КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ

УДК 515.17 + 517.545

ДИВИЗОРЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. И. Головина

DIVISORS THE PRYM DIFFERENTIALS ON RIEMANN SURFACE

M. I. Golovina

Теория мультипликативных функций и дифференциалов Прима на компактной римановой поверхности нашла многочисленные приложения в теории функций, аналитической теории чисел и в уравнениях математической физики [1-4]. Цель работы — получить новые свойства мероморфных дифференциалов Прима и абелевых дифференциалов на переменной компактной римановой поверхности и для переменных характеров, в связи с дивизорами.

The theory of multiplicative functions and Prym differentials on a compact Riemann surface has found numerous applications in function theory, analytic number theory and equations of mathematical physics [1-4]. The work purpose — to receive new properties of meromorphic Prym differentials and abelians differentials on variable compact Riemann surfaces and variable character, in connection with divisors.

Ключевые слова: дифференциал Прима, дивизоры, абелевы дифференциалы, переменная риманова поверхность, переменные характеры, мероморфные дифференциалы.

Keywords: Prym differential, divisors, abelians differentials, variable Riemann surfaces, variable characters, meromorphic differentials.

Работа поддержана грантами: АВЦП, 2.1.1.3707; ФЦП, №-02.740.11.0457; РФФИ 11 - 01 - 90709.

1. Предварительные сведения

Пусть F — фиксированная гладкая компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 — риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F. По теореме униформизации существует конечно порожденная фуксова группа Γ первого рода, инвариантно действующая на единичном круге

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\},$$

такая, что U/Γ конформно эквивалентна F_0, Γ изоморфна $\pi_1(F)$, и эта группа имеет представление $\Gamma = \langle A_1, ..., A_g, B_1, ..., B_g : \prod_{j=1}^{g} C_j = I\rangle$, где $C_j = [A_j, B_j] = A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}, j = 1, ..., g$, а I — тождественное отображение [5].

Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, где $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Ясно, что $\mu = 0$ соответствует F_0. Пусть $M(F)$ — множество всех комплексно-аналитических структур на F с топологией C^∞ сходимости на F_0, $Diff_0(F)$ — группа сохраняющих ориентацию гладких диффеоморфизмов поверхности F на себя, состоящая из всех диффеоморфизмов гомотопных тождественному диффеоморфизму на F_0. Группа $Diff_0(F)$ действует на $M(F)$ по правилу $\mu \to f^*\mu$, где $f \in Diff_0(F), \mu \in M(F)$. Тогда пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F) = \mathbb{T}_g(F_0)$ есть фактор-пространство $M(F)/Diff_0(F)$ [5].

Так как отображение $U \to F_0 = U/\Gamma$ локальный диффеоморфизм, то любой дифференциал Бельтрами μ на F_0 поднимается до $\Gamma-$дифференциала Бельтрами μ на U, т. е. $\mu \in L_\infty(U), \|\mu\|_\infty = esssup_{z\in U}|\mu(z)| < 1$, и $\mu(T(z))\overline{T'(z)}/T'(z) = \mu(z), z \in U, T \in \Gamma$.

Если $\Gamma-$дифференциал μ на U продолжить на $\overline{\mathbb{C}}\backslash U$, положив $\mu = 0$, то существует единственный квазиконформный гомеоморфизм $w^\mu : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ с неподвижными точками $+1, -1, i$, который является решением уравнения Бельтрами $w_{\overline{z}} = \mu(z)w_z$. Отображение $T \to T^\mu = w^\mu T (w^\mu)^{-1}$ задает изоморфизм группы Γ на квазифуксову группу

$$\Gamma_\mu = w^\mu \Gamma (w^\mu)^{-1} = \langle A_1^\mu, ..., B_g^\mu : \prod_{j=1}^{g} [A_j^\mu, B_j^\mu] = I\rangle.$$

Классический результат Л. Альфорса, Л. Берса [5] утверждает, что пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_g(F)$ является комплексно аналитическим многообразием размерности $3g-3$ при $g \geq 2$. В работе Л. Берса [5, с. 99] построен канонический базис голоморфных дифференциалов

$$\zeta_1 = \zeta_1([\mu], \xi)d\xi, ..., \zeta_g = \zeta_g([\mu], \xi)d\xi$$

для поверхности F_μ, двойственный к каноническому гомотопическому базису $\{a_k^\mu, b_k^\mu\}_{k=1}^{g}$ на F_μ.

Указанный базис голоморфно зависит от модулей $[\mu]$ отмеченной компактной римановой поверхности F_μ. Кроме того, матрица $b-$периодов $\Omega(\mu) = (\pi_{jk}[\mu])_{j,k=1}^g$ на F_μ состоит из комплексных чисел

$$\pi_{jk}[\mu] = \int\limits_{\xi}^{B_k^\mu(\xi)} \zeta_j([\mu], w)dw, \ \xi \in w^\mu(U)$$

и голоморфно зависит от $[\mu]$.

Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм $\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Характер единственным образом задается упорядоченным набором $(\rho(a_1^\mu), \rho(b_1^\mu), ..., \rho(a_g^\mu), \rho(b_g^\mu)) \in (\mathbb{C}^*)^{2g}$. Характер называется нормированным, если все его значения лежат на окружности

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Определение 1.1. *$m-$дифференциалом Прима для ρ, относительно фуксовой группы Γ, или $(\rho, m)-$дифференциалом, называется дифференциал $\phi = \phi(z)dz^m$, такой, что*

$$\phi(Tz)(T'z)^m = \rho(T)\phi(z), z \in U, T \in \Gamma, \rho : \Gamma \to \mathbb{C}^*.$$

В частности, при $m = 0$, это мультипликативная функция для ρ относительно Γ.

Если f_0 — мультипликативная функция на F_μ для ρ без нулей и полюсов, то $\frac{df_0}{f_0} = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^g c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu])$ и

$$f_0([\mu], P) = \exp \int\limits_{P_0[\mu]}^{P} 2\pi i \sum_{j=1}^g c_j([\mu], \rho)\zeta_j([\mu]),$$

где $P_0[\mu] = f^{s[\mu]}(P_0) \in F_\mu$, $c_j([\mu], \rho) \in \mathbb{C}$, $j = 1, ..., g$, c_j зависят голоморфно от $[\mu]$ и от ρ. При этом интегрирование ведется от фиксированной точки $P_0[\mu]$ до текущей точки P на переменной поверхности F_μ, и $s[\mu]$ — сечение К. Эрла [6] над $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$. Отсюда получаем, что характер ρ для f_0 имеет вид: $\rho(a_k^\mu) = \exp 2\pi i c_k([\mu], \rho)$, $\rho(b_k^\mu) = \exp(2\pi i \sum\limits_{j=1}^g c_j([\mu], \rho)\pi_{jk}([\mu])), k = 1, ..., g$.

Будем называть такие характеры ρ *несущественными*, а f_0 (с таким характером) – *единицей*. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть *существенными* на $\pi_1(F_\mu)$. Обозначим через $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$ группу всех характеров на Γ с естественным умножением. Несущественные характеры образуют подгруппу L_g в группе $Hom(\Gamma, \mathbb{C}^*)$.

Дивизором на F_μ назовем формальное произведение $D = P_1^{n_1}...P_k^{n_k}, P_j \in F_\mu, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, ..., k$.

Теорема Римана-Роха для характеров. [2; 4]. *Пусть F — компактная риманова поверхность рода $g \geq 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера ρ верно равенство $r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D)$.*

Теорема Абеля для характеров. [2; 4]. *Пусть D — дивизор на отмеченной переменной компактной римановой поверхности $[F_\mu, \{a_1^\mu, ..., a_g^\mu, b_1^\mu, ..., b_g^\mu\}]$ рода $g \geq 1$ и ρ — характер на $\pi_1(F_\mu)$. Тогда D будет дивизором мультипликативной функции f на F_μ для характера ρ, если и только если $\deg D = 0$ и*

$$\varphi(D) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \log \rho(b_j^\mu) e^{(j)}[\mu] - \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^g \log \rho(a_j^\mu) \pi^{(j)}[\mu] (= \psi(\rho, [\mu]))$$

в $\mathbb{C}^g$ по модулю целочисленной решетки $L(F_\mu)$, порожденной столбцами $e^{(1)}[\mu], ..., e^{(g)}[\mu]$, $\pi^{(1)}[\mu], ..., \pi^{(g)}[\mu]$ матрицы $a^\mu-$периодов и $b^\mu-$периодов на F_μ, где $\varphi[\mu]$ – отображение Якоби из F_μ в многообразие Якоби $J(F_\mu) = \mathbb{C}^g / L(F_\mu)$.

Для любых фиксированных $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ и $\xi_0 \in w^\mu(U)$ определим классическое отображение Якоби $\varphi : w^\mu(U) \to \mathbb{C}^g$ по правилу:

$$\varphi_j(\xi) = \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \zeta_j([\mu], w)dw, j = 1, ..., g.$$

Тогда φ индуцирует послойное голоморфное вложение из F_μ в $J(F_\mu)$. Универсальное многообразие Якоби рода g есть расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, слой которого над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть якобиан $J(F_\mu)$ для поверхности F_μ [6].

Далее, для любого натурального числа $n > 1$ существует расслоенное пространство над $\mathbb{T}_g$, у которого слой над $[\mu] \in \mathbb{T}_g$ есть пространство всех целых дивизоров степени n на компактной римановой поверхности F_μ. Голоморфные сечения этого расслоения определяют на каждой F_μ целый дивизор D^μ степени n, который голоморфно зависит от $[\mu]$. Также существует голоморфное отображение φ_n из этого расслоения на универсальное расслоение Якоби, $n \geq 1$, ограничение которого на слои является продолжением классического отображения Якоби $\varphi : F_\mu \to J(F_\mu)$. Известно, что для $n = g$ отображение $\varphi : F_g[\mu] \backslash F_g^1[\mu] \to W_g[\mu] \backslash W_g^1[\mu]$ является аналитическим изоморфизмом, где $F_g[\mu]$ — $g-$кратное симметрическое произведение поверхности F_μ и $W_g^1[\mu] = \varphi(F_g^1[\mu])$ имеет комплексную размерность, не превышающую $g - 2$ [2; 4]. Локальные голоморфные сечения этих расслоений над окрестностью $U([\mu_0]) \subset \mathbb{T}_g$ можно получить (для любого $n \geq 1$) из локальных голоморфных сечений К. Эрла s для $\Phi : M(F) \to \mathbb{T}_g$ над $U([\mu_0])$ [6]. Отметим, что, по теореме Л. Берса [5, с. 99], отображение ψ зависит локально голоморфно от ρ и $[\mu]$.

2. Элементарные дифференциалы Прима

Для построения общей теории однозначных и мультипликативных дифференциалов большую роль играют так называемые элементарные дифференциалы [2; 4; 5] любого порядка, которые имеют минимальное количество полюсов, т. е. либо один полюс порядка ≥ 2, либо два простых полюса и голоморфно зависящие от характеров ρ и от модулей $[\mu]$ римановых поверхностей.

Теорема 2.1. *1) Для любого существенного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q \geq 1$ и несущественного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$, натурального числа $q > 1$ существует элементарный $(\rho, q)-$дифференциал $\tau_{\rho,q;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом $Q_1 = Q_1[\mu]$ на F_μ, локально голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$;*

2) Для любого несущественного характера ρ, точки $Q_1 \in F_\mu$ при $q = 1$ не существует элементарный $(\rho, 1)-$дифференциал $\tau_{\rho;Q_1}$ третьего рода с единственным простым полюсом Q_1 на F_μ.

Доказательство. 1) Если ρ — существенный характер и $q = 1$, то, по теореме Римана-Роха, для характеров имеем равенство:

$$i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = -1 + g + 1 + r_{\rho^{-1}}(Q_1),$$

$i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = g$ и $i_\rho(1) = g - 1$. Отсюда следует, что $i_\rho(\frac{1}{Q_1}) = i_\rho(1) + 1$. Поэтому существует дифференциал Прима $\tau_{\rho;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Если ρ — произвольный характер и $q > 1$, то, по теореме Римана-Роха, для $(\rho, q)-$дифференциалов [4, с. 43] имеем:

$$i_{\rho,q}(D) = (2q - 1)(g - 1) - \deg D + r((f)\frac{Z^{q-1}}{D})$$

и $i_{\rho,q}(1) = (2q - 1)(g - 1)$, где f — мультипликативная функция для ρ и Z — канонический класс для абелевых дифференциалов на F_μ. Поэтому

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1}) = i_{\rho,q}(1) + 1 + r((f)Z^{q-1}Q_1).$$

Таким образом, имеем равенство:

$$i_{\rho,q}(\frac{1}{Q_1}) = i_{\rho,q}(1) + 1,$$

так как $\deg((f)Z^{q-1}Q_1) = 0 + (q-1)(2g-2) + 1 > 0$. Следовательно, существует $(\rho, q)-$дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ для ρ на F_μ с единственным полюсом в Q_1 точно порядка один.

Построим конструктивно такие дифференциалы, локально голоморфно зависящие от ρ и $[\mu]$:

a) такой $(\rho, q)-$дифференциал Прима $\tau_{\rho,q;Q_1}$ можно задать в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f\omega_0^q$, где f — мультипликативная функция для существенного характера ρ на F_μ, $q \geq 1$ и ω_0 — любой голоморфный абелев дифференциал на F_μ. Дивизор

$$(\tau_{\rho,q;Q_1}) = \frac{R_1...R_N}{(\omega_0)^q Q_1}(\omega_0)^q,$$

где $N = q(2g - 2) + 1$ и точка Q_1 не принадлежит дивизору (ω_0). Отсюда получаем равенство:

$$\varphi(R_1...R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1}...R_N) + \psi(\rho) = a \quad (*)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$ для F_μ;

b) в случае $\rho = 1$ или ρ — несущественный характер при $q > 1$ такой дифференциал ищем в следующем виде $\tau_{\rho,q;Q_1} = f_0 f_1 \omega_0^q$, где f_1 — однозначная мероморфная функция с дивизором $(f_1) = \frac{R_1...R_N}{(\omega_0)^q Q_1}$ и f_0 — мультипликативная единица для ρ на F_μ. Здесь $\psi(\rho) = 0$ и, по теореме Абеля, имеем равенство:

$$\varphi(R_1...R_g) = -2Kq + \varphi(Q_1) - \varphi(R_{g+1}...R_N) = a. \quad (**)$$

При наших условиях в обоих случаях a) и b) верно неравенство $N - g \geq g - 1$ и $\dim W_g^1 \leq g - 2$. Шевелением дивизоров $R_{g+1}...R_N$ можно добиться, что a не принадлежит W_g^1 и уравнения $(*)$ и $(**)$, в многообразии Якоби, имеют единственные решения $R_1...R_g$.

Выбирая локально голоморфное сечение по $[\mu]$ и ρ дивизоров $R_{g+1}...R_N$ над $\mathbb{T}_g$, получим дивизор $R_1...R_g$ (как единственное решение предыдущих уравнений в $J(F_\mu)$) тоже голоморфно зависящий от ρ и $[\mu]$. Причем малым шевелением дивизоров $R_{g+1}...R_N$ можно добиться, чтобы точка Q_1 не совпадала с точками $R_1, ..., R_N$.

2) Если существует дифференциал $\tau_{\rho;Q_1}$ для несущественного характера ρ с вычетом $res_{Q_1}\tau_{\rho;Q_1} = c_{Q_1} \neq 0$ для некоторой его ветви, то $f_0^{-1}\tau_{\rho;Q_1}$ — абелев дифференциал с единственным простым полюсом в Q_1 и f_0 — мультипликативная функция для ρ на F_μ. По теореме о вычетах $f_0^{-1}(\widetilde{Q}_1)c_{Q_1} = 0$, где $\widetilde{Q}_1 \neq Q_1$. Противоречие.

Это утверждение также следует из теоремы Римана-Роха так как $i_\rho(Q_1^{-1}) = g = i_\rho(1)$ для несущественного характера ρ. Действительно,

$$0 = r_{\rho^{-1}}(Q_1) = \deg(\frac{1}{Q_1}) - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1}) =$$

$$= -1 - g + 1 + i_\rho(\frac{1}{Q_1}).$$

Теорема 2.1 доказана.

3. Однозначные мероморфные дифференциалы на переменной компактной римановой поверхности

Обозначим через $\Omega_2(F_\mu)$ пространство однозначных (абелевых) дифференциалов второго рода с конечным числом полюсов на F_μ, а через $\Omega_{2,e}(F_\mu)$ — подпространство всех точных дифференциалов второго рода на переменной поверхности F_μ.

Рассмотрим $\widetilde{E}_1 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$, векторное расслоение у которого над точкой $[\mu]$ из базы $\mathbb{T}_g$ лежит слой $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$.

Теорема 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным векторным расслоением ранга $2g$ над базой $\mathbb{T}_g$ при $g \geq 2$. При этом наборы классов смежности дифференциалов*

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1}, ..., \tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1}, \qquad (*)$$

и

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1}, ..., \tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g}, \qquad (**)$$

задают базис локально голоморфных сечений этого расслоения, где $n_1, ..., n_g$ — пробелы Вейерштрасса в $\widetilde{P}_1$ на F_μ и $r(\frac{1}{\widetilde{P}_1 ... \widetilde{P}_g}) = 1$ на F_μ.

Доказательство. Зададим отображение Φ_1 из пространства $\Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu)$ на $\mathbb{C}^{2g}$ по правилу: сопоставляем ω его базисные периоды, т. е.

$$\Phi_1 : \omega \to (\int\limits_{a_1} \omega, ..., \int\limits_{a_g} \omega, \int\limits_{b_1} \omega, ..., \int\limits_{b_g} \omega) \in \mathbb{C}^{2g}.$$

Ядро отображения Φ_1 совпадает с $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Действительно, если все указанные периоды для дифференциала ω равны нулю, то и все остальные периоды тоже равны нулю. Поэтому дифференциал ω будет точным на F_μ, а значит, принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$. Ясно также, что если дифференциал принадлежит пространству $\Omega_{2,e}(F_\mu)$, то все его периоды равны нулю. Так как отображение Φ_1 взаимнооднозначно и линейно на фактор пространстве, то $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \leq 2g$.

Докажем обратное неравенство

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) \geq 2g$$

и построим базис этого фактор пространства.

Возьмем мероморфные дифференциалы из набора $(*)$ на поверхности F_μ. Покажем, что классы смежности с такими дифференциалами будут линейно независимы над $\mathbb{C}$ на F_μ. От противного. Предположим, что существует линейная комбинация, у которой не все коэффициенты нули, равная нулевому классу, тогда верно равенство $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau^{(n_1+1)}_{\widetilde{P}_1} + ... + \widetilde{C}_g\tau^{(n_g+1)}_{\widetilde{P}_1} = df$, где df — точный дифференциал второго рода, а f – однозначная мероморфная функция на F_μ.

Выберем среди коэффициентов $\widetilde{C}_j \neq 0$ коэффициент с максимальным номером, например $j = j_0$. Тогда f будет иметь в качестве особенностей только один полюс $\widetilde{P}_1$ порядка n_{j_0}. Это противоречит выбору пробелов в точке $\widetilde{P}_1$ на F_μ. Поэтому $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_g = 0$.

Осталось равенство $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g = df$.

Теперь рассмотрим коэффициенты $C_1, ..., C_g$. Так как $\zeta_1, ..., \zeta_g$ — канонический базис, то a_j−период левой части будет равен C_j, а для правой части все периоды равны нулю. Отсюда

$$C_1 = ... = C_g = 0.$$

Таким образом, доказали линейную независимость классов смежности дифференциалов из набора $(*)$.

Рассмотрим набор $(**)$. Если существует линейная комбинация

$$C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_1} + ... + \widetilde{C}_g\tau^{(2)}_{\widetilde{P}_g} = df,$$

то все коэффициенты $\widetilde{C}_j = 0,\ j = 1, ..., g$, так как в противном случае функция f будет иметь дивизор $(f) \geq \frac{1}{\widetilde{P}_1 ... \widetilde{P}_g}$, что противоречит выбору точек $\widetilde{P}_1, ..., \widetilde{P}_g$ на F_μ. Аналогично, как для набора $(*)$, показывается, что $C_k = 0,\ k = 1, ..., g$.

Поэтому $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_2(F_\mu)/\Omega_{2,e}(F_\mu) = 2g$.

Известно, что дифференциалы $\tau^{(n_j+1)}_{\widetilde{P}_1}$ можно выбрать голоморфно зависящими от $[\mu]$ [5]. Теорема 3.1 доказана.

Следствие 3.1. *Расслоение $\widetilde{E}_1$ является голоморфным (глобально) тривиальным над пространством Тейхмюллера и существуют глобальные сечения для $\widetilde{E}_1$ над $\mathbb{T}_g$, т.е. существуют $2g$ абелевых дифференциалов первого и второго рода, которые являются глобальными функциями от $[\mu]$ на $\mathbb{T}_g$.*

Доказательство. Это следует из теоремы Грауэрта, в силу односвязности базы $\mathbb{T}_g$, о том, что над такой базой расслоение становится глобально тривиальным или комплексно аналитически эквивалентным $\mathbb{T}_g \times \mathbb{C}^{2g}$. Следствие 3.1 доказано.

Обозначим через $\Omega(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}, F_\mu)$ пространство абелевых дифференциалов с дивизорами кратными $\frac{1}{Q_1 ... Q_s}$, где $Q_1 ... Q_s$ — локально голоморфное сечение в пространстве дивизоров степени s над $\mathbb{T}_g$, где $s \geq 2$.

Пусть $\widetilde{E}_2 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1 \cdots Q_s}, F_\mu)$ — векторное расслоение над $\mathbb{T}_g$. По теореме Римана-Роха, $r(Q_1 ... Q_s) = -s - g + 1 + i(\frac{1}{Q_1 ... Q_s})$. Отсюда $i(\frac{1}{Q_1 ... Q_s}) = s + g - 1$, так как $r(Q_1 ... Q_s) = 0$.

Рассмотрим набор дифференциалов

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau_{Q_2 Q_1}, ..., \tau_{Q_s Q_1}, \qquad \mathbf{(1)}$$

которые, по теореме Берса и по классическим результатам, локально голоморфно зависят от $[\mu]$.

Этот набор линейно независим над $\mathbb{C}$. Если $C_1\zeta_1 + ... + C_g\zeta_g + \widetilde{C}_1\tau_{Q_2Q_1} + ... + \widetilde{C}_{s-1}\tau_{Q_sQ_1} = 0$ на F_μ, то $\widetilde{C}_1 = ... = \widetilde{C}_{s-1} = 0$, так как нет особенностей в правой части. Коэффициенты $C_1 = ... = C_g = 0$ в силу независимости $\zeta_1, ..., \zeta_g$ над $\mathbb{C}$ на F_μ. Таким образом, доказано предложение.

Предложение 3.1. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ ранга $g+s-1$ при $s \geq 2$ является голоморфным векторным расслоением над $\mathbb{T}_g$, а набор дифференциалов (1) дает базис локально голоморфных сечений этого расслоения.*

Следствие 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_2$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_g \times \mathbb{C}^{g+s-1}$ и существуют $g+s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_g$.*

Обозначим через $\widetilde{E}_3 = \bigcup\limits_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu)$ векторное расслоение над $\mathbb{T}_g$, $s \geq 2$, где $\Omega(1, F_\mu)$ — пространство голоморфных абелевых дифференциалов на F_μ.

По теореме Римана-Роха, $i(\frac{1}{Q_1...Q_s}) = g+s-1$ и $i(1) = g$, поэтому

$$\dim_{\mathbb{C}} \Omega(\frac{1}{Q_1...Q_s}, F_\mu)/\Omega(1, F_\mu) = s-1.$$

Докажем, что набор классов смежности дифференциалов

$$\tau_{Q_2Q_1}, ..., \tau_{Q_sQ_1} \qquad \mathbf{(2)}$$

будет линейно независим над $\mathbb{C}$ на F_μ. Если $C_1\tau_{Q_2Q_1} + ... + C_{s-1}\tau_{Q_sQ_1} = \omega$, где ω — голоморфный дифференциал, то все коэффициенты $C_1 = ... = C_{s-1} = 0$, так как особые точки правой и левой сторон различны. Таким образом, доказали предложение.

Предложение 3.2. *Векторное расслоение $\widetilde{E}_3$ будет голоморфным векторным расслоением ранга $s-1$ над $\mathbb{T}_g$ и классы смежности дифференциалов набора (2) образуют базис локально голоморфных сечений этого расслоения. Кроме того, $\widetilde{E}_3$ комплексно аналитически эквивалентно прямому произведению $\mathbb{T}_g \times \mathbb{C}^{s-1}$ и существуют $s-1$ глобальных голоморфных сечений этого расслоения над $\mathbb{T}_g$.*

4. Мультипликативные функции и единицы на переменной римановой поверхности

Пусть на F_μ рода $g \geq 2$ задана мультипликативная мероморфная функция f для любого характера ρ. Тогда дивизор $(f) = D = \frac{R_1^{\alpha_1}...R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}}$ на F_μ, где $R_j, Q_i \in F_\mu, \alpha_j \in \mathbb{N}, j = 1, ..., m, \beta_i \in \mathbb{N}, i = 1, ..., s$, и $0 = \deg D = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j$.

Рассмотрим однозначный абелев дифференциал $\omega(z)dz = \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ третьего рода на F_μ с простыми полюсами в точках $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s$ и вычетами $\alpha_1, ..., \alpha_m, -\beta_1, ..., -\beta_s$ соответственно. Тогда

$$\omega(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_jP_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_jP_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (*)$$

где $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., g$, и P_0 не принадлежит $suppD = \{R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s\}$. Отсюда

$$f(P) = \exp \int_{P_0}^{P} \omega(z)dz$$

на F_μ.

Пусть f — мультипликативная функция на F_μ рода $g \geq 2$. Предположим дополнительно, что в окрестности $U(P_j)$ функция $f(P) \sim e^{q_j(k_j)(P)}, k_j(P_j) = \infty, q_j$ — некоторые многочлены от k_j, $j = 1, ..., l$, а в точках $P_{l+1}, ..., P_n$ возможны либо полюса, либо нули порядков $r_{l+1}, ..., r_n$ соответственно. Положим $\widetilde{g}(P) = \frac{f(P)}{\chi_{P_1,...,P_l}(P)}$ на F_μ, где $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ будет $l-$точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с теми же асимптотиками в точках $P_1, ..., P_l$, как у функции f [3, с. 82]. Тогда $0 = \deg(\widetilde{g}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j - \sum\limits_{j=1}^{s} \beta_j + \sum\limits_{j=l+1}^{n} r_j$. Дифференциал $\widetilde{\omega}(z)dz = \frac{\widetilde{g}'(z)}{\widetilde{g}(z)}dz$ будет абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами $R_1, ..., R_m, Q_1, ..., Q_s, P_{l+1}, ..., P_n$, где функция $\widetilde{g}$ имеет дивизор $(\widetilde{g}) = \widetilde{D} = \frac{R_1^{\alpha_1}...R_m^{\alpha_m}}{Q_1^{\beta_1}...Q_s^{\beta_s}} P_{l+1}^{r_{l+1}}...P_n^{r_n}$, $r_j \in \mathbb{Z}$, $j = l+1, ..., n$ на F_μ, и

$$\widetilde{\omega}(z)dz = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \tau_{R_jP_0} - \sum_{j=1}^{s} \beta_j \tau_{Q_jP_0} + \sum_{j=l+1}^{n} r_j \tau_{P_jP_0} + \sum_{j=1}^{g} 2\pi i c_j \zeta_j, \qquad (**)$$

где $c_j \in \mathbb{C}, j = 1, ..., g$. Таким образом доказана

Теорема 4.1. *Мультипликативные функции f на F_μ рода $g \geq 2$ для любого характера ρ, с указанными выше условиями, имеют следующие представления :*

1) $f(P) = \exp \int\limits_{P_0}^{P} \omega(z)dz$, где $\omega(z)dz$ задана формулой (*) на F_μ;

2) $f(P) = \chi_{P_1,...,P_l}(P) \exp \int\limits_{P_0}^{P} \widetilde{\omega}(z)dz$, где $\widetilde{\omega}(z)dz$ задается формулой (**) на F_μ и $1 \leq l \leq n$, $n \geq 1$, которая имеет асимптотики вида $e^{q_j(k_j)(P)}$ в $U(P_j), j = 1, ..., l$. Здесь $\chi_{P_1,...,P_l}(P)$ — l-точечная функция Бейкера-Ахиезера на F_μ с указанной асимптотикой в точках $P_1, ..., P_l$. Эти функции локально голоморфно зависят от $[\mu]$ и ρ.

Предложение 4.1. *Если f — мультипликативная функция для несущественного характера ρ на F рода $g \geq 2$ имеет единственный полюс* *точно второго порядка в точке Q, то F — гиперэллиптическая.*

Доказательство. Если такую функцию f разделить на f_0, то получится $\frac{f}{f_0}$ — однозначная функция на F, с единственным полюсом точно порядка 2, и по классической теореме [5] получаем, что F – гиперэллиптическая риманова поверхность. Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Если ρ — несущественный характер на F рода $g \geq 2$ и в точке Q первый мультипликативный непробел Вейерштрасса равен 2, то F — гиперэллиптическая.*

Если дана функция f для любого ρ, то дивизор $D = (f)$ степени нуль, состоящий из ее нулей и полюсов с учетом кратности, определяется единственно на F. Выясним будет ли верным утверждение, что функция f для некоторого характера по заданному дивизору $D, \deg D = 0$, определяется с точностью до умножения на ненулевую константу.

По теореме 1.1.3 [4, с. 23], [2, с. 130] каждый дивизор $D \neq 1$ степени 0 на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 1$ будет дивизором единственной (с точностью до умножения на ненулевую константу) мультипликативной функции на F, принадлежащей единственному нормированному характеру.

Теорема 4.2. *Пусть D — дивизор,* $\deg D = 0$, *на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, тогда:*

1) если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $f_1 = cf_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

2) если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$, то $f_1 = f_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F и $\rho_1 = \rho_2\rho_0$;

3) если существуют две функции f_1 и f_2, $(f_1) = (f_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $f_1 = cf_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

4) Для любого несущественного характера ρ не существует функции f для ρ с дивизором $(f) = \frac{P_1}{Q_1}$, $P_1 \neq Q_1$, на F.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g = \frac{f_1}{f_2}$. Дивизор $(g) = 1$ и характер $\frac{\rho}{\rho} = 1$, поэтому $g = c \neq 0$ на F, так как g — однозначная аналитическая функция на F;

2) Также рассмотрим $g = \frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Таким образом, $f_1 = f_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0;

3) Снова рассмотрим $g = \frac{f_1}{f_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Отсюда ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным. По теореме [2, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и по утверждению 1) имеем $f_1 = cf_2$, $c \neq 0$ на F.

4) Действительно, если существует такая функция для несущественного характера ρ, то рассмотрим функцию $g = \frac{f}{f_0}$, где f_0 — мультипликативная единица для ρ. Функция g будет однозначной функцией с одним простым полюсом на F. Противоречие. Теорема 4.2 доказана.

Замечание 4.1. В частности, существует функция f с заданным дивизором $(f) = \frac{P_1}{Q_1}$ для нормированного характера $\rho \neq 1$, а значит, ρ будет существенным характером [2, с. 130].

Следствие 4.1. *Для любого фиксированного характера функция f на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$ восстанавливается по своему дивизору с точностью до умножения на ненулевую константу.*

Ясно, что $(\rho, m)-$дифференциал ω имеет единственный дивизор $D = (\omega)$ из своих нулей и полюсов, с учетом кратности, на F рода $g \geq 2$, и $\deg D = (2g-2)m$, $m \geq 1$.

Выясним, будет ли по заданному дивизору D на F рода $g \geq 2$, $\deg D = (2g-2)m$ определяться $(\rho, m)-$дифференциал ω с точностью до умножения на ненулевую константу на F.

Известно из [4, с. 23], что любой дивизор D на F рода $g \geq 2$ степени $(2g-2)m$, $g \geq 1$, $m \geq 1$ есть дивизор единственного (с точностью до умножения на ненулевую константу) $(\rho, m)-$дифференциала, принадлежащего к единственному нормированному характеру ρ.

Теорема 4.3. *Пусть D — дивизор,*

$$\deg D = (2g-2)m, \ m \geq 1,$$

на компактной римановой поверхности F рода $g \geq 2$, тогда:

1) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для одного и того же характера ρ, то $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \neq 0$ на F;

2) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для различных характеров ρ_1 и ρ_2, $\rho_1 \neq \rho_2$, то $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для несущественного характера ρ_0 на F, где $\rho_1 = \rho_2\rho_0$;

3) если существуют два дифференциала ω_1 и ω_2, $(\omega_1) = (\omega_2) = D$, для нормированных характеров ρ_1 и ρ_2, то $\rho_1 = \rho_2$ и $\omega_1 = c\omega_2$, где $c = const \neq 0$ на F.

Доказательство. 1) Рассмотрим частное $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Дивизор $(g) = 1$ и характер $\frac{\rho}{\rho} = 1$, поэтому $g = c \neq 0$ на F, так как g — однозначная аналитическая функция на F.

2) Также рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть несущественным. Таким образом, $\omega_1 = \omega_2 g$, где g — мультипликативная единица для ρ_0, и $\rho_1 = \rho_2\rho_0$.

3) Рассмотрим $g = \frac{\omega_1}{\omega_2}$. Для этой функции $(g) = 1$, а значит, ее характер $\rho_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ должен быть

несущественным. Отсюда характер ρ_0 одновременно будет несущественным и нормированным. По теореме [2, с. 130], $\rho_0 \equiv 1$. Поэтому $\rho_1 = \rho_2$ и по утверждению 1) имеем $\omega_1 = c\omega_2$, $c \neq 0$ на F. Теорема 4.3 доказана.

Литература

[1] Gunning, R. C. *On the period classes of Prym differentials* / R. C. Gunning // J. Reine Angew. Math. – 1980. – Vol. 319. – P. 153 – 171.

[2] Farkas, H. M. *Riemann surfaces* / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – New-York: Springer, 1992.–Vol. 71.

[3] Дубровин, Б. А. *Римановы поверхности и нелинейные уравнения. Ч.1* / Б. А. Дубровин – М.: МГУ, 1986.

[4] Чуешев, В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Ч.2* / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.

[5] Альфорс, Л. В. *Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения* / Л. В. Альфорс, Л. Берс. – М.: ИЛ, 1961.

[6] Earle, C. J. *Families of Riemann surfaces and Jacobi varieties*/ C. J. Earle // Annals of Mathematics. – 1978. – Vol. 107. – P. 255 – 286.

УДК 517.55

О СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛА МЕЛЛИНА-БАРНСА НА ГРАНИЦЕ ЕГО ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ

Т. В. Зыкова

ON THE CONVERGENCE OF MELLIN-BARNES INTEGRAL ON THE BOUNDARY OF ITS DOMAIN OF CONVERGENCE

T. V. Zykova

В работе исследуется множество сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравнения.

In the present paper we give the description of the set of convergence for Mellin-Barnes integral representing solution to the general algebraic equation.

Ключевые слова: интеграл Меллина-Барнса, общее алгебраическое уравнение.

Keywords: Mellin-Barnes integral, general algebraic equation.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для ведущих научных школ (НШ-7347.2010.1).

1. История вопроса

В самом общем виде объект исследования – это многомерный интеграл Меллина-Барнса

$$\Phi_\gamma(x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\prod\limits_j \Gamma\left(\langle A_j, z\rangle + c_j\right)}{\prod\limits_k \Gamma\left(\langle B_k, z\rangle + d_k\right)} x_1^{-z_1} \cdots x_p^{-z_p} dz, \tag{1}$$

здесь $A_j, B_k \in \mathbb{R}^p$, $c_j, d_k \in \mathbb{R}$, $dz = dz_1 \cdots dz_p$. Вектор $\gamma \in \mathbb{R}^p$, участвующий в определении множества интегрирования, выбран так, чтобы оно не пересекало полюсы гамма-функций Эйлера в числителе.

Области сходимости интегралов Меллина-Барнса (1) являются *секториальными*: они определяются лишь условиями на аргументы параметров $x_1, \ldots, x_p$, причем, если область сходимости непустая, то преобразование Меллина интеграла (1) равно его подынтегральному выражению, деленному на $(2\pi i)^p$ (см. [1]). Секториальные области рассматриваются в множестве $\mathfrak{S} = \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^p$, которое представляет собой область наложения над комплексным алгебраическим тором $\mathbb{T}^p = (\mathbb{C}\backslash\{0\})^p$. Далее обозначим через $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_p)$ вектор $(\arg x_1, \ldots, \arg x_p)$. Тогда каждая точка $x = (r, \theta) \in \mathfrak{S}$ $\left(r \in \mathbb{R}_+^p, \theta \in \mathbb{R}^p\right)$ проектируется в точку $\left(r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, r_p e^{i\theta_p}\right) \in \mathbb{T}^p$. На $\mathbb{T}^p$ обращение этой проекции может быть многозначным.

Интегралы Меллина-Барнса явились четвертым подходом к изучению гипергеометрических функций: первые два реализованы Гауссом как решения гипергеометрических дифференциальных уравнений и как суммы гипергеометрических рядов. Третий подход основан на интегральном представлении Эйлера, обобщающем бета-функцию (см. [2]).

Проблема сходимости данных интегралов привлекала внимание ряда специалистов на протяжении последнего столетия. Шаги к ее решению в многомерном случае были сделаны Х. Меллином [3], Р. Бушманом и Х. Сриваставой [4], А. К. Цихом и др. ([5]). Часть (максимальной) области сходимости интеграла Меллина-Барнса, представляющего решение общего алгебраического уравне-