УДК 517.552

О ФОРМУЛЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА КОШИ-СЕГЕ В МНОГОМЕРНОМ ШАРЕ

А. С. Кацунова

ON THE FORMULA OF CHANGE OF INTEGRATION ORDER FOR THE SINGULAR CAUCHY-SZEGÖ INTEGRAL IN MULTIDIMENSIONAL BALL

A. S. Katsunova

В работе рассмотрены аналоги формулы Пуанкаре-Бертрана для особого интеграла Коши-Сеге в шаре. Главное значение интеграла рассмотрено по Коши и в смысле Керзмана-Стейна. Аналог, полученный в случае рассмотрения главного значения по Коши, отличен от формулы Пуанкаре-Бертрана для интеграла Коши на комплексной плоскости. Однако, если рассматривать главное значение в смысле Керзмана-Стейна, они совпадают. Статья является обзором основных результатов по данной теме.

It is obtained the Poincaré-Bertrand formula for singular Cauchy-Szegö integral in a multidimensional ball. It is considered principal value of integral in terms of Cauchy and in terms of Kerzman-Stein. The received formula in case of consideration of a Cauchy principal value differs from Poincaré-Bertrand formula for Cauchy integral in a complex plane. However, in case of consideration of a principal value in terms of Kerzman-Stein the received formula of change of integration order is coincide with Poincaré-Bertrand formula. This paper is a review of the main results on this problem.

Ключевые слова: интеграл Коши-Сеге, главное значение особого интеграла, формула перестановки повторного интеграла.

Keywords: Cauchy-Szegö integral, principal value of integral in terms of Cauchy, formula of change of integration order for iterated integral.

1. Введение

В теории голоморфных функций одного комплексного переменного основополагающую роль играет интегральная формула Коши (см., например, [1, 2]).

Теорема 1.1. *Пусть $G \subset \mathbb{C}^1$ — ограниченная односвязная область, границей которой является произвольная кусочно-гладкая линия ∂G. Для функции f, голоморфной в G и непрерывной в $\overline{G}$ (т. е. $f \in \mathcal{O}(G) \cap \mathcal{C}(\overline{G})$), справедлива формула*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G.$$

В случае, если точка z лежит на границе области G, интеграл становится расходящимся в обычном смысле и рассматривают главное значение по Коши особого интеграла, которое определяется следующим образом:

$$\text{v.p.}\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G \setminus \{\zeta:\ |\zeta - z| < \varepsilon\}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \partial G.$$

Пусть функция $\varphi(\zeta, w)$ удовлетворяет условию Гельдера на $\Gamma \times \Gamma$ с показателем α (т. е. $\varphi(\zeta, w) \in \mathcal{C}^\alpha(\Gamma \times \Gamma)$), где Γ — гладкая кривая из $\mathbb{C}^1$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда для интеграла Коши имеет место формула перестановки повторного особого интеграла (см., например, [3]).

Теорема 1.2. *Если $\varphi(\zeta, w) \in \mathcal{C}^\alpha(\Gamma \times \Gamma)$ при $0 < \alpha \leqslant 1$, тогда*

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_w} dw \int\limits_{\Gamma_\zeta} \frac{\varphi(\zeta, w)}{(\zeta - z)\ (w - \zeta)}\ d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma_\zeta} \int\limits_{\Gamma_w} \frac{\varphi(\zeta, w)}{(\zeta - z)\ (w - \zeta)}\ d\zeta\ dw + \frac{1}{4}\ \varphi(z, z),\ z \in \Gamma.$$

Целью работы являются исследование повторного особого интеграла Коши-Сеге и получение аналога классической формулы Пуанкаре-Бертрана для интеграла (типа) Коши.

2. Интегральное представление Коши-Сеге

Рассмотрим n-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$. Введем следующие обозначения. Если $\zeta,\ z \in \mathbb{C}^n$, то $\langle \zeta, z \rangle = \zeta_1 z_1 + \ldots + \zeta_n z_n$, а $|z| = \sqrt{\langle \overline{z}, z \rangle}$, где $z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\overline{z} = (\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$.

Пусть $B_z(r)$ — шар из $\mathbb{C}^n$ с центром в точке z радиуса r, т. е.

$$B_z(r) = \{\zeta \in \mathbb{C}^n :\ |\zeta - z| < r\}.$$

Обозначим $B = B_0(1)$ — единичный шар из $\mathbb{C}^n$, S — граница шара B

$$S = \partial B = \{\zeta \in \mathbb{C}^n :\ |\zeta| = 1\}.$$

Обозначим через $K(\zeta, z)$ — ядро Коши-Сеге для шара, т. е.

$$K(\zeta, z) = \frac{1}{\left(1 - \langle \overline{\zeta}, z \rangle\right)^n},$$

а через $\sigma(\zeta)$ — дифференциальную форму

$$\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, \bar{\zeta}_k \; d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где

$$d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n, \; d\bar{\zeta}[k] = \\ = d\bar{\zeta}_1 \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_{k-1} \wedge d\bar{\zeta}_{k+1} \wedge \ldots \wedge d\bar{\zeta}_n.$$

Приведем известное интегральное представление Коши-Сеге (Хуа Локена) для голоморфных функций в шаре (см., например, [4]).

Теорема 2.1. *Для любой функции $f \in \mathcal{O}(B) \cap \mathcal{C}(\overline{B})$, справедлива формула*

$$f(z) = \int\limits_S f(\zeta)\; K(\zeta, z)\; \sigma(\zeta), \quad z \in B.$$

3. Главное значение по Коши интеграла Коши-Сеге

Для точек $z \in S$ обычно рассматривается главное значение по Коши:

$$\text{v.p.} \int\limits_S f(\zeta)\, K(\zeta, z)\, \sigma(\zeta) = \lim_{\varepsilon \to +0} \int\limits_{S \setminus B_z(\varepsilon)} f(\zeta)\, K(\zeta, z)\, \sigma(\zeta).$$

Для особого интеграла Коши-Сеге верно утверждение (см. [5]).

Теорема 3.1. *При $n > 1$ справедлива формула:*

$$\text{v.p.} \int\limits_S K(\zeta, z)\; \sigma(\zeta) = 1, \quad z \in S.$$

Обозначим для интегрируемой на S функции f предельное значение интеграла

$$\int\limits_S f(\zeta)\; K(\zeta, z)\; \sigma(\zeta)$$

изнутри шара B через $K^+[f]$, а через $K_s[f]$ — главное значение по Коши этого интеграла, т. е.

$$K_s[f] = \text{v.p.} \int\limits_S f(\zeta)\; K(\zeta, z)\; \sigma(\zeta), \quad z \in S.$$

Тогда для интеграла Коши-Сеге справедлив аналог формулы Сохоцкого-Племеля (см. [5]).

Следствие 3.2. *Пусть $n > 1$. Если функция $f \in \mathcal{C}^\alpha(S)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то интеграл $K^+[f]$ продолжается на S до некоторой функции, также удовлетворяющей на S условию Гельдера с показателем $\beta = \frac{\alpha}{2}$ и*

$$K^+[f] = K_s[f].$$

В этом параграфе для точек $z \in S$ будем рассматривать интеграл Коши-Сеге в смысле главного значения по Коши и знак v.p. будем опускать.

Теорема 3.3. *Пусть*

$$f(\zeta, w) = f_0(\zeta, w)\; \left|1 - \langle \bar{\zeta}, w \rangle\right|^{-\nu},$$

$0 \leqslant \nu < n,\; f_0 \in \mathcal{C}^\alpha(S \times S)$, тогда

$$\int\limits_{S_w} d\sigma(w) \int\limits_{S_\zeta} f(\zeta, w)\; K(\zeta, z)\; \sigma(\zeta) = \\ = \int\limits_{S_\zeta} K(\zeta, z)\; \sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w)\; d\sigma(w), \quad z \in S.$$

Лемма 3.4. *При $n > 1$ для точек $z^0,\; \zeta^0 \in S$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S_w} K(w, z^0)\; K(\zeta^0, w)\; \sigma(w) = K(\zeta^0, z^0), \quad z^0 \neq \zeta^0.$$

Теорема 3.5. *При $n > 1$, если $f \in \mathcal{C}^\alpha(S \times S)$, тогда*

$$\int\limits_{S_w} K(w, z)\; \sigma(w) \int\limits_{S_\zeta} f(\zeta, w)\; K(\zeta, w)\; \sigma(\zeta) = \\ = \int\limits_{S_\zeta} \sigma(\zeta) \int\limits_{S_w} f(\zeta, w)\; K(w, z)\; K(\zeta, w)\; \sigma(w), \; z \in S.$$

Формула, полученная в теореме 3.5, отлична от формулы Пуанкаре-Бертрана в случае комплексной плоскости для интеграла Коши.

Из теоремы 3.5 и леммы 3.4 получается следствие, называемое формулой композиции.

Следствие 3.6. *Пусть $n > 1$. Если $f(\zeta, w) = f(\zeta) \in \mathcal{C}^\alpha(S)$, то*

$$K_s^2[f] = K_s[f].$$

4. Главное значение в смысле Керзмана-Стейна интеграла Коши-Сеге

В работах Альта [6], Керзмана и Стейна [7] для точек $z \in S$ было рассмотрено другое главное значение v.p.h. особого интеграла Хенкина-Рамиреза, частным случаем которого является интеграл Коши-Сеге. Поэтому, наряду с v.p., для точек $z \in S$ рассмотрим главное значение в смысле

Керзмана-Стейна:

$$\text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{S\setminus\{\zeta:\ |1-\langle\overline{\zeta},\ z\rangle|<\varepsilon\}} f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta).$$

Лемма 4.1 *При $n>1$ справедлива формула*

$$\text{v.p.h.}\int\limits_S K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta) = \frac{1}{2},\quad z\in S.$$

Обозначим через $K_{sh}[f]$ — главное значение в смысле Керзмана-Стейна интеграла Коши-Сеге, т. е.

$$K_{sh}[f] = \text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta).$$

Будем считать, что функция $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$ для $0<\alpha\leqslant 1$, если для точек $\zeta,z\in S$ выполняется неравенство

$$|f(\zeta)-f(z)|\leqslant C\ |1-\langle\overline{\zeta},z\rangle|^{\alpha}.$$

Теорема 4.2. *Пусть $n>1$. Если функция $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$, $0<\alpha\leqslant 1$, то интеграл $K^{+}[f]$ непрерывно продолжается на $\overline{B}$, $K^{+}[f]\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$ и справедливо равенство*

$$K^{+}[f] = \frac{f(z)}{2} + \text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta),\quad z\in S.$$

Лемму 4.1 и теорему 4.2 можно найти в [6, 7].

Ниже для точек $z\in S$ будем рассматривать главное значение интеграла в смысле Керзмана-Стейна и знак v.p.h. будем опускать.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$f(\zeta,w) = f_0(\zeta,w)\ |1-\langle\overline{\zeta},w\rangle|^{-\nu},$$

$0\leqslant\nu<n$, $f_0\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S\times S)$, *тогда*

$$\int\limits_{S_w} d\sigma(w)\int\limits_{S_\zeta} f(\zeta,w)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{S_\zeta} K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta)\int\limits_{S_w} f(\zeta,w)\ d\sigma(w),\quad z\in S.$$

Лемма 4.4. *Для точек $z^0,\zeta^0\in S$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{S_w} K(w,z^0)\ K(\zeta^0,w)\ \sigma(w) = 0,\quad z^0\neq\zeta^0.$$

Теорема 4.5. *Пусть $f\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S\times S)$, тогда*

$$\int\limits_{S_w} K(w,z)\ \sigma(w)\int\limits_{S_\zeta} f(\zeta,w)\ K(\zeta,w)\ \sigma(\zeta) =$$

$$= \int\limits_{S_\zeta}\sigma(\zeta)\int\limits_{S_w} f(\zeta,w)\ K(w,z)\ K(\zeta,w)\ \sigma(w) +$$

$$+\frac{1}{4}\ f(z,z),\ z\in S.$$

Из теоремы 4.5 и леммы 4.4 получается следствие, называемое формулой композиции.

Следствие 4.6. *Пусть $n>1$. Если $f(\zeta,w) = f(\zeta)\in\mathcal{C}^{\alpha}_{KS}(S)$, то*

$$K^2_{sh}[f] = \frac{1}{4}\ f(z),\quad z\in S,$$

где

$$K_{sh}[f] = \text{v.p.h.}\int\limits_S f(\zeta)\ K(\zeta,z)\ \sigma(\zeta).$$

Как и следствие 3.6, следствие 4.4 является одной из формул композиции для особого интеграла Коши-Сеге при $n>1$.

Литература

[1] Привалов, И. И. *Введение в теорию функций комплексного переменного* / И. И. Привалов. – М.: Наука, 1984. – 432 с.

[2] Шабат, Б. В. *Введение в комплексный анализ. Ч.1* / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1985. – 336 с.

[3] Гахов, Ф. Д. *Краевые задачи* / Ф. Д. Гахов. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

[4] Рудин, У. *Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$* / У. Рудин. – М.: Мир, 1984. – 456 с.

[5] Кытманов, А. М. *О главном значении по Коши особого интеграла Хенкина – Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях пространства $\mathbb{C}^n$* / А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 3, № 46. – С. 625 – 633.

[6] Alt, W. *Singuläre integrale mit gemischten homogenitäten auf mannigrfaltigkeiten und anwendungen in der funktionentheorie* / W. Alt // Math. Zeit. – 1974. – Vol. 137, no. 3. – P. 227 – 256.

[7] Kerzman, N. *The Szegö kernel in terms of Cauchy–Fantappié kernels* / N. Kerzman, E. M. Stein // Duke Math. J. – 1978. – Vol. 45, no. 3. – P. 197 – 224.