

несущественным. Отсюда характер ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным. По теореме [2, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и по утверждению 1) имеем $\omega_1 = c\omega_2$, $c \neq 0$ на F . Теорема 4.3 доказана.

Литература

[1] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differentials* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[2] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – New-York: Springer, 1992. – Vol. 71.

[3] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин – М.: МГУ, 1986.

[4] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[5] Альфорс, Л. В. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.: ИЛ, 1961.

[6] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties* / C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

УДК 517.55

О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА-БАРНСА НА ГРАНИЦЕ ЕГО ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Т. В. Зыкова

ON THE CONVERGENCE OF MELLIN-BARNES INTEGRAL ON THE BOUNDARY OF ITS DOMAIN OF CONVERGENCE

T. V. Zyкова

В работе исследуется множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения.

In the present paper we give the description of the set of convergence for Mellin-Barnes integral representing solution to the general algebraic equation.

Ключевые слова: интеграл Меллина-Барнса, общее алгебраическое уравнение.

Keywords: Mellin-Barnes integral, general algebraic equation.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-7347.2010.1).

1. История вопроса

В самом общем виде объект исследования – это многомерный интеграл Меллина-Барнса

$$\Phi_\gamma(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\prod_j \Gamma(\langle A_j, z \rangle + c_j)}{\prod_k \Gamma(\langle B_k, z \rangle + d_k)} x_1^{-z_1} \cdots x_p^{-z_p} dz, \quad (1)$$

здесь $A_j, B_k \in \mathbb{R}^p$, $c_j, d_k \in \mathbb{R}$, $dz = dz_1 \cdots dz_p$. Вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$, участвующий в определении множества интегрирования, выбран так, чтобы оно не пересекало полюсы гамма-функций Эйлера в числителе.

Области сходимости интегралов Меллина-Барнса (1) являются *секториальными*: они определяются лишь условиями на аргументы параметров $x_1, \dots, x_p$, причем, если область сходимости непустая, то преобразование Меллина интеграла (1) равно его подынтегральному выражению, деленному на $(2\pi i)^p$ (см. [1]). Секториальные области рассматриваются в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^p$,

которое представляет собой область наложения над комплексным алгебраическим тором $\mathbb{T}^p = (\mathbb{C} \setminus \{0\})^p$. Далее обозначим через $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$ вектор $(\arg x_1, \dots, \arg x_p)$. Тогда каждая точка $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ ($r \in \mathbb{R}_+^p, \theta \in \mathbb{R}^p$) проектируется в точку $(r_1 e^{i\theta_1}, \dots, r_p e^{i\theta_p}) \in \mathbb{T}^p$. На $\mathbb{T}^p$ обращение этой проекции может быть многозначным.

Интегралы Меллина-Барнса явились четвертым подходом к изучению гипергеометрических функций: первые два реализованы Гауссом как решения гипергеометрических дифференциальных уравнений и как суммы гипергеометрических рядов. Третий подход основан на интегральном представлении Эйлера, обобщающем бета-функцию (см. [2]).

Проблема сходимости данных интегралов привлекала внимание ряда специалистов на протяжении последнего столетия. Шаги к ее решению в многомерном случае были сделаны Х. Меллином [3], Р. Бушманом и Х. Сриваставой [4], А. К. Цихом и др. ([5]). Часть (максимальной) области сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравне-

ния, первоначально была указана Х. Меллином (см. [3]). В работе И. А. Антиповой [1] найдена истинная (максимальная) область сходимости таких интегралов. Область сходимости многомерно-го интеграла Меллина-Барнса (1) в самом общем случае описана в работе Л. Нильсон, М. Пассаре, А. К. Циха [6]. Тем не менее оставался открытым вопрос о структуре множества сходимости алгебраических интегралов Меллина-Барнса. В работе [7] детально описано множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение тетраномимального алгебраического уравнения. В настоящей работе исследуется множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения (Теорема 1 и Теорема 2).

2. Множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения

Рассмотрим интеграл гипергеометрического типа:

$$\frac{1}{(2\pi i)^p} \int_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\mu}{n} \frac{\Gamma(z_1) \dots \Gamma(z_p) \Gamma(\frac{\mu}{n} - \frac{1}{n} \langle \alpha, z \rangle)}{\Gamma(\frac{\mu}{n} + \frac{1}{n} \langle \beta, z \rangle + 1)} x_1^{-z_1} \dots x_p^{-z_p} dz, \quad (2)$$

где $\alpha = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$, $\beta = (n - n_1, \dots, n - n_p) \in \mathbb{N}^p$, $n > n_p > \dots > n_1 \geq 1$, $\mu > 0$. Интегрирование в (2) ведется по мнимому (вертикальному) подпространству $\gamma + i\mathbb{R}^p$, вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$ фиксирован и выбирается из симплекса

$$U = \{u \in \mathbb{R}_+^p : \langle \alpha, u \rangle < \mu\}. \quad (3)$$

Из работ [1], [3] известно, что интеграл (2) представляет μ -ю степень ветви решения $y(x)$ ($y(0) = 1$) общего алгебраического уравнения

$$y^n + x_p y^{n_p} + \dots + x_1 y^{n_1} - 1 = 0 \quad (4)$$

с комплексными коэффициентами x_i , $i \in J := \{1, \dots, p\}$. Введем в $\mathbb{R}^p$ два семейства целочисленных векторов:

$$\mathcal{L}_1 = \{\varphi_l = n e_l, l \in J\},$$

$$\mathcal{L}_2 = \{\varphi_{kj} = -n_j e_k + n_k e_j, k < j, k, j \in J\},$$

здесь $e_1, \dots, e_p$ – базисные векторы в $\mathbb{R}^p$. В работе [1] доказано, что интеграл (2), зависящий от параметра $x = (x_1, \dots, x_p)$, сходится в секториальной области S , основание которой в пространстве аргументов $\theta_1 = \arg x_1, \dots, \theta_p = \arg x_p$ есть внутренность выпуклого многогранника

$$P = \{\theta \in \mathbb{R}^p : |\langle \varphi_l, \theta \rangle| \leq \pi n_l, |\langle \varphi_{kj}, \theta \rangle| \leq \pi n_k\}, \quad (5)$$

где $l, k, j \in J$, $k < j$. Иначе говоря, $S = \{x \in \mathbb{C}^p : \theta \in P^\circ\} = \text{Arg}^{-1}(P^\circ)$, где отображение

$$\text{Arg} : \mathbb{T}^p \rightarrow \mathbb{R}^p : (x_1, \dots, x_p) \rightarrow (\arg x_1, \dots, \arg x_p).$$

В работе исследуется сходимость интеграла (2) в случае, когда $(\arg x_1, \dots, \arg x_p)$ принадлежит границе многогранника P . Если в уравнении (4) показатели удовлетворяют условию $n < 2n_2$, то среди неравенств, определяющих многогранник P , нет лишних. В этом случае он имеет $p^2 + p$ гиперграней (граней максимальной размерности), которые задаются пересечением соответствующих гиперплоскостей с самим многогранником P :

$$\begin{aligned} \Gamma_l^\pm &= \{\theta \in P : \langle \varphi_l, \theta \rangle = \pm \pi n_l\}, \quad l \in J, \\ \Gamma_{kj}^\pm &= \{\theta \in P : \langle \varphi_{kj}, \theta \rangle = \pm \pi n_k\}, \quad k < j, \quad k, j \in J. \end{aligned} \quad (6)$$

Справедлива

Теорема 1. *Прообразы точек θ (при отображении Arg) из относительной внутренней гиперграней (6) многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (2).*

Если $n \geq 2n_2$, то среди неравенств (5) появляются лишние, следовательно, количество гиперграней многогранника P уменьшается. Далее рассмотрим крайнюю ситуацию, когда $n > 2n_p$. В этом случае многогранник P есть p -мерный параллелепипед. Зафиксируем поднаборы $J_s = \{j_1, \dots, j_s\} \subset J$, $J_t = \{j_1, \dots, j_t\} \subset J$, $J_s \cap J_t = \emptyset$. При $s = 0$ считаем $J_s = \emptyset$, при $t = 0$ считаем $J_t = \emptyset$. Рассмотрим грань параллелепипеда размерности $s + t$

$$\begin{aligned} \Gamma(J_s, J_t) &= \\ &= \{\theta \in P : \langle \varphi_l, \theta \rangle = \pi n_l, l \in J_s, \langle \varphi_j, \theta \rangle = -\pi n_j, j \in J_t\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Заметим, что $\Gamma(J_0, J_0) = \Gamma(\emptyset, \emptyset) = P$. При $p \geq 3$ имеет место

Теорема 2. *Прообразы точек θ (при отображении Arg) из относительной внутренней грани $\Gamma(J_s, J_t)$ многогранника P принадлежат множеству сходимости интеграла (2), если $(s, t) \in \{0, 1, 2\}^2$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Случай $p = 2$ полностью исследован в работе [7].

3. Идея доказательства

Введем несколько обозначений:

$$u_j = \text{Re } z_j, \quad v_j = \text{Im } z_j, \quad j \in J.$$

Используя оценку для гамма-функции, вытекающую из формулы Стирлинга, заменим подынтегральную функцию в (2) на функцию вида:

$$\frac{\prod_{j \in J} (|v_j| + 1)^{u_j - \frac{1}{2}} \left(\left| \frac{1}{n} \langle \alpha, v \rangle \right| + 1 \right)^{-\frac{1}{n} \langle \alpha, u \rangle + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{n} |\langle \beta, v \rangle| + 1 \right)^{\frac{1}{n} \langle \beta, u \rangle + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}}} \times$$

$$\times \exp \left\{ \langle v, \theta \rangle - \frac{\pi}{2} \left(\sum_{j \in J} |v_j| + \frac{1}{n} |\langle \alpha, v \rangle| - \frac{1}{n} |\langle \beta, v \rangle| \right) \right\}, \quad (8)$$

имеющую тот же порядок роста при $v \rightarrow \infty$. Исследуем интеграл от функции (8) по пространству $\mathbb{R}_v^p$.

Приведем доказательство для точек гиперграней Γ_ν^+ многогранника P ($\nu \in J$). Для других точек многогранника P , упомянутых в теоремах 1, 2, идея доказательства та же самая.

Зафиксируем точку θ на грани Γ_ν^+ многогранника P ($\nu \in J$), тогда аргумент экспоненциального множителя в (8) примет вид:

$$\frac{\pi n_\nu}{n} v_\nu + \langle \theta[\nu], v[\nu] \rangle - \frac{\pi}{2} \left(\sum_{j=1}^p |v_j| + \frac{1}{n} |\langle \alpha, v \rangle| - \frac{1}{n} |\langle \beta, v \rangle| \right), \quad (9)$$

здесь $v[\nu] = (v_1, \dots, [v_\nu], \dots, v_p) \in \mathbb{R}^{p-1}$, $\theta[\nu] = (\theta_1, \dots, [\theta_\nu], \dots, \theta_p)$. Заметим, что при любом $v \in \mathbb{R}^p$ величина (9) неположительна. В том случае, когда (9) есть величина отрицательная, экспоненциальный множитель в (8) убывает при $v \rightarrow \infty$ и степенной множитель не может повлиять на сходимость интеграла (2). Найдем направления $v \in \mathbb{R}^p$, для которых (9) обращается в нуль. Нетрудно видеть, что это произойдет в одномерном конусе

$$\sigma_\nu^+ = \{re_\nu \in \mathbb{R}^p, r \geq 0\}.$$

Заметим, что конус σ_ν^+ принадлежат двойственному вееру P^* (его также называют двойственным коническим полиэдром (см. [8])), который представляет собой разбиение $\mathbb{R}^p$ на полиэдральные конусы, соприкасающиеся по граням. Луч σ_ν^+ является одномерной гранью ортанта $\mathbb{R}_\geq^p$. Поэтому, сузив функцию (8) по переменной v на множество $\mathbb{R}_\geq^p$, получим интеграл:

$$\int_{\mathbb{R}_\geq^p} \frac{\prod_{j \in J} (v_j + 1)^{u_j - \frac{1}{2}} \left(\frac{1}{n} \langle \alpha, v \rangle + 1 \right)^{-\frac{1}{n} \langle \alpha, u \rangle + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{n} \langle \beta, v \rangle + 1 \right)^{\frac{1}{n} \langle \beta, u \rangle + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}}} \times \exp \left\{ \left\langle \theta[\nu] - \frac{\pi}{n} \alpha[\nu], v[\nu] \right\rangle \right\} dv, \quad (10)$$

где $\alpha[\nu] = (n_1, \dots, [n_\nu], \dots, n_p)$, $u \in U$.

Лемма 1. *Интеграл (10) сходится.*

Доказательство. Введем обозначения:

$$K_j = v_j + 1, j \in J,$$

$$L(v) = \frac{1}{n} \langle \alpha, v \rangle + 1, \quad M(v) = \frac{1}{n} \langle \beta, v \rangle + 1,$$

$$\xi = (\xi_j)_{j \in J} = \left(u_j - \frac{1}{2} \right)_{j \in J},$$

$$\delta = -\frac{1}{n} \langle \alpha, u \rangle + \frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}, \quad \varkappa = \frac{1}{n} \langle \beta, u \rangle + \frac{\mu}{n} + \frac{1}{2}.$$

Интеграл (10) можно представить в виде повторного:

$$\int_{\mathbb{R}_\geq^{p-1}} I(v[\nu]) \prod_{j \in J[\nu]} K_j^{\xi_j} \exp \left\{ \left\langle \theta[\nu] - \frac{\pi}{n} \alpha[\nu], v[\nu] \right\rangle \right\} dv[\nu], \quad (11)$$

где

$$I(v[\nu]) = \int_0^\infty \frac{K_\nu^{\xi_\nu} L^\delta(v)}{M^\varkappa(v)} dv_\nu, \quad (12)$$

а $J[\nu] = \{1, \dots, [\nu], \dots, p\}$. Заметим, что аргумент экспоненты в подынтегральном выражении (11) отрицательный, так как

$$\left\langle \theta[\nu] - \frac{\pi}{n} \alpha[\nu], v[\nu] \right\rangle = \frac{1}{n} \sum_{j \in J[\nu]} (\langle \varphi_j, \theta \rangle - \pi n_j) v_j, \quad (13)$$

где $v_j > 0$, а $\langle \varphi_j, \theta \rangle - \pi n_j < 0$ в силу (5).

Исследуем сходимость интеграла (12). Степень подынтегральной функции в (12) равна

$$\xi_\nu + \delta - \varkappa = -\frac{3}{2} - \sum_{j \in J[\nu]} u_j < -1, \quad (14)$$

при условии $\sum_{j \in J[\nu]} u_j > -\frac{1}{2}$. Последнее неравенство

выполняется в силу (3). Неравенство (14), в свою очередь, гарантирует сходимость интеграла (12).

Покажем, что $I(v[\nu])$ может иметь не более, чем степенной рост по переменным $v_1, \dots, [v_\nu], \dots, v_p$. Откуда, ввиду наличия в интеграле (11) экспоненциального множителя с отрицательным аргументом (13), будет следовать сходимость этого интеграла, а следовательно и интеграла (10). Домножим числитель и знаменатель в подынтегральном выражении (12) на произведение функций

$$L^{\delta'}(v) \cdot K_\nu^{\xi'_\nu}, \quad \delta' \geq 0, \xi'_\nu \geq 0$$

так, чтобы в полученном выражении показатели $\delta + \delta'$, $\xi_\nu + \xi'_\nu$ были целыми и положительными. Ввиду неотрицательности δ' и $\varkappa$ справедлива оценка:

$$\frac{K_\nu^{\xi_\nu + \xi'_\nu} L^{\delta + \delta'}(v)}{K_\nu^{\xi'_\nu} M^\varkappa(v) L^{\delta'}(v)} \leq \frac{K_\nu^{\xi_\nu + \xi'_\nu} L^{\delta + \delta'}(v)}{K_\nu^{\xi'_\nu} \left(\frac{n - n_\nu}{n} v_\nu + 1 \right)^\varkappa \left(\frac{n_\nu}{n} v_\nu + 1 \right)^{\delta'}}. \quad (15)$$

Числитель в (15) есть полином по переменной v_ν с полиномиальными коэффициентами, зависящими от остальных переменных $v[\nu]$. Если правую часть (15) представить в виде суммы дробей, разделив почленно на знаменатель, то степени по v_ν (т.е. разность степеней числителя и знаменателя) каждой дроби будут:

$$\xi_\nu + \delta - \varkappa = -\frac{3}{2} - \sum_{j \in J[\nu]} u_j < -1.$$

Следовательно, при интегрировании в (12) каждое слагаемое будет сходящимся интегралом по переменной v_ν . Получается, что $|I(v[\nu])| \leq R(v[\nu])$, где $R(v[\nu])$ – некоторый полином. Лемма 1 доказана.

Таким образом, в силу Леммы 1 интеграл (2) сходится в прообразах внутренних точек гипергранни Γ_ν^+ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для грани коразмерности t (см. Теорему 2) аналог соотношения (14) имеет вид

$$\sum_{j \in J_t} \xi_j + \delta - \varkappa = -\frac{t+2}{2} - \sum_{j \in J \setminus J_t} u_j < -t,$$

из которого естественно вытекает условие на коразмерность грани $t \leq 2$.

4. Примеры

Множество сходимости интеграла, представляющего решение алгебраического уравнения с двумя

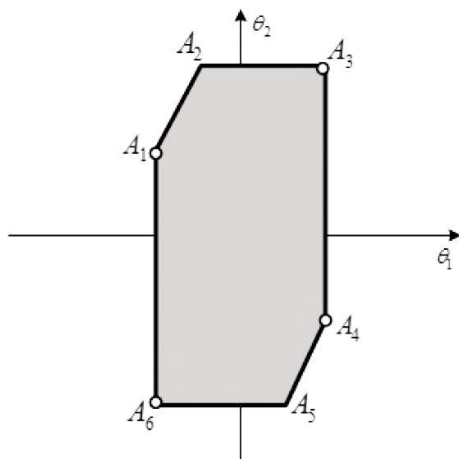


Рис. 1. $P : p = 2, n < 2n_2$

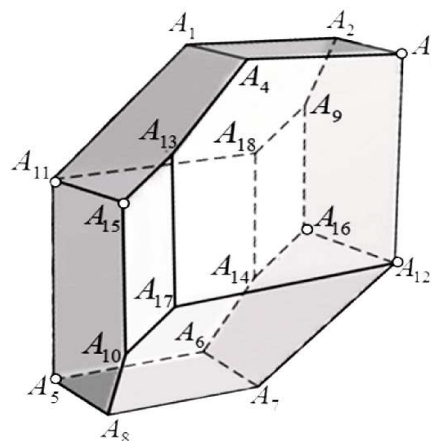


Рис. 2. $P : p = 3, n < 2n_2$

Литература

- [1] Антипова, И. А. *Обращения многомерных преобразований Меллина и решения алгебраических уравнений* // И. А. Антипова // Матем. сб. – 2007. – Vol. 198, no. 4. – P. 3 – 20.
- [2] Gelfand, I. M. *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions* / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky // Adv. in Math. – 1990. – Vol. 84, no. 2. – P. 255 – 271.
- [3] Mellin, H. R. *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* / H. R. Mellin // C. R. Acad. Sci., Paris Sér. I Math. – 1921. – Vol. 172. – P. 658 – 661.
- [4] Buschman, R. *Convergence regions for some multiple Mellin-Barnes contour integrals representing generalized hypergeometric functions* / R. Buschman, H. Srivastava // Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. – 1986. – Vol. 17, no. 5. – P. 605 – 609.

мя параметрами ($p = 2$), полностью исследовано в работе [7]. Многогранник P для этого случая (при $n < 2n_2$) изображен на Рис. 1. Прообразы всех точек границы шестиугольника P , за исключением вершин $A_1(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi(1 - \frac{n_2}{n}))$, $A_3(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n})$, $A_4(\frac{\pi n_1}{n}, \pi(\frac{n_2}{n} - 1))$, $A_6(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n})$, принадлежат множеству сходимости интеграла (2).

Для интеграла с тремя параметрами многогранник P (при $n < 2n_2$) представляет собой двенадцатигранник с восемнадцатью вершинами (см. Рис.2). Интеграл сходится в прообразах всех граничных точек многогранника P за исключением вершин:

$$\begin{aligned} &A_3\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}, \frac{\pi n_3}{n}\right), A_5\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}, -\frac{\pi n_3}{n}\right), \\ &A_{11}\left(-\frac{\pi n_1}{n}, -\frac{\pi n_2}{n}, \pi\left(1 - \frac{n_3}{n}\right)\right), \\ &A_{12}\left(\frac{\pi n_1}{n}, \frac{\pi n_2}{n}, \pi\left(\frac{n_3}{n} - 1\right)\right), \\ &A_{15}\left(-\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(1 - \frac{n_2}{n}\right), \pi\left(1 - \frac{n_3}{n}\right)\right), \\ &A_{16}\left(\frac{\pi n_1}{n}, \pi\left(\frac{n_2}{n} - 1\right), \pi\left(\frac{n_3}{n} - 1\right)\right). \end{aligned}$$

- [5] Жданов, О. Н. *Исследование кратных интегралов Меллина-Барнса с помощью многомерных вычетов* / О. Н. Жданов, А. К. Цих // Сиб. матем. журн. – 1998. – Vol. 39, no. 2. – P. 281 – 298.

- [6] Nillson, L. *Domains of convergence for A-hypergeometric series and integrals* / L. Nillson, M. Passare, A. Tsikh // в печати

- [7] Антипова, И. А. *О множестве сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решения тетраномального алгебраического уравнения* / И. А. Антипова, Т. В. Зыкова // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2010. – Vol. 3, no. 4. – P. 475 – 486.

- [8] Хованский, А. Г. *Многогранники Ньютона (разрешение особенностей), Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления)* / А. Г. Хованский. – М.: ВИНТИ, 1985. – no. 22. – P. 207 – 239.