

быть несущественным. Таким образом, $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0 и $\rho_1 = \rho_2 \rho_0$.

3) Рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда характер ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным и, по теореме [6, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и, по утверждению 1), $\omega_1 = c\omega_2$, $c \neq 0$ на F_μ . Предложение 4.2 доказано.

Литература

[1] Ахиезер, Н. И. *Элементы теории эллиптических функций* / Н. И. Ахиезер. — М.: Наука, 1970.

[2] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2005.

[3] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2003.

[4] Appell, P. *Principes de la theorie des fonctions elliptiques et applications* / P. Appell, E. Lacour. — Paris: Gauthier-Villars, 1897.

[5] Forsyth, A. R. *Theory of functions of a complex variable* / A. R. Forsyth. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1900.

[6] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. — Vol. 71. New-York: Springer, 1992.

[7] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. — 1978. — 107. — P. 255 — 286.

[8] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин. — М.: МГУ, 1986.

[9] Альфорс, Л. В. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. — М.: ИЛ, 1961.

[10] Крепицина, Т. С. *Группа характеров и мультипликативные функции на торе* / Т. С. Крепицина // Вестник КемГУ. — 2011. — Вып. 3(47). — С. 11 — 16.

УДК 515.17 + 517.545

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА И ИХ КЛАССЫ ПЕРИОДОВ НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев

HARMONIC PRYM DIFFERENTIALS AND THEIR CLASSES PERIODS ON VARIABLE COMPACT RIEMANN SURFACE

T. A. Pushkareva, V. V. Chueshev

Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в современной теории функций на компактных римановых поверхностях [1 — 5]. В работе исследовано гармоническое расслоение Прима, слою которого есть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях. Доказано, что когомологическое расслоение Ганнинга, связанное с классами периодов, будет вещественно-аналитически изоморфно гармоническому расслоению Прима над произведением пространства Тейхмюллера и пространства нетривиальных нормированных характеров.

Harmonic Prym differentials and their periods classes play the big role in contemporary theory functions on compact Riemann surfaces. In this paper is investigated harmonic Prym bundle, whose fibre is space of harmonic Prym differentials on variable compact Riemann surfaces. Proven that cohomology Gunning bundle, which connect with periods classes, are real analytically isomorphic harmonic Prym bundle over product Teichmueller space and a space of nontrivial normalized characters.

Ключевые слова: гармонический дифференциал Прима, переменная компактная риманова поверхность, переменные характеры, пространство Тейхмюллера.

Keywords: harmonic Prym differential, variable compact Riemann surface, variable characters, Teichmueller space.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №02.740.11.0457; РФФИ 09 - 01 - 00255; НШ - 7347.2010.1; РФФИ 11 - 01 - 90709;

1. Предварительные сведения

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$,

с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — риманова поверхность с фиксированной комплексно-

аналитической структурой на F . По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0 и Γ изоморфна $\pi_1(F)$. Эта группа имеет представление $\Gamma = \langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g : \prod_{j=1}^g C_j = I \rangle$, где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$, $j = 1, \dots, g$, а I – тождественное отображение [2].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0 , т. е. выражением вида $\mu(z)dz/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0 , где $\mu(z)$ – комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ . Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0 . Пусть $M(F)$ – множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0 , $Diff^+(F)$ – группа всех сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, а $Diff_0(F)$ – нормальная подгруппа в $Diff^+(F)$, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0 . Группа $Diff^+(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \rightarrow f^*\mu$, где $f \in Diff^+(F)$, $\mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbf{T}_g(F) = \mathbf{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [2; 3].

Так как отображение $U \rightarrow F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до Γ -дифференциала Бельтрами μ на U , т. е. $\mu \in L_\infty(U)$, $\|\mu\|_\infty = \text{esssup}_{z \in U} |\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z)$, $z \in U$, $T \in \Gamma$.

Если Γ -дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbb{C}} \setminus U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\bar{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \rightarrow T^\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, \dots, B_g^\mu : \prod_{j=1}^g [A_j^\mu, B_j^\mu] = I \rangle.$$

Классические результаты Л. Альфорса, Л. Берса [3] и других авторов утверждают, что:

1) $\mathbf{T}_g(F)$ является комплексно-аналитическим многообразием размерности $3g - 3$ при $g \geq 2$; 2) $\mathbf{T}_g(F)$ имеет единственную комплексно-аналитическую структуру, такую, что естественное отображение $\Phi : M(F) \rightarrow M(F)/Diff_0(F) = \mathbf{T}_g(F)$ будет голоморфным и при этом Φ имеет только локальные голоморфные сечения; 3) элементы из Γ_μ голоморфно зависят от модулей $[\mu]$ компактных римановых поверхностей.

Характер ρ для F_μ это любой гомоморфизм $\rho : \pi_1(F_\mu) \cong \Gamma_\mu \rightarrow \mathbb{C}^*$. Характер ρ вида:

$$\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho),$$

$$\rho(b_k^\mu) = \exp(2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho) \pi_{jk}([\mu])),$$

$k = 1, \dots, g$, где $\pi_{j,k}$ – матрица b -периодов на F_μ , будем называть *несущественными*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Пусть L_g – подгруппа несущественных характеров, $[S^1]^{2g}$ – подгруппа нормированных характеров в группе $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Дифференциалом Прима ϕ для ρ на F_μ назовем дифференциал $\phi = \phi(z)dz$, такой, что $\phi(Tz)T'(z) = \rho(T)\phi(z)$, $z \in w^\mu(U)$, $T \in \Gamma_\mu$. Обозначим через $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ пространство всех голоморфных дифференциалов Прима для ρ на F_μ .

Для $\phi = df(z)$ на $w^\mu(U)$ верно

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T),$$

где период $\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0)$ для $T \in \Gamma_\mu$. Такое отображение $\phi : \Gamma_\mu \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяет коциклическому условию, $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma_\mu$, то есть $\phi \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho)$. Определен класс периодов

$$[\phi] \in H^1(\Gamma_\mu, \rho) = Z^1(\Gamma_\mu, \rho)/B^1(\Gamma_\mu, \rho),$$

где $B^1(\Gamma_\mu, \rho)$ порождается 1-коциклом $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma_\mu$.

Гармоническим дифференциалом Прима ϕ на F для $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ называется гармоническая (однозначная) дифференциальная 1-форма $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(\bar{z})d\bar{z}$ на U , такая, что

$$\phi_1(Tz)dTz + \phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} = \rho(T)(\phi_1(z)dz + \phi_2(\bar{z})d\bar{z}),$$

$T \in \Gamma$, $z \in U$.

Гармонический дифференциал Прима ϕ на U представляется в виде $\phi = \phi_1(z)dz + \phi_2(\bar{z})d\bar{z}$, где $\phi_1(z)dz = df_1(z)$, $\phi_2(\bar{z})d\bar{z} = df_2(\bar{z})$, $f_j(z)$ – голоморфные функции на U , $j = 1, 2$, которые определяются с точностью до аддитивных комплексных констант. Поэтому $\phi = df(z)$, где

$$f(z) = f_1(z) + \overline{f_2(z)}$$

– комплекснозначная гармоническая функция на U (гармонический интеграл Прима для дифференциала ϕ). Также получаем следующие соотношения:

$$f(Tz) = \rho(T)f(z) + \phi(T), \phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T),$$

где

$$\phi(T) = f(Tz_0) - \rho(T)f(z_0) = \phi_1(T) + \phi_2(T),$$

$$\phi_1(T) = f_1(Tz_0) - \rho(T)f_1(z_0),$$

$$\phi_2(T) = \overline{f_2(Tz_0)} - \rho(T)\overline{f_2(z_0)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned}\phi_1(Tz)dTz &= \rho(T)\phi_1(z)dz, \\ \phi_2(\overline{Tz})d\overline{Tz} &= \rho(T)\phi_2(\overline{z})d\overline{z},\end{aligned}$$

$T \in \Gamma, z \in U$. Следовательно, отображение периодов $\phi : T \rightarrow \phi(T)$ или $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$, относительно гармонического интеграла Прима $f(z)$, есть элемент из $Z^1(\Gamma, \rho)$. Если $\widehat{f}_1(z) = f_1(z) + c_1, \widehat{f}_2(z) = f_2(z) + c_2$ — другие интегралы Прима для $\phi_1(z)dz, \phi_2(\overline{z})d\overline{z}$ соответственно, то

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_1(T) &= \phi_1(T) + c_1\sigma(T), \\ \widehat{\phi}_2(T) &= (\overline{f_2(Tz_0) + c_2}) - \rho(T)(\overline{f_2(z_0) + c_2}) = \\ &= \phi_2(T) + \overline{c_2}\sigma(T).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\widehat{\phi}(T) = \phi(T) + (c_1 + \overline{c_2})(1 - \rho(T)), T \in \Gamma,$$

и отображения периодов при различных гармонических интегралах Прима для одного и того же гармонического дифференциала Прима будут отличаться на элемент из $B^1(\Gamma, \rho)$. Поэтому $\mathbf{C}$ —линейное отображение $p : \phi \rightarrow [\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$, которое гармонический дифференциал Прима ϕ переводит в его класс периодов $[\phi]$, корректно определено.

Обозначим через $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ пространство всех гармонических дифференциалов Прима для ρ на F .

Лемма 1.1. [3, с. 106]. *Голоморфное главное $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ —расслоение E биголоморфно изоморфно тривиальному расслоению*

$$\mathbf{T}_g(F) \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$$

над $\mathbf{T}_g(F)$.

2. Эквивалентность соотношений Аппеля и Ганнинга для периодов замкнутых дифференциалов Прима

В работе П. Аппеля [1], с помощью специальных рассечений на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, получено основное соотношение на классы $[\phi]$ периодов замкнутых дифференциалов Прима $\phi = \phi(z)dz$ для ρ на F :

$$\sum_{k=1}^g \frac{\phi(B_k)(1 - \rho(A_k)) - \phi(A_k)(1 - \rho(B_k))}{\rho(A_1)\rho(A_2)\dots\rho(A_k)} \frac{1}{\rho(B_k)} = 0. \quad (1)$$

В работе Р. Ганнинга [4], с помощью соотношений для фуксовой группы Γ , получено другое соотношение:

$$\sum_{k=1}^g \phi(B_k)\sigma(A_k) - \phi(A_k)\sigma(B_k) = 0 \quad (2)$$

для классов $[\phi]$ периодов замкнутых дифференциалов Прима ϕ для ρ на F .

Предложение 2.1. *Для любого замкнутого дифференциала Прима ϕ для ρ на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ соотношение Аппеля (1) эквивалентно соотношению Ганнинга (2).*

Доказательство. Положим

$$1 - \rho(A_k) = \sigma(A_k), \quad 1 - \rho(B_k) = \sigma(B_k)$$

для $k = 1, \dots, g$. Рассмотрим замену переменных:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(A_1) &= \frac{1}{\rho(A_1)\rho(B_1)}\phi(A_1), \\ \tilde{\phi}(B_1) &= \frac{1}{\rho(A_1)\rho(B_1)}\phi(B_1), \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\phi}(A_k) &= \frac{1}{\rho(A_1\dots A_k)\rho(B_k)}\phi(A_k), \\ \tilde{\phi}(B_k) &= \frac{1}{\rho(A_1\dots A_k)\rho(B_k)}\phi(B_k), \\ &\dots\dots\dots \\ \tilde{\phi}(A_g) &= \frac{1}{\rho(A_1\dots A_g)\rho(B_g)}\phi(A_g), \\ \tilde{\phi}(B_g) &= \frac{1}{\rho(A_1\dots A_g)\rho(B_g)}\phi(B_g).\end{aligned}$$

Из вида блочно диагональной матрицы замены следует, что ее определитель не равен нулю: $\frac{1}{\rho(A_1)^2\rho(B_1)^2} \dots \frac{1}{\rho(A_1\dots A_k)^2\rho(B_k)^2} \dots \frac{1}{\rho(A_1\dots A_g)^2\rho(B_g)^2} \neq 0$. Поэтому эта матрица невырожденная. После замены формула Аппеля примет следующий вид:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^g (\tilde{\phi}(B_k)\sigma(A_k) - \tilde{\phi}(A_k)\sigma(B_k)) &= 0 \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \sum_{k=1}^g (\phi(B_k)\sigma(A_k) - \phi(A_k)\sigma(B_k)) &= 0.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

3. Гармоническое расслоение Прима

Теорема 3.1. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$, ϕ — гармонический дифференциал Прима на F для $\rho \in [S^1]^{2g}$ и $[\phi] = 0$ в $H^1(\Gamma, \rho)$. Тогда $\phi = 0$ на F .*

Доказательство 1. [3, с. 155]. По лемме 3.2.1 [3] дифференциал $\phi = \varpi + \overline{\varphi}$, где ϖ и φ — голоморфные дифференциалы Прима для ρ и $\overline{\rho}$ соответственно на F . Из условия $[\phi] = 0$ и леммы 3.2.2 [3] следует существование мультипликативной функции f на F для ρ , такой, что $\varpi + \overline{\varphi} = df(z)$ на U . Покажем, что $\varpi = 0 = \varphi$ на U . От противного. Предположим, что $\varphi \neq 0$ на фундаментальной области Δ для группы Γ (или на F). Тогда, положив $\varphi = g(z)dz$ на Δ , имеем:

$$\frac{i}{2} \int_{\Delta} \varphi \wedge \overline{\varphi} = \int_{\Delta} |g(z)|^2 dx \wedge dy > 0.$$

С другой стороны,

$$\varphi \wedge \overline{\varphi} = \varphi \wedge \varpi + \varphi \wedge \overline{\varphi} = \varphi \wedge df = -d(f\varphi).$$

Отсюда

$$\int \int_{\Delta} \varphi \wedge \bar{\varphi} = \int \int_{\Delta} \varphi \wedge df = - \int_{\partial \Delta} f \varphi = 0$$

по теореме 3.2.3 [3, с. 155], так как $\rho_1 = \rho, \rho_2 = \bar{\rho}, \rho\bar{\rho} = 1$ и для дифференциала df все a -периоды и b -периоды равны 0. Получили противоречие. Поэтому $\phi = \varpi$.

Повторяя предыдущие рассуждения с ϖ , получим, что $\varpi = 0$ на U .

Доказательство 2. Используя обозначения предыдущего доказательства, получим, что:

$$0 \leq (\phi, \phi) = \int \int_{\Delta} \phi \wedge * \bar{\phi} = \int_{\partial \Delta} f(z)(*\bar{\phi}) = 0.$$

Последнее равенство снова выводится из теоремы 3.2.3 [3]. Отсюда $(\phi, \phi) = 0$ на Δ и $\phi = 0$ на Δ . Следовательно, $\phi = 0$ на F . Теорема доказана.

Следствие 3.1. Гармонический дифференциал Прима ϕ на F для $\rho \in [S^1]^{2g} \setminus 1$ единственно определяется своим классом периодов $[\phi] \in H^1(\Gamma, \rho)$ и $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$.

Доказательство. Так как отображение периодов $\rho - \mathbf{C}$ -линейное инъективное отображение $(2g - 2)$ -мерного векторного пространства $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ в $(2g - 2)$ -мерное векторное пространство $H^1(\Gamma, \rho)$, то $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho)) \cong H^1(\Gamma, \rho)$ для $\rho \in [S^1]^{2g} \setminus 1$. Следствие доказано.

Множество всех гармонических дифференциалов Прима ϕ для $\rho \in \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*)$ образует комплексное $(2g - 2)$ -мерное векторное пространство $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ при $\rho \notin L_g \cup \bar{L}_g$, так как

$$\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho)),$$

где $\bar{L}_g$ — образ L_g при отображении $\rho \rightarrow \bar{\rho}$. Выберем базис $\{\phi_j(z; \rho, [\mu])dz\}_{j=1}^{g-1}$ для $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, голоморфно зависящий от ρ в достаточно малой окрестности $U(\rho_0) \subset \text{Hom}(\Gamma_\mu, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$ и голоморфно зависящий от $[\mu]$ в достаточно малой окрестности $U([\mu_0]) \subset \mathbf{T}_g$ [3, с. 105; 4]. Одновременно выберем базис $\{\phi_j(z; \bar{\rho}, [\bar{\mu}])dz\}_{j=1}^{g-1}$ в $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\bar{\rho}))$, голоморфно зависящий от $\bar{\rho}$ в $U(\rho_0)$ (образ $U(\rho_0)$ при отображении $\rho \rightarrow \bar{\rho}$, это отображение будет автоморфизмом на $L_g \cup \bar{L}_g$) и голоморфно зависящий от $[\bar{\mu}]$ в достаточно малой окрестности $\bar{U}([\mu_0])$. Здесь класс $[\mu]$ имеет модули $(c_1, c_2, \dots, c_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$, а класс $[\bar{\mu}]$ имеет модули $(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_{3g-3}) \in \mathbf{C}^{3g-3}$.

Поэтому набор гармонических дифференциалов Прима

$$\phi_1(z; \rho, [\mu])dz, \dots, \phi_{g-1}(z; \rho, [\mu])dz;$$

$$\overline{\phi_1(z; \bar{\rho}, [\bar{\mu}])dz}, \dots, \overline{\phi_{g-1}(z; \bar{\rho}, [\bar{\mu}])dz}$$

образует базис, голоморфно зависящий от $\rho \in U(\rho_0)$ и от $[\mu]$.

Таким образом, на комплексном векторном расслоении (это есть так называемое гармоническое расслоение Прима)

$$\mathbf{HP} = \bigcup_{[\mu], \rho \notin L_g \cup \bar{L}_g} \Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho)) = \mathbf{P}_{1,0} \oplus \mathbf{P}_{0,1}$$

ранга $2g - 2$ над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$ определена структура голоморфного векторного расслоения.

Скалярное произведение на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$ определено по формуле:

$$(\phi_1, \phi_2) = i \int \int_{w^s([\mu])(\Delta)} (u_1 \bar{u}_2 + v_1 \bar{v}_2) dz \wedge d\bar{z},$$

где Δ — фиксированная фундаментальная область для Γ в U ; $\phi_j = u_j(z)dz + v_j(z)d\bar{z}$, $j = 1, 2$. Здесь $s([\mu])$ — локально голоморфное сечение Эрла над пространством Тейхмюллера [6].

Скалярное произведение эрмитово, так как $(\phi_1, \phi_2) = (\phi_2, \phi_1)$. Легко видеть, что $\mathbf{C}$ -линейный оператор $*$ (звезда Ходжа) будет изометрией на слое $\Gamma(F_\mu, \mathcal{H}^1(\rho))$. Оператор $*$ также изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ на себя и изометрия слоя $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ на себя.

Относительно этого скалярного произведения пространства $\Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$ и $\Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ ортогональны, так как, если $\phi_1 = u(z)dz \in \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho))$, $\phi_2 = v(z)d\bar{z} \in \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$, тогда $(\phi_1, \phi_2) = \int \int_{w^s([\mu])(\Delta)} u dz \wedge *v(z)d\bar{z} = 0$. Векторные расслоения $\mathbf{P}_{1,0}, \mathbf{P}_{0,1}$ и $\mathbf{HP}$ являются эрмитовыми голоморфными векторными расслоениями над $\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$. Следовательно, доказана

Теорема 3.2. Гармоническое расслоение Прима $\mathbf{HP} = \bigcup_{([\mu], \rho)} \Gamma(F_\mu, O^{1,0}(\rho)) \oplus \Gamma(F_\mu, O^{0,1}(\rho))$ является эрмитовым голоморфным векторным расслоением ранга $2g - 2$. Кроме того, $\mathbf{HP}$ является прямой суммой ортогональных эрмитовых голоморфных $*$ -инвариантных векторных подрасслоений $\mathbf{P}_{1,0}$ и $\mathbf{P}_{0,1}$ ранга $g - 1$ над

$$\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \bar{L}_g)$$

при любом $g \geq 2$.

Зададим конечное покрытие для $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1$ открытыми окрестностями $U_j = \{\rho : \rho(A_j) \neq 1\}$, $U_{g+j} = \{\rho : \rho(B_j) \neq 1\}$, $j = 1, \dots, g$. Рассмотрим характер $\rho \in [S^1]^{2g} \setminus 1 \cap U_1$. Для других окрестностей U_j , $j = 2, \dots, 2g$ рассмотрения будут аналогичны.

Следствие 3.2. Для любого $\rho_0 \in [S^1]^{2g} \setminus 1$ существует окрестность $U(\rho_0) \subset \{[S^1]^{2g} \setminus 1\}$ такая, что для $\rho \in U(\rho_0) \cap U_1$ в $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ существует базис гармонических дифференциалов Прима $\phi_1 = \phi_1(\rho; z), \dots, \phi_{2g-2} = \phi_{2g-2}(\rho; z)$, вещественно-аналитически зависящий от ρ и имеющий матрицу периодов относительно $A_2, \dots, A_g, B_2, \dots, B_g$, вида I_{2g-2} (единичная матрица порядка $2g - 2$).

Доказательство. Над $U(\rho_0)$ выберем базис гармонических дифференциалов Прима

$$\tilde{\phi}_1(\rho; z)dz, \dots, \tilde{\phi}_{g-1}(\rho; z)dz, \overline{\tilde{\phi}_1(\bar{\rho}; z)dz}, \dots, \overline{\tilde{\phi}_{g-1}(\bar{\rho}; z)dz}$$

на F для ρ , вещественно-аналитически зависящий от ρ . Составим блочную матрицу $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ классических периодов, относительно $A_2, \dots, A_g, B_1, B_2, \dots, B_g$ для этого базиса, где $A = (a_{mk}), B = (b_{ml}), C = (c_{mk}), D = (d_{ml})$, $m = 1, \dots, g-1, k = 2, 3, \dots, g, l = 1, 2, \dots, g$, так как для $\rho \in U_1$ можно выбрать представитель в классе периодов такой, что период на A_1 будет 0. Если существует линейная зависимость над $\mathbf{C}$ для $2g-2$ строк, то существует гармонический дифференциал Прима с нулевыми базисными периодами, и, по теореме 3.1, он тождественно равен нулю, а это невозможно из-за выбора базиса в $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$.

Таким образом, матрица $\begin{pmatrix} a_{mk} & b_{mk} \\ c_{mk} & d_{mk} \end{pmatrix} = M$, где $m = 1, \dots, g-1, k = 2, 3, \dots, g$, имеет $2g-2$ линейно независимых над $\mathbf{C}$ строк и ее определитель не равен нулю. Сделав невырожденное линейное преобразование в $\Gamma(F, \mathcal{H}^1(\rho))$ с матрицей M^{-1} , получим требуемый базис гармонических дифференциалов Прима. Следствие доказано.

4. Когомологическое расслоение Ганнинга

Обозначим через $Z^1(\Gamma, \rho)$ при $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*)$ множество всех отображений $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbf{C}$, таких, что $\phi(ST) = \phi(S) + \rho(S)\phi(T)$, $S, T \in \Gamma$.

Приведем основные свойства таких отображений:

1) $\phi(1) = 0$, так как $\phi(S \cdot 1) = \phi(S) + \rho(S)\phi(1)$ и $\rho(S) \neq 0$;

2) $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$, так как

$$0 = \phi(1) = \phi(SS^{-1}) = \phi(S) + \rho(S)\phi(S^{-1})$$

и $\phi(S^{-1}) = -\frac{\phi(S)}{\rho(S)}$;

3) $\phi([A, B] \cdot [C, D]) = \phi([A, B]) + \phi([C, D])$, так как $\rho([A, B]) = 1$;

4) $\phi([A, B]) = \sigma(B)\phi(A) - \sigma(A)\phi(B)$ для любых $A, B \in \Gamma$, где $\sigma(T) = 1 - \rho(T)$, $T \in \Gamma$;

5)

$$\phi(ABA^{-1}) = \phi([A, B]B) =$$

$$= \phi([A, B]) + \phi(B), \quad A, B \in \Gamma;$$

6) $\phi(ABA^{-1}) = \rho(A)\phi(B)$, $A \in \Gamma, B \in [\Gamma, \Gamma]$.

Теорема 4.1. Когомологическое расслоение Ганнинга G является голоморфным векторным расслоением ранга $2g-2$ над

$$\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus \{1\}).$$

Доказательство. При $\rho_\mu \neq 1$ существует изоморфизм векторного пространства $H^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$ и векторного пространства $\text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$, состоящего из гомоморфизмов $\phi_0 : [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu] \rightarrow (\mathbf{C}, +)$, таких, что $\phi_0(S^\mu T^\mu (S^\mu)^{-1}) = \rho_\mu(S^\mu)\phi_0(T^\mu)$, где $T^\mu \in [\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], S^\mu \in \Gamma_\mu, [\Gamma, \Gamma]$ — коммутант группы Γ . Таким образом, расслоение G над

$$\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus \{1\})$$

изоморфно расслоению со слоем $\text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$, над $([\mu], \rho)$, где

$$\rho(A_j) = \rho_\mu(A_j^\mu), \rho(B_j) = \rho_\mu(B_j^\mu), j = 1, \dots, g.$$

Зададим карту $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g)$ над $\mathbf{T}_g(F) \times U_l$ биективно отображающую $G|_{\mathbf{T}_g(F) \times U_l}$ на $\mathbf{T}_g(F) \times U_l \times \mathbf{C}^{2g-2}$ по правилу: элементу $\phi_0([\mu], \rho_\mu) \in \text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ сопоставляется набор

$$([\mu], \rho; \xi_1^l, \dots, \xi_{g-1}^l, \eta_1^l, \dots, \eta_{g-1}^l).$$

Здесь над U_l имеем:

$$\xi_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_j^\mu, A_l^\mu]), \eta_j^l = \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_j^\mu, A_l^\mu]),$$

а над U_{g+l} —

$$\begin{aligned} \xi_j^{g+l} &= \phi_0([\mu], \rho_\mu)([A_j^\mu, B_l^\mu]), \eta_j^{g+l} = \\ &= \phi_0([\mu], \rho_\mu)([B_j^\mu, B_l^\mu]), \end{aligned}$$

где $\tilde{j} = j$, при $1 \leq j \leq l-1$, и $\tilde{j} = j+1$, при $l \leq j \leq g-1$. Для $\rho \in U_1$, например, будет $\sigma_\mu(A_1^\mu) = 1 - \rho_\mu(A_1^\mu) \neq 0$ и любой элемент $\phi_0 = \phi_0([\mu], \rho_\mu) \in \text{Hom}_{\rho_\mu}([\Gamma_\mu, \Gamma_\mu], \mathbf{C})$ можно задать как $\phi_0 = \phi_1|_{[\Gamma_\mu, \Gamma_\mu]}$ для $\phi_1 = \phi_1([\mu], \rho_\mu) \in Z^1(\Gamma_\mu, \rho_\mu)$, такого, что $\phi_1(A_1^\mu) = 0$,

$$\phi_1(T^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-1}\phi_0([T^\mu, A_1^\mu]), T^\mu \in \Gamma_\mu.$$

Отсюда получаем соотношения:

$$\begin{aligned} \xi_j^1 &= \phi_0([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([A_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \\ &= \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(A_{j+1}^\mu), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_j^1 &= \phi_0([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \phi_1([B_{j+1}^\mu, A_1^\mu]) = \\ &= \sigma_\mu(A_1^\mu)\phi_1(B_{j+1}^\mu), \quad j = 1, \dots, g-1. \end{aligned}$$

Кроме того, из основного коциклического соотношения и задания координат над U_1 следует, что

$$\phi_1(B_1^\mu) = \sigma_\mu(A_1^\mu)^{-2} \sum_{j=1}^{g-1} [\sigma_\mu(B_{j+1}^\mu)\xi_j^1 - \sigma_\mu(A_{j+1}^\mu)\eta_j^1].$$

Таким образом, $\phi_1(A_j^\mu), \phi_1(B_j^\mu), j = 1, \dots, g$, выражаются через $\xi_j^1, \eta_j^1, j = 1, \dots, g-1$, и последние можно взять в качестве координат для ϕ_0 в слоях над $\mathbf{T}_g(F) \times U_1$. Аналогично можно поступить для остальных окрестностей.

Координаты ξ_j^l, η_j^l являются линейными комбинациями от $\phi_l(A_j), \phi_l(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_l$, а также линейными комбинациями от $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$, так как

$\phi_l|_{[\Gamma, \Gamma]} = \phi_0 = \phi_k|_{[\Gamma, \Gamma]}$ над $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$ (здесь ϕ_k и ϕ_l определяются аналогично как ϕ_1 над U_1 , над U_k и U_l соответственно). Далее, $\phi_k(A_j), \phi_k(B_j)$ — линейные комбинации от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k$. Поэтому координаты ξ_j^l, η_j^l будут линейными комбинациями от ξ_j^k, η_j^k с голоморфными коэффициентами на $U([\mu_0]) \times U_k \cap U_l$. Таким образом, получим, что матрицы перехода $T_{k,l}$ голоморфны на

$$\mathbf{T}_g(F) \times (U_l \cap U_k)$$

для всех $k, l = 1, \dots, 2g$. Следовательно, такие карты $\Theta(U_l, \{A_j, B_j\}_{j=1}^g), l = 1, \dots, 2g$ задают структуру голоморфного векторного расслоения на G над $\mathbf{T}_g(F) \times (\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1)$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. Векторные расслоения Ганнинга $G = \bigcup_{([\mu], \rho)} H^1(\Gamma_\mu, \rho)$ и Прима $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$ будут вещественно-аналитично изоморфными, и расслоение Ганнинга G над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$ равно прямой сумме двух вещественно-аналитических комплексных векторных подрасслоений ранга $g - 1$ для любого $g \geq 2$.

Доказательство. Имеем включения

$$[S^1]^{2g} \setminus 1 \subset \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L}_g) \subset \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus 1,$$

что сразу следует из теоремы Farkas–Kra [5, с.130], по которой любой нормированный несущественный характер будет тривиальным. На $[S^1]^{2g} \setminus 1$ есть естественная вещественно-аналитическая структура, согласованная с комплексно-аналитической структурой на $\text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L}_g)$. Поэтому голоморфные векторные расслоения G и $\mathbf{HP}$ над

$\mathbf{T}_g \times \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}^*) \setminus (L_g \cup \overline{L}_g)$, ограниченные на $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$, будут вещественно-аналитическими комплексными векторными расслоениями [3; 4], а послойный $\mathbf{C}$ -линейный изоморфизм p будет также вещественно-аналитическим изоморфизмом расслоений G и $\mathbf{HP}$ над $\mathbf{T}_g \times [S^1]^{2g} \setminus 1$.

Второе утверждение следует из теорем 3.1, 3.3, и 4.1, а также из теоремы 3.1.3 [3, с. 140]. Теорема доказана.

Литература

[1] Appell, P. *Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application au developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques* / P. Appell // Acta Math. – 1890. – Vol. 13: 3/4. – P. 1 – 174.

[2] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности*. / В. В. Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2005.

[3] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч. 2.* / В. В. Чуешев. — Кемерово: КемГУ, 2003.

[4] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differential* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[5] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – Vol. 71, New-York: Springer, 1992.

6. Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

УДК 517.54: 517.862

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР БЕРСА В НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ МЕРОМОРФНЫХ (q, ρ) -ФОРМ

О. А. Сергеева

THE INTEGRAL BERS OPERATOR IN THE NORMED SPACES OF MEROMORPHIC (q, ρ) -FORMS

О. А. Sergeeva

В пространствах мультипликативных мероморфных автоморфных форм для произвольного характера вводятся интегральная норма, билинейное спаривание и интегральный оператор Берса. Получены аналог неравенства Шварца для билинейного спаривания, универсальная оценка нормы и свойство самосопряженности для интегрального оператора Берса в случае мероморфных (q, ρ) -форм.

In spaces of multiplicative meromorphic automorphic forms the integral norm, bilinear pairing and the integral Bers operator for any character are entered. Under study an universal estimation of norm, selfadjointness for Bers operator in case of meromorphic (q, ρ) - forms and an analog of an inequality of Schwarz are received.

Ключевые слова: интегральный оператор Берса, мультипликативная мероморфная автоморфная форма, билинейное спаривание, двойственность.

Keywords: Integral Bers operator, multiplicative meromorphic automorphic form, bilinear pairing, duality.

Работа поддержана грантом ФЦП № 02.740. 11. 0457.