)^q A'(z)^q}$$

для любых $A \in G$, $2 \leq q \in \mathbb{N}$.

Докажем теперь, что для каждого целого $q \geq 2$ и фиксированного $\zeta \in \omega_1$ также верна оценка

$$\iint_{D_2} \frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \leq k_q \lambda_{D_1}(\zeta)^q. \quad (12)$$

Действительно, так как для любого фиксированного $A \in G$ область $A(\omega_2) \subset D_2$ односвязна и не содержит ∞ , то, взяв ограничение λ с большей области на подмножества, получим:

$$\begin{aligned} & \iint_{D_2} \frac{\lambda_{D_2}(z)^{2-q}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} = \\ & = \sum_{A \in G} \left[\iint_{A(\omega_2)} \frac{\lambda_{A(\omega_2)}(z)^{2-q}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \right] \leq \\ & \leq 4^{q-2} \sum_{A \in G} \left[\iint_{A(\omega_2)} \frac{|z - \partial A(\omega_2)|^{q-2}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \right] \leq \\ & \leq 4^{q-2} \iint_{\sum_{A \in G} A(\omega_2)} \frac{|z - C|^{q-2}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \leq \\ & \leq 4^{q-2} \iint_{D_2} \frac{|z - \zeta|^{-q-2}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \leq \\ & \leq 4^{q-2} \iint_{|z - \zeta| > |z - C|} \frac{|z - \zeta|^{-q-2}}{|z - \zeta|^{2q}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} = \frac{4^{q-2} 2\pi}{q} \frac{1}{|\zeta - C|^q} \leq \\ & \leq \frac{4^{2(q-1)} 2\pi}{q} \lambda_{D_1}(\zeta)^q = k_q \lambda_{D_1}(\zeta)^q. \end{aligned}$$

В работе [5] в пространстве голоморфных (q, ρ) -форм был введен и изучен модифицированный оператор Берса $\mathcal{B}_C^{ord}$, который отражает область определения голоморфных форм от-

носителем квазиокружности C и при этом q -двойственно меняет порядок формы, но не изменяет её характер:

$$(\mathcal{B}_C^{ord} \varphi)(z) = \frac{i}{2} \iint_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta) f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad (13)$$

где $z \in D_2$, $\varphi \in A_{q_1, \rho}^p(D_1, G)$, μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D_1)$ для $q = q_1 + q_2$.

Оператор $\mathcal{B}_C^{ord}$ определяется аналогично для форм на D_2 путем замены в (13) D_1 на D_2 .

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}_C^{ord}$ в пространстве $\Omega_{q_1, \rho}^p\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)\right)$ с дополнительным условием на обобщенный коэффициент Бельтрами в его задании.

Теорема 2. Пусть μ_q – фиксированный обобщенный коэффициент Бельтрами класса $C(D_1 \cup D_2)$ для $q = q_1 + q_2$, $q_1 \geq 2$, $q_2 \geq 2$, с условием

$$\mu_q(z) = \frac{\nu_{q_1}(z) \cdot \nu_{q_2}(z)}{\lambda^2(z)}, \quad z \in D_1,$$

где ν_1, ν_2 – обобщенные коэффициенты Бельтрами для q_1 и q_2 соответственно, причем $\nu_{q_1}(a_i) = 0$, $a_i \in D_1, i = 1, \dots, s$.

Тогда для произвольного характера ρ модифицированный оператор Берса

$$(\mathcal{B}_C^{ord} \varphi)(z) = \frac{i}{2} \iint_{D_1} \frac{\mu_q(\zeta) f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

$$z \in D_2, \quad \varphi \in \Omega_{q_1, \rho}^p\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)\right),$$

является ограниченным линейным отображением из $\Omega_{q_1, \rho}^p\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)\right)$ в $A_{q_2, \rho}^p(D_2, G)$, $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty, q_1 \geq 2, q_2 \geq 2$, с нормой

$$\|\mathcal{B}_C^{ord}\| \leq K_2 k_{q_2} \quad (K_2 - \text{константа из оценки } \nu_{q_2})$$

и удовлетворяет условию самосопряженности относительно билинейного спаривания (7), а именно: для любых $\varphi \in \Omega_{q_1, \rho}^p\left(D_1, G; \left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)\right)$ и $\psi \in A_{q_1, \frac{1}{p}}^{p'}(D_2, G)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, верно

$$\langle \varphi, \mathcal{B}_C^{ord} \psi \rangle_{q_1, q_2, D_1, G} = \langle \mathcal{B}_C^{ord} \varphi, \psi \rangle_{q_2, q_1, D_2, G}. \quad (14)$$

Замечание 2. В задании интегрального оператора $\mathcal{B}_C^{ord}$ и билинейного спаривания (7) используется один и тот же обобщенный коэффициент Бельтрами μ_q , $q = q_1 + q_2$.

Доказательство. Если φ является мероморфной (q_1, ρ) -формой на D_1 , кратной дивизору

$\left(\frac{1}{a_1 \dots a_s}\right)$, то её образ – форма $\mathcal{B}_C^{ord} \varphi$ будет голоморфной (q_2, ρ) -формой на $D_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{D_1}$. Действительно, в силу инвариантности D_1 относительно действия группы G имеем:

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}_C^{ord} \varphi)(Az) A'(z)^{q_2} = \\ &= \frac{i}{2} A'(z)^{q_2} \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta) f_1(Az)}{(\zeta - Az)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= \frac{i}{2} A'(z)^{q_2} \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(A\zeta_1) f_1(Az)}{(A\zeta_1 - Az)^{2q_2} f_1(A\zeta_1)} \times \\ & \quad \times \varphi(A\zeta_1) |A'(\zeta_1)|^2 d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 = \\ &= \frac{i}{2} A'(z)^{q_2} \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta_1) A'(\zeta_1)^{q_1+q_2}}{(\zeta_1 - z)^{2q_2} A'(\zeta_1)^{q_2} A'(z)^{q_2}} \times \\ & \quad \times \frac{f_1(z) \rho_1(A)}{f_1(\zeta_1) \rho_1(A)} \frac{\varphi(\zeta_1) \rho(A)}{A'(\zeta_1)^{q_1}} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 = \\ &= \frac{i}{2} \rho(A) \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta) f_1(z)}{(\zeta - z)^{2q_2} f_1(\zeta)} \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= \rho(A) (\mathcal{B}_C^{ord} \varphi)(z). \end{aligned}$$

Докажем, что для мероморфной формы φ на D_1 форма $\mathcal{B}_C^{ord}(\varphi)$ будет голоморфной на D_2 . Для этого сначала докажем голоморфность частного

$$\frac{(\mathcal{B}_C^{ord} \varphi)(z)}{f_1(z)} = \frac{i}{2} \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{(\zeta - z)^{2q_2}} \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad (15)$$

для $z \in D_2$. При этом, используя теорему Римана и обычные свойства инвариантности, можно предположить, что $D_1 = \Delta = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $D_2 = \Delta^* = \overline{\mathbb{C}} \setminus (\Delta \cup \partial\Delta)$. В этом случае имеем оценку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(\mathcal{B}_C^{ord} \varphi)(z)}{f_1(z)} \right| &\leq \iint_{\Delta} \frac{|\mu_{q_1+q_2}(\zeta)|}{|\zeta - z|^{2q_2}} \left| \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \right| \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leq \\ &\leq K \iint_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}} \left| \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \right| \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}, \end{aligned}$$

где K – константа из оценки (1) для $q = q_1 + q_2$.

Функция $\frac{\varphi}{f_1}$ голоморфна и однозначна в Δ (она становится мультипликативной для нормированного характера при проектировании на Δ/G). В силу ограниченности ω и того, что для любой $\zeta \in \Delta$ существует $\zeta_1 \in \omega$ с условием $\left| \frac{\varphi}{f_1}(\zeta) \right| = \left| \frac{\varphi}{f_1}(\zeta_1) \right|$, заключаем, что модуль $\left| \frac{\varphi}{f_1} \right|$ достигает своего максимума η в Δ . Отсюда:

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}} \left| \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \right| \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} &\leq \\ &\leq \eta \iint_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}. \end{aligned}$$

Применяя к последнему выражению оценки $|\zeta - z| \geq |\zeta - \partial\Delta|$, $|\zeta - z| \geq |z - \partial\Delta|$, $\zeta \in \Delta$, $z \in \Delta^*$, и $\frac{1}{|\zeta - \partial\Delta|} \leq 4\lambda(\zeta) = \frac{4}{1-|\zeta|^2}$, $\zeta \in \Delta$, $\frac{1}{|z - \partial\Delta|} \leq \frac{1}{|z - \partial\omega_2|} \leq 4\lambda_{\omega_2}(z)$, $z \in \omega_2 \subset \Delta^*$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| \frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)} \right| \leq \\ & \leq \eta K \iint_{\Delta} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_1-q_2}}{|\zeta - \partial\Delta|^{q_2}|z - \partial\Delta|^{q_2}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \leq \\ & \leq 4^{2q_2} \eta K \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \iint_{\Delta} \lambda(\zeta)^{2-q_1} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} = \\ & = 4^{2q_2} \eta K \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r(1-r^2)^{q_1-2} dr = \\ & = 4^{2q_2} \eta K \lambda_{\omega_2}(z)^{q_2} \frac{\pi}{q_1-1}, \quad z \in \omega_2 \subset \Delta^*. \end{aligned}$$

Так как $\lambda_{\omega_2}(z)^{q_2}$ ограничена на любом компакте $Q \Subset \Delta^*$, $Q \cap \omega_2 \neq \emptyset$, то интеграл в (15) сходится абсолютно и равномерно по параметру z на любом компакте $Q \Subset \Delta^*$. Кроме того, подынтегральная функция в (15) при любом фиксированном $\zeta \in \Delta$ аналитична по z и вместе со своей производной по z , равной $2q_2 \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{(\zeta-z)^{2q_2+1}} \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}$, является непрерывной по совокупности переменных $(\zeta, z) \in \Delta \times \Delta^*$. Поэтому (15) определяет голоморфную форму $\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)}$ для $z \in \Delta^*$ и, следовательно, для $z \in D_2$.

Покажем теперь, что множитель $f_1(z)$, $z \in D_2$, не влияет на сходимость интеграла в (13), а значит, из доказанной голоморфности частного $\frac{(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)}{f_1(z)}$ следует голоморфность формы $(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z)$, $z \in D_2$. Для этого сначала зафиксируем некоторую локально конечную фундаментальную область $\omega \in D_2$. Тогда для любой $z_0 \in \omega$ всегда найдётся окрестность $U(z_0)$, цели-

ком содержащаяся в ω и такая, что функция $f_1(z)$ в этой окрестности отграничена от нуля и бесконечности, т. е. существуют константы m и M , $0 < m \leq M < \infty$, такие, что

$$m \leq |f_1(z)| \leq M \quad \text{для всех } z \in U(z_0). \quad (16)$$

Действительно, если предположить, что для любой окрестности $U(z_0)$ точки z_0 и для любого $m > 0$ существует $z \in U(z_0)$, для которой $|f_1(z)| < m$, то существует последовательность точек $z_n \in \omega$, такая, что $z_n \rightarrow z_0$, $n \rightarrow \infty$, и $f_1(z_n) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Но, в силу непрерывности функции f_1 , получаем, что $f_1(z_0) = 0$. А это противоречит отсутствию нулей у функции f_1 . Аналогично доказывается, что f_1 отграничена от ∞ на ω . Таким образом, f_1 локально на ω отграничена от нуля и бесконечности. Пусть теперь $\tilde{z}_0 \in D_2$ – произвольная точка на D_2 . По свойствам фундаментальной области существуют преобразование $T \in G$ и точка $z_0 \in \omega$, такие, что $\tilde{z}_0 = T(z_0)$. Рассмотрим окрестность точки $\tilde{z}_0$ в виде $V(\tilde{z}_0) = T(U(z_0))$, где $U(z_0)$ – окрестность точки z_0 , в которой выполняется условие (16). Для каждой $\tilde{z} \in V(\tilde{z}_0)$ существует $z' \in U(z_0)$, такое, что $\tilde{z} = T(z')$. Следовательно, $f_1(\tilde{z}) = \rho(T)f_1(z')$. Так как $0 < m \leq |f_1(z')| \leq M < \infty$ и $0 < |\rho(T)| < \infty$ для каждого фиксированного T , то $f_1(\tilde{z})$ отграничена от 0 (и от ∞). В силу произвольности $\tilde{z}_0$ значения $f_1(z)$ отграничены от 0 (и от ∞) в некоторой окрестности любой точки z из D_2 . Поэтому $f_1(z)$ (и $\frac{1}{f_1(z)}$) локально на D_2 принимает конечные значения и, следовательно, после умножения обеих частей в (15) на $f_1(z)$ получим интеграл, определяющий голоморфную мультипликативную форму $\mathcal{B}_C^{ord}\varphi$ (умножение на локально ограниченную аналитическую функцию не нарушает голоморфности).

Оценим норму формы $\mathcal{B}_C^{ord}\varphi$ в пространстве голоморфных (q_2, ρ) -форм, интегрируемых со степенью p на D_2 :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{B}_C^{ord}\varphi\|_0^p &= \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left| \frac{\mathcal{B}_C^{ord}\varphi(z)}{f_1(z)} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \iint_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left| \iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)f_1(z)}{(\zeta-z)^{2q_2}} \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{2} \right|^p |dz \wedge d\bar{z}| \leq \\ &\leq \iint_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-pq_2}}{|f_1(z)|^p} \left(\iint_{D_1} \frac{|\mu_{q_1+q_2}(\zeta)||f_1(z)|}{|\zeta-z|^{2q_2}} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|f_1(\zeta)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left(\iint_{D_1} \frac{|\nu_{q_1}(\zeta)||\nu_{q_2}(\zeta)|}{|\zeta-z|^{2q_2}\lambda(\zeta)^2} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|f_1(\zeta)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p |dz \wedge d\bar{z}| \leq \\ &\leq K_2^p \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left(\iint_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}|\nu_{q_1}(\zeta)|}{\lambda(\zeta)^2|\zeta-z|^{2q_2}} \frac{|\varphi(\zeta)|}{|f_1(\zeta)|} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^p |dz \wedge d\bar{z}|. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве воспользовались оценкой (1) для обобщённого коэффициента Бельтрами ν_{q_2} . Затем, последовательно применяя неравенство Гёльдера для меры $d\sigma = \lambda(\zeta)^{2-q_2} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}$ и

функций $U(\zeta) = \frac{\lambda(\zeta)^{-2} \nu_{q_1}(\zeta)}{(\zeta-z)^{\frac{2q_2}{p}}} \frac{\varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)}$, $V(\zeta) = \frac{1}{(\zeta-z)^{\frac{2q_2}{p'}}} = \frac{1}{(\zeta-z)^{2q_2 \frac{p-1}{p}}}$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, и неравенства (11), (12), получаем:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{B}_C^{ord} \varphi\|_0^p &\leq K_2^p \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \left[\iint_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2} \lambda(\zeta)^{-2p} |\nu_{q_1}(\zeta)|^p |\varphi(\zeta)|^p \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \frac{|f_1(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p} \right] \times \\
&\times \left(\iint_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2} \right)^{\frac{p}{p'}} |dz \wedge d\bar{z}| \leq \\
&\leq K_2^p k_{q_2}^{p-1} \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-pq_2} \lambda(z)^{(p-1)q_2} \left[\iint_{D_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p} |\nu_{q_1}(\zeta)|^p |\varphi(\zeta)|^p \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}}{|\zeta-z|^{2q_2}} \frac{|f_1(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p} \right] |dz \wedge d\bar{z}| = \\
&= K_2^p k_{q_2}^{p-1} \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-q_2} \left[\sum_{A \in G_{A^{-1}(\omega_1)}} \iint \frac{\lambda(A\zeta)^{2-q_2-2p} |A'(\zeta)|^{2-q_2-2p} |\nu_{q_1}(A\zeta)|^p |A'(\zeta)|^{(1-q_1)p} |\overline{A'(\zeta)}|^p}{|A\zeta - Az|^{2q_2} |A'(\zeta)|^{-q_2} |A'(z)|^{-q_2}} \times \right. \\
&\times \left. \frac{|\varphi(A\zeta)|^p |A'(\zeta)|^{pq_1} |\rho(A)|^{-p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}}{|f_1(A\zeta)|^p |\rho_1(A)|^{-p}} \right] |dz \wedge d\bar{z}| = \\
&= K_2^p k_{q_2}^{p-1} \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-q_2} \left[\sum_{A \in G_{A^{-1}(\omega_1)}} \iint \frac{\lambda(A\zeta)^{2-q_2-2p} |\nu_{q_1}(A\zeta)|^p \frac{|\varphi(A\zeta)|^p}{|f_1(A\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}}{|A\zeta - Az|^{2q_2} |A'(z)|^{-q_2} |f_1(A\zeta)|^p |\rho_0(A)|^p} \right] |dz \wedge d\bar{z}| = \\
&= K_2^p k_{q_2}^{p-1} \sum_{A \in G} \iint_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|A'(z)|^{-q_2}} \left[\iint_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-q_2-2p} |\nu_{q_1}(\zeta)|^p \frac{\varphi(\zeta)|^p}{|f_1(\zeta)|^p} \frac{|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|}{2}}{|\zeta - Az|^{2q_2}} \right] |dz \wedge d\bar{z}| = \\
&= K_2^p k_{q_2}^{p-1} \sum_{A \in G} \iint_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-q_2-2p} \left| \frac{\nu_{q_1}(\zeta) \varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \right|^p \left[\iint_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|\zeta - Az|^{2q_2} |A'(z)|^{-q_2}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \right] |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\
&= K_2^p k_{q_2}^{p-1} \iint_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-q_2-2p} \left| \frac{\nu_{q_1}(\zeta) \varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \right|^p \left[\iint_{D_2} \frac{\lambda(z)^{2-q_2}}{|\zeta - z|^{2q_2}} \frac{|dz \wedge d\bar{z}|}{2} \right] |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| \leq \\
&\leq K_2^p k_{q_2}^p \iint_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-q_2-2p+q_2} \left| \frac{\nu_{q_1}(\zeta) \varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \right|^p |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = (K_2 k_{q_2})^p \|\varphi\|_1^p.
\end{aligned}$$

Таким образом, доказали, что $\|\mathcal{B}_C^{ord}\| \leq K_2 k_{q_2}$. Дей для его несущественной составляющей $\frac{1}{\rho_1}$ является $\frac{1}{f_1}$ ([2]), то, с помощью теоремы Фубини, имеем равенства:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi, \mathcal{B}_{-C}^{ord} \psi \rangle_{q_1, q_2, D_1, G} &= \iint_{\omega_1} \mu_{q_1+q_2}(\zeta) \varphi(\zeta) (\mathcal{B}_{-C}^{ord} \psi)(\zeta) \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \iint_{\omega_1} \mu_{q_1+q_2}(\zeta) \varphi(\zeta) \left(\iint_{D_2} \frac{\mu_{q_1+q_2}(z) \psi(z) 1/f_1(\zeta)}{(z-\zeta)^{2q_2} 1/f_1(z)} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \right) \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \iint_{\omega_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta) \varphi(\zeta)}{f_1(\zeta)} \left(\sum_{A \in G_{A^{-1}(\omega_2)}} \iint \frac{\mu_{q_1+q_2}(Az) A'(z)^{1-q_1-q_2} \overline{A'(z)}}{(Az - A\zeta)^{2q_2} A'(z)^{-q_2} A'(\zeta)^{-q_2}} \psi(Az) A'(z)^{q_1} \times \right. \\
&\times \left. \rho(A) \frac{f_1(Az)}{\rho_1(A)} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \right) \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \sum_{A \in G} \rho_0(A) \iint_{\omega_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta) \varphi(\zeta)}{f_1(\zeta) A'(\zeta)^{-q_2}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\iint_{\omega_2} \frac{\mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z)}{(z-A\zeta)^{2q_2}} \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} \right) \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
& = \iint_{\omega_2} \mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z) \left(\sum_{A \in G} \rho_0(A) \iint_{\omega_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)}{f_1(\zeta)} \times \right. \\
& \times \left. \frac{\varphi(\zeta)A'(\zeta)^{q_2}}{(z-A\zeta)^{2q_2}} \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \iint_{\omega_2} \mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)f_1(z) \left(\sum_{A \in G} \rho_0(A) \times \right. \\
& \times \iint_{\omega_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(A\zeta)A'(\zeta)^{1-q_1}\overline{A'(\zeta)}}{f_1(A\zeta)\rho_1(A)^{-1}} \frac{\varphi(A\zeta)A'(\zeta)^{q_1}\rho(A)^{-1}}{(z-A\zeta)^{2q_2}} \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \left. \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \\
& = \iint_{\omega_2} \mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z) \left(\iint_{D_1} \frac{\mu_{q_1+q_2}(\zeta)\varphi(\zeta)}{(z-\zeta)^{2q_2}} \frac{f_1(z)}{f_1(\zeta)} \frac{i}{2} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \\
& = \iint_{\omega_2} \mu_{q_1+q_2}(z)\psi(z)(\mathcal{B}_C^{ord}\varphi)(z) \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z} = \langle \mathcal{B}_C^{ord}\varphi, \psi \rangle_{q_2, q_1, D_2, G}.
\end{aligned}$$

Литература

- [1] Кра, И. *Автоморфные формы и кляйновы группы* / И. Кра. – М.: Мир, 1975.
- [2] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ. – 2003. – Ч. 2.
- [3] Farkas, H. M. *Riemann Surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Graduate Texts in Mathematics. – Vol. 71. – New-York: Springer-Verlag, 1992.
- [4] Сергеева, О. А. *Банаховы пространства мультипликативных автоморфных форм* / О. А. Сергеева // Вестник НГУ. – 2005. –

Т. V. – Вып. 4. – С. 45 – 63.

[5] Сергеева, О. А. *Модифицированные операторы Берса и двойственность голоморфных мультипликативных автоморфных форм* / О. А. Сергеева // Сибирский математический журнал. – 2009. – Т. 50, № 4. – С. 902 – 914.

[6] Сергеева, О. А. *Билинейные спаривания для голоморфных (q, ρ) -форм* / О. А. Сергеева // Журнал СВУ. – 2011. – Т. 4, № 1. – С. 128 – 139.

[7] Bers, L. *A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings* / L. Bers // Acta Mathematica. – Vol. 116. – 1966. – P. 115 – 134.