УДК 514.76.2

ДИВИЗОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА И АБЕЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НА ТОРЕ

Т. С. Крепицина

DIVISORS THE PRYM DIFFERENTIALS AND ABELIANS DIFFERENTIALS ON THE TORUS

T. S. Krepizina

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима на торе нашла приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [1-7]. Цель работы — получить новые свойства мероморфных дифференциалов Прима и абелевых дифференциалов на переменном торе и для переменных характеров в связи с дивизорами.

The theory of multiplicative functions and Prym differentials on torus has found applications in the theory of functions, the analytical theory of numbers and in the equations of mathematical physics [1-7]. The work purpose — to receive new properties of meromorphic Prym differentials and abelians differentials on variable torus and variable characters, in connection with divisors.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизоры, абелевы дифференциалы, переменный тор, переменные характеры, мероморфные дифференциалы.

Keywords: Prym differential, divisors, abelians differentials, variable tor, variable characters, meromorphic differentials.

Работа поддержана грантом ФЦП (№ 02.740.11.0457).

1. Предварительные сведения

Пусть F_0 — компактная риманова поверхность рода $g = 1$, $F_0 = \mathbb{C}/\Gamma$, где Γ — группа с двумя образующими $A_1(z) = z + \omega$, $B_1(z) = z + \omega'$, $Im\frac{\omega'}{\omega} > 0$. Положим $\mu_0 = \frac{\omega'}{\omega}$. Фундаментальная группа для поверхности F_0 имеет алгебраическое представление $\pi_1(F_0) \cong \Gamma =< a_1, b_1 : a_1b_1 = b_1a_1 >$. Класс $[F_0, \{a_1, b_1\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1 единственно определяется одним комплексным параметром (модулем) $\mu_0 = \frac{\omega'}{\omega}$, лежащим в верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$. При этом $F_0 = \mathbb{C}/\Gamma_0$, где Γ_0 — группа с двумя образующими $A_{01}(z) = z + 1$, $B_{01}(z) = z + \mu_0$.

Любой другой класс $[F_\mu, \{a_1^\mu, b_1^\mu\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1 также единственно определяется одним комплексным параметром (модулем) $\mu \in H$ и $F_\mu = \mathbb{C}/\Gamma_\mu$, где Γ_μ порождается двумя образующими $A_{\mu 1}(z) = z + 1$, $B_{\mu 1}(z) = z + \mu$. Кроме того, существует квазиконформное отображение $\widetilde{f}_\mu : F_0 \to F_\mu$ и его поднятие $f_\mu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ на универсальные накрывающие поверхности задает изоморфизм отмеченной группы Γ_0 на отмеченную группу $\Gamma_\mu = f_\mu \Gamma_0 f_\mu^{-1}$ и $a_1^\mu = \widetilde{f}_\mu(a_1)$, $b_1^\mu = \widetilde{f}_\mu(b_1)$.

Пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1(F_0)$, состоящее из классов $[F_\mu, \{a_1^\mu, b_1^\mu\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1, параметризовано точками H и является 1-мерным комплексно аналитическим многообразием. Это пространство с метрикой Тейхмюллера биголоморфно изометрично пространству $(H, \frac{|dz|}{2y})$, $z = x + iy$, постоянной отрицательной кривизны -4. [9].

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbb{T}_1$, у которого слой над $\mu \in \mathbb{T}_1$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от μ [7].

Характер ρ на торе F это произвольный гомоморфизм из Γ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Он однозначно определяется вектором $(\rho(a_1), \rho(b_1)) \in [\mathbb{C}^*]^2$. Отсюда имеем изоморфизм группы характеров $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ и $[\mathbb{C}^*]^2$. Характер ρ называется *несущественным* на F_μ, если существует $c(\mu, \rho) \in \mathbb{C}^1$, такое, что $\rho(a_1^\mu) = \exp 2\pi i c(\mu, \rho)$,

$$\rho(b_1^\mu) = \exp 2\pi i c(\mu, \rho)\pi_{11},$$

где для канонического базиса $\zeta_1(\mu) = Cdz, C \neq 0$, голоморфных абелевых дифференциалов на переменной римановой поверхности F_μ, двойственного каноническому базису $\{a_1^\mu, b_1^\mu\}$ в $\pi_1(F_\mu)$ имеем $\int_{a_1^\mu} \zeta_1(\mu) = \delta_{11} = 1$, $\int_{b_1^\mu} \zeta_1(\mu) = \pi_{11} = \mu$. Несущественные характеры образуют подгруппу L_1 в группе $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$. Характеры из $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)\backslash L_1$ будем называть *существенными* [3; 6]. Характер называется нормированным, если все его значения лежат на окружности $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Мультипликативной функцией f на F для ρ называется однозначная мероморфная функция $w = f(z)$ на $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условиям $f(Tz) = \rho(T)f(z),\ z \in \mathbb{C},\ T \in \Gamma$.

Если f_0 — мультипликативная функция без нулей и полюсов на F_μ для ρ, то $\frac{df_0}{f_0} =$

$2\pi i c_1(\mu,\rho)\zeta_1(\mu)$, а значит

$$f_0(\mu,P)=\exp\int_{P_0[\mu]}^{P}2\pi i c_1(\mu,\rho)\zeta_1(\mu),$$

где $P_0[\mu]=\widetilde{f}^{s[\mu]}(P_0)\in F_\mu$, c_1 зависит голоморфно от μ и ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ — сечение К. Эрла над $\mathbb{T}_1$ [7]. Такую функцию будем называть мультипликативной единицей для ρ.

Определение 1.1. *q-дифференциалом Прима ϕ для ρ, относительно группы Γ, т.е. (ρ,q)-дифференциалом, называется дифференциал $\phi(z)dz^q$, такой, что $\phi(Tz)(T'z)^q=\phi(z)\rho(T)$, $z\in\mathbb{C}, T\in\Gamma$.*

В частности, при $q=0$ это мультипликативная функция для ρ, относительно Γ.

Определение 1.2. *Дифференциал Прима ϕ класса C^1 на компактной римановой поверхности F для характера ρ называется мультипликативно точным, если $\phi=df(z)$ и*

$$f(Tz)=\rho(T)f(z),T\in\Gamma,z\in\mathbb{C},$$

т. е. f — мультипликативная функция на F класса C^2 для ρ.

Пусть D — дивизор на F. Введем, по аналогии с классическим случаем $\rho=1$, для любого характера ρ следующие пространства : $L_\rho(D;F)$, состоящее из мультипликативных мероморфных функций f на F для ρ, таких, что $(f)\geq D$, и $\Omega_\rho(D;F)$, состоящее из мероморфных 1-дифференциалов ω на F для ρ, таких, что $(\omega)\geq D$. Обозначим через $r_\rho(D)=\dim_{\mathbb{C}}L_\rho(D;F)$, $i_\rho(D)=\dim_{\mathbb{C}}\Omega_\rho(D;F)$ размерности этих комплексных векторных пространств.

Теорема Римана-Роха для характеров [3; 6]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g=1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера $\rho,\rho\neq 1$ верно равенство $r_\rho(D^{-1})=\deg D+i_{\rho^{-1}}(D)$.*

Предложение 1.1. [10]. *Размерность $\dim_{\mathbb{C}}L_\rho(1;F)=r_\rho(1)$ равна 1 при $\rho\in L_1$ и равна 0 при $\rho\in Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_1$.*

Положим $\psi(\rho)=\frac{1}{2\pi i}(\log\rho(b_1)-\log\rho(a_1)\pi_{11})$.

Теорема Абеля для характеров на торе [3; 4; 6]. *Пусть $[F;\{a_1,b_1\}]$ — отмеченная компактная риманова поверхность рода 1, ρ — характер для F и $D=\dfrac{P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Qs^{\beta_s}}$ — дивизор степени нуль на F. Тогда существует мультипликативная функция f на F для ρ с $(f)=D\Leftrightarrow$ $\psi(\rho)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j z_j-\sum_{k=1}^{s}\beta_k w_k=\varphi(D)$ в $J(F)=\varphi(F)$, где $\varphi(P_j)=z_j$, $\varphi(Q_k)=w_k$ и φ — отображение Якоби из F на $J(F)$.*

Следствие 1.1. [4; 6]. *Для любого несущественного характера ρ на торе F, т.е. характер задается мультипликаторами $\mu=e^{\lambda\omega},\mu'=e^{\lambda\omega'}$ с условием $\frac{1}{i\pi}(\omega\log\mu'-\omega'\log\mu)=0$ в $J(F)$, не существует мультипликативной функции f на F для ρ, имеющей точно один простой полюс на F.*

Следствие 1.2. [3; 10]. *Каждый дивизор*

$$D=\frac{P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}}\neq 1,$$

$\alpha_j,\beta_j\in\mathbb{N}$, степени нуль на торе F будет дивизором мультипликативной функции

$$f(P)=f(Q_0)\exp\left[\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\int_{Q_0}^{P}\tau_{P_jP_0}-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{s}\beta_j\int_{Q_0}^{P}\tau_{Q_jP_0}+\log\rho(a_1)\int_{Q_0}^{P}\zeta_1\right]$$

для некоторого нормированного характера $\rho(a_1)=\exp 2\pi ic$, $\rho(b_1)=\exp 2\pi i(c\pi_{11}+d)$, $d\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, где τ_{PQ} — нормированный абелев дифференциал третьего рода с простыми полюсами P,Q и вычетами + 1 и -1 соответственно.

Следствие 1.3. [3; 10]. *Для любого существенного характера ρ на торе F существует мультипликативная функция f для ρ, имеющая точно один простой полюс в любой точке Q_1 на F. При этом*

$$f(P)=\exp[\int_{Q_0}^{P}\tau_{P_1P_0}-\int_{Q_0}^{P}\tau_{Q_1P_0}+\log\rho(a_1)\int_{Q_0}^{P}\zeta_1],$$

где $\varphi(P_1)=\varphi(Q_1)+\psi(\rho)$ в $J(F)$ и $\psi(\rho)\neq 0$.

Обозначим через $\Omega_\rho^q(D;F_\mu)$ пространство (ρ,q)-дифференциалов, которые кратны дивизору D на F_μ. Его размерность обозначим через $i_{\rho,q}(D)$.

Теорема Римана – Роха для q–дифференциалов и характеров. ([3; 6]). *Для любого $q\in\mathbb{Z}$ верно равенство*

$$i_{\rho,q}(D)=-\deg D+i((f)Z^q/D)=$$
$$=-\deg D+r((f)Z^{q-1}/D)$$

при любом характере ρ на римановой поверхности F рода $g=1$, где f — любая мультипликативная функция для ρ, $f\neq 0$ и Z — канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на F.

Предложение 1.2.[10]. *Пусть ρ — любой характер на переменном торе F_μ и $q\in\mathbb{Z}$. Тогда $i_{\rho,q}(1;F_\mu)=\dim_{\mathbb{C}}\Omega_\rho^q(1;F_\mu)=1$ при $\rho\in L_1$ и $i_{\rho,q}(1;F_\mu)=0$ при $\rho\in Hom(\Gamma,\mathbb{C}^*)\backslash L_1$. Причем $\Omega_\rho^q(1;F_\mu)=\langle dz^q\exp 2\pi ic(\mu,\rho)z\rangle$ при $\rho\in L_1$, где $\rho(a_1)=\exp 2\pi ic(\mu,\rho)$.*

2. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы [3; 6; 8] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса, и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей μ римановой поверхности рода один.

Теорема 2.1. *1. Для любого существенного характера ρ, точки Q_1 на торе F_μ и натурального числа $q \geq 1$ существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ, локально голоморфно зависящий от ρ и μ;*

2.Для любого несущественного характера ρ и точки $Q_1 \in F_\mu$ при $q \geq 1$ не существует элементарный (ρ, q)-дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ.

Доказательство. 1) Пусть ρ — существенный характер и $q \geq 1$. Построим такие дифференциалы локально голоморфно зависящие от ρ и μ. Такой (ρ, q)-дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ можно задать в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f dz^q$, где f — мультипликативная функция для ρ на F_μ, $q \geq 1$, и dz — голоморфный абелев дифференциал на F_μ. Дивизор $(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1}{Q_1} = (f)$. Отсюда получаем равенство

$$\varphi(R_1) = \varphi(Q_1) + \psi(\rho), \psi(\rho) \neq 0, \qquad (*)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ, где Q_1 голоморфно зависит, от μ, а значит, правая сторона голоморфно зависит от μ. Тогда существует единственное решение R_1, голоморфно зависящее от μ и ρ. Отсюда $(f) = \frac{R_1}{Q_1}$ тоже голоморфно зависит от μ и ρ.

2) Пусть ρ — несущественный характер и $q \geq 1$. Если существует дифференциал $\tau = \tau_{\rho,q;Q_1}$ с вычетом в $res_{Q_1}\tau \neq 0$ для некоторой его ветви, то $f_1 = f_0^{-1} dz^{-q} \tau$ — однозначная мероморфная функция с единственным простым полюсом на торе F_μ и $(f_1) = \frac{R_1}{Q_1}, R_1 \neq Q_1$, где f_0 — мультипликативная единица для ρ. По классической теореме Абеля $\varphi(R_1) = \varphi(Q_1)$ в $J(F_\mu)$. Так как φ — взаимно однозначное отображение из F_μ на $J(F_\mu)$, то $R_1 = Q_1$. Противоречие. Теорема доказана.

3. Однозначные мероморфные дифференциалы на торе

Обозначим через $\Omega_2(F_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на F_μ, а через $\Omega_{2,e}(F_\mu)$ – подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменном торе F_μ.

Пусть $\widetilde{E}_1 = \bigcup\limits_{\mu} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ — векторное расслоение у которого над точкой μ из базы $\mathbb{T}_1$ лежит слой $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$.

Теорема 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга 2 над $\mathbb{T}_1$. При этом набор классов смежности дифференциалов*

$$\zeta_1, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} \qquad (**)$$

задает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.

Доказательство. Зададим отображение Φ из пространства $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ на $\mathbb{C}^2$ по правилу: сопоставляем ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi : \omega \to (\int\limits_{a_1} \omega, \int\limits_{b_1} \omega) \in \mathbb{C}^2.$$

Ядро отображения Φ совпадает с $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды для ω равны нулю, то и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F_μ, а значит, принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Ясно, что если дифференциал принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$, то все его периоды равны нулю. Так как отображение Φ взаимнооднозначно и линейно на классах смежности, то $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \leq 2$.

Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \geq 2$$

и построим базис этого фактор-пространства.

Рассмотрим набор $(**)$. Если существует линейная комбинация $C_1\zeta_1 + \widetilde{C}_1\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} = df$, то коэффициент $\widetilde{C}_1 = 0$, так как в противном случае f — однозначная функция с единственным простым полюсом на F_μ. Осталось равенство $C_1\zeta_1 = df$. Тогда a_1−период левой части будет равен C_1, а для правой части все периоды равны нулю. Отсюда $C_1 = 0$. Таким образом, доказали линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора $(**)$.

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) = 2$.

Базис ζ_1 пространства голоморфных абелевых дифференциалов, по теореме Берса [9], можно выбрать голоморфно зависящим от μ. Также классический факт: дифференциалы $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}$ можно выбрать голоморфно зависящими от μ. Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Из классических результатов известно, что ζ_1 и $\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}$ только локально голоморфно зависят от μ из $\mathbb{T}_1$.

Следствие 3.1. *Расслоение $\widetilde{E}_1$ является (глобально) тривиальным над пространством Тейхмюллера и существуют глобальные сечения для $\widetilde{E}_1$ над $\mathbb{T}_1$, т.е. существует два абелевых дифференциала первого и второго рода, которые являются глобальными функциями от μ над $\mathbb{T}_1$.*

Доказательство. Это следует из теоремы Грауэрта, в силу односвязности базы $\mathbb{T}_1$, о том, что над такой базой расслоение становится глобально тривиальным или комплексно аналитически эквивалентным $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{C}^2$. Следствие 3.1 доказано.

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}, F_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов с дивизорами кратными $\frac{1}{Q_1 ... Q_s}$, где $Q_1 ... Q_s$ — локально голоморфное сечение в пространстве дивизоров степени s над $\mathbb{T}_1$.

Пусть $\widetilde{E}_2 = \bigcup\limits_\mu \Omega(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}, F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbb{T}_1$, $s \geq 1$. По теореме Римана-Роха, $r(Q_1 ... Q_s) = -s + i(\frac{1}{Q_1 ... Q_s})$. Отсюда $i(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}) = s$, так как $r(Q_1 ... Q_s) = 0$.

Рассмотрим набор дифференциалов

$$\zeta_1, \tau_{Q_2 Q_1}, ..., \tau_{Q_s Q_1}, \tag{1}$$

которые, по теореме Берса и по классическим результатам, локально голоморфно зависят от μ.

Этот набор линейно независим над $\mathbb{C}$. Если $C_1 \zeta_1 + \widetilde{C}_1 \tau_{Q_2 Q_1} + ... + \widetilde{C}_{s-1} \tau_{Q_s Q_1} = 0$ на F_μ, то $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_{s-1} = 0$, так как нет особенностей в правой части. Коэффициент $C_1 = 0$ в силу линейной независимости ζ_1 над $\mathbb{C}$ на F_μ. Таким образом, доказано предложение.

Предложение 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ ранга s, $s \geq 1$, является голоморфным векторным расслоением над $\mathbb{T}_1$, а набор дифференциалов* (1) *дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Следствие 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{C}^s$ и существуют s глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_1$.*

Обозначим через $\widetilde{E}_3 = \bigcup\limits_\mu \Omega(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbb{T}_1$, $s \geq 2$, где $\Omega(1, F_\mu)$ — пространство голоморфных абелевых дифференциалов на F_μ.

По теореме Римана-Роха, $i(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}) = s$ и $i(1) = 1$. Поэтому

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu) = s - 1.$$

Докажем, что набор классов смежности дифференциалов

$$\tau_{Q_2 Q_1}, ..., \tau_{Q_s Q_1} \tag{2}$$

будет линейно независим над $\mathbb{C}$ на F_μ. Если $C_1 \tau_{Q_2 Q_1} + ... + C_{s-1} \tau_{Q_s Q_1} = \omega$, где ω — голоморфный дифференциал, то все коэффициенты $C_1 = ... = C_{s-1} = 0$, так как особые точки правой и левой сторон различны. Таким образом, доказали предложение.

Предложение 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_3$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $s-1$ над $\mathbb{T}_1$ и классы смежности дифференциалов набора* (2) *образуют базис локально голоморфных сечений этого расслоения. Кроме того, $\widetilde{E}_3$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_1 \times \mathbb{C}^{s-1}$ и существуют $s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_1$.*

4. Мультипликативные функции и единицы на переменном торе

Пусть на F_μ задана мультипликативная мероморфная функция f для любого характера ρ. Тогда дивизор $(f) = D = \frac{R_1^{\alpha_1} ... R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} ... Q_s^{\beta_s}}$ на F_μ, где $R_j, Q_i \in F_\mu, \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, ..., m, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., s$, и $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j$.

Рассмотрим однозначный (абелев) дифференциал $\omega(z)dz = \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ третьего рода на F_μ с простыми полюсами в точках $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $\alpha_1, ..., \alpha_m, -\beta_1, ..., -\beta_s$ соответственно. Тогда

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} + 2\pi i c_1 \zeta_1, \tag{$***$}$$

где $c_1 \in \mathbb{C}$, и P_0 не принадлежит $suppD = \{R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s\}$. Отсюда $f(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$ на F_μ.

Пусть f — мультипликативная функция на торе F_μ. Предположим дополнительно, что в окрестности $U(P_j)$ функция

$$f(P) \sim e^{q_j(k_j)(P)}, k_j(P_j) = \infty,$$

q_j – некоторые многочлены от k_j, $j = 1, ..., l$, а в точках $P_{l+1}, ..., P_n$ возможны либо полюса, либо нули порядков $r_{l+1}, ..., r_n$ соответственно. Положим $\widetilde{g}(P) = \frac{f(P)}{\chi_{P_1,...,P_l}(P)}$ на F_μ, где $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ будет l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с теми же асимптотиками в точках $P_1, ..., P_l$, как у функции f [8]. Тогда $0 = \deg(\widetilde{g}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j + \sum\limits_{j=l+1}^{n} r_j$. Дифференциал $\widetilde{\omega}(z)dz = \frac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)} dz$ будет абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s, P_{l+1}, ..., P_n$, где функция $\widetilde{g}$ имеет дивизор

$$(\widetilde{g}) = D = \frac{R_1^{\alpha_1} ... R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1} ... Q_s^{\beta_s}} P_{l+1}^{r_{l+1}} ... P_n^{r_n},$$

$r_j \in \mathbb{Z}, j = l+1, ..., n$ на F_μ, и

$$\widetilde{\omega}(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_j P_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_j P_0} +$$

$$+\sum_{j=l+1}^{n} r_j\tau_{P_jP_0}+2\pi i c_1\zeta_1, \qquad (****)$$

где $c_1 \in \mathbf{C}$. Таким образом доказана.

Теорема 4.1. *Мультипликативные функции f на торе F_μ для любого характера ρ, с указанными выше условиями, имеют следующие представления :*

1.$f(P)=\exp\int\limits_{P_0}^{P}\omega(z)dz$, где $\omega(z)dz$ задана формулой (***) на F_μ;

2. $f(P)=\chi_{P_1,\dots,P_l}(P)\exp\int\limits_{P_0}^{P}\widetilde{\omega}(z)dz$, где $\widetilde{\omega}(z)dz$ задана формулой (****) на F_μ и $1\le l\le n$, $n\ge 1$, которая имеет асимптотики вида $e^{q_j(k_j)(P)}$ в $U(P_j), j=1,\dots,l$. Здесь $\chi_{P_1,\dots,P_l}(P)$ — l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с указанной асимптотикой в точках $P_1,\dots,P_l$. Эти функции локально голоморфно зависят от μ и ρ.

Если дана функция f для любого ρ, то дивизор $D=(f)$, степени нуль, состоящий из ее нулей и полюсов с учетом кратности, определяется единственно на F_μ. Выясним будет ли верным утверждение, что функция f для некоторого характера по заданному дивизору $D, \deg D=0$, определяется с точностью до умножения на ненулевую константу.

Известна теорема 1.1.3. [6, с. 40; 3], что каждый дивизор $D\neq 1$ степени 0 будет дивизором единственной (с точностью до умножения на ненулевую константу) мультипликативной функции на торе F_μ, принадлежащей единственному нормированному характеру.

Предложение 4.1. *Пусть D — дивизор, $\deg D=0$ на компактной римановой поверхности F рода $g=1$, тогда:*

1. Если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1)=(f_2)=D$, для одного и того же характера ρ, то $f_1=cf_2$, где $c=const\neq 0$ на F_μ;

2. Если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1)=(f_2)=D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1\neq\rho_2$, то $f_1=f_2g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F_μ, где $\rho_1=\rho_2\rho_0$;

3. Если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1)=(f_2)=D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1=\rho_2$ и $f_1=cf_2$, где $c=const\neq 0$ на F_μ;

4. Для любого несущественного характера ρ не существует функции f для ρ с дивизором $(f)=\frac{P_1}{Q_1}$, $P_1\neq Q_1$, на F_μ.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g=\frac{f_1}{f_2}$. Дивизор $(g)=1$ и характер $\frac{\rho}{\rho_1}=1$, поэтому $g=c\neq 0$ на F_μ, так как g однозначная аналитическая функция на F_μ.

2) Также рассмотрим $g=\frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g)=1$, а значит, ее характер $\rho_0=\frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Таким образом, $f_1=f_2g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0.

3) Снова рассмотрим $g=\frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g)=1$, а значит, ее характер $\rho_0=\frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным, и по теореме [6, с. 130], $\rho_0\equiv 1$. Поэтому $\rho_1=\rho_2$ и, по утверждению 1), имеем $f_1=cf_2$, $c\neq 0$ на F_μ.

4) Действительно, если существует такая функция для несущественного характера ρ, то рассмотрим функцию $g=\frac{f}{f_0}$, где f_0 — мультипликативная единица для ρ. Функция g — однозначная функция с одним простым полюсом на F. Противоречие. Предложение 4.1 доказано.

Замечание 4.1. В то же время существует функция f с заданным дивизором $(f)=\frac{P_1}{Q_1}$ для нормированного характера ρ, а значит, ρ будет существенным характером [6, с. 130].

Следствие 4.1. *Для любого фиксированного характера функция f на торе F_μ восстанавливается по своему дивизору с точностью до умножения на ненулевую константу.*

Ясно, что $(\rho,m)-$дифференциал $\omega_{\rho,m}$ имеет единственный дивизор D из своих нулей и полюсов с учетом кратности и

$$\deg D=(2g-2)m=0,\ m\ge 1.$$

Выясним будет ли по заданному дивизору D, $\deg D=0$ находиться (ρ,m)-дифференциал $\omega_{\rho,m}$ с точностью до умножения на ненулевую константу на поверхности F_μ рода $g=1$.

Известно из [3, с. 23], что любой дивизор D степени нуль при $m\ge 1$ есть дивизор единственного (с точностью до умножения на ненулевую константу) (ρ,m)-дифференциала, принадлежащего к единственному нормированному характеру на торе.

Предложение 4.2. *Пусть D — дивизор, $\deg D=0$, на торе F_μ и $m\ge 1$, тогда:*

1. Если существуют два (ρ,m)-дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1)=(\omega_2)=D$, для одного и того же характера ρ, то $\omega_1=c\omega_2$, где $c=const\neq 0$ на F_μ.

2. Если существуют два (ρ,m)-дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1)=(\omega_2)=D$ для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1\neq\rho_2$, то $\omega_1=\omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F_μ, где $\rho_1=\rho_2\rho_0$.

3. Если существуют два (ρ,m)-дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1)=(\omega_2)=D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1=\rho_2$ и $\omega_1=c\omega_2$, где $c=const\neq 0$ на F_μ.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g=\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Дивизор $(g)=1$ и характер $\frac{\rho}{\rho}=1$, поэтому $g=c\neq 0$ на F_μ, так как g — однозначная аналитическая функция на F_μ.

2) Теперь рассмотрим $g=\frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g)=1$, а значит, ее характер $\rho_0=\frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен

быть несущественным. Таким образом, $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0 и $\rho_1 = \rho_2\rho_0$.

3) Рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда характер ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным и, по теореме [6, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и, по утверждению 1), $\omega_1 = c\omega_2$, $c \neq 0$ на F_μ. Предложение 4.2 доказано.

Литература

[1] Ахиезер, Н. И. *Элементы теории эллиптических функций* / Н. И. Ахиезер. – М.: Наука, 1970.

[2] Чуешев, В. В. *Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2005.

[3] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[4] Appell, P. *Principes de la theorie des fonctions elliptiques et applications* / P. Appell, E. Lacour. – Paris: Gauthier-Villars, 1897.

[5] Forsyth, A. R. *Theory of functions of a complex variable* / A. R. Forsyth. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1900.

[6] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – Vol. 71. New-York: Springer, 1992.

[7] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – 107. – P. 255 – 286.

[8] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин. – М.: МГУ, 1986.

[9] Альфорс, Л. В. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.: ИЛ, 1961.

[10] Крепицина, Т. С. *Группа характеров и мультипликативные функции на торе* / Т. С. Крепицина // Вестник КемГУ. – 2011. – Вып. 3(47). – С. 11 – 16.

УДК 515.17 + 517.545

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ПРИМА И ИХ КЛАССЫ ПЕРИОДОВ НА ПЕРЕМЕННОЙ КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т. А. Пушкарева, В. В. Чуешев

HARMONIC PRYM DIFFERENTIALS AND THEIR CLASSES PERIODS ON VARIABLE COMPACT RIEMANN SURFACE

T. A. Pushkareva, V. V. Chueshev

Гармонические дифференциалы Прима и их классы периодов играют большую роль в современной теории функций на компактных римановых поверхностях [1 – 5]. В работе исследовано гармоническое расслоение Прима, слои которого есть пространства гармонических дифференциалов Прима на переменных компактных римановых поверхностях. Доказано, что когомологическое расслоение Ганнинга, связанное с классами периодов, будет вещественно-аналитически изоморфно гармоническому расслоению Прима над произведением пространства Тейхмюллера и пространства нетривиальных нормированных характеров.

Harmonic Prym differentials and their periods classes play the big role in contemporary theory functions on compact Riemann surfaces. In this paper is investigated harmonic Prym bundle, whose fibre is space of harmonic Prym differentials on variable compact Riemann surfaces. Proven that cohomology Gunning bundle, which connect with periods classes, are real analytically isomorphic harmonic Prym bundle over product Teichmueller space and a space of nontrivial normalized characters.

Ключевые слова: гармонический дифференциал Прима, переменная компактная риманова поверхность, переменные характеры, пространство Тейхмюллера.

Keywords: harmonic Prym differential, variable compact Riemann surface, variable characters, Teichmueller space.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №-02.740.11.0457; РФФИ 09 - 01 - 00255; НШ - 7347.2010.1; РФФИ 11 - 01 - 90709;

1. Предварительные сведения

Пусть F – фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – римманова поверхность с фиксированной комплексно-