

- Valent // Nuclear Phys. – 1996. – Vol. B 478. – P. 758 – 778.
- [11] Chern, S. S. *Pseudo-groups continus infinis*/ S. S. Chern // Colloques Internationaux du C. N. R. S., Strassbourg. – P. 119 – 136.
- [12] Chow, B. *The Ricci flow: An introduction*/ B. Chow and D. Knoff. – Mathematical Surveys and Monographs 110, American Math. Soc., 2004.
- [13] Clifton, Y.H. *The k -nullity space of curvature operator*/ Y.H. Clifton and R. Maltz // Michigan Math. J. – 1970. – Vol. 17. – P. 85 – 89.
- [14] Derdzinski, A. *Compact Ricci solitons*, Preprint.
- [15] Friedan, D. H. *Nonlinear models in $2 + \varepsilon$ dimensions* / D. H. Friedan // Ann. Physics. – 1985. – Vol. 163. – P. 318 – 419.
- [16] Geiges, H. *A brief history of contact geometry and topology*/ H. Geiges // Expo. Math. – 2001. – Vol. 19, no. 1. – P. 25 – 53.
- [17] Gray, J. W. *Some global properties of contact structures* / J. W. Gray // Ann. of Math. – 1959. – Vol. 69. – P. 421 – 450.
- [18] Hamilton, R. S. *The Ricci flow on surfaces*/ R. S. Hamilton // Mathematics and general relativity (Santa Cruz, CA, 1986), 237–262, Contemp. Math. 71, American Math. Soc., 1988.
- [19] Ivey, T. *Ricci solitons on compact 3-manifolds*/ T. Ivey // Differential Geom. Appl. – 1993. – Vol. 3. – P. 301 – 307.
- [20] Koufogiorgos, T. *Contact metric manifolds*/ T. Koufogiorgos // Ann. Global Anal. Geom. – 1993. – Vol. 11. – P. 25 – 34.
- [21] MacLane, S. *Geometrical mechanics II* / S. MacLane. – Lecture notes, University of Chicago, 1968.
- [22] Nazaikinskii, V. E. *Contact geometry and linear differential equations* / V. E. Nazaikinskii, V. E. Shatalov and B. Y. Sternin. – Walter de Gruyter, Berlin, 1992.
- [23] Okumura, M. *Some remarks on space with a certain contact structure* / M. Okumura // Tôhoku Math. J. – 1962. – Vol. 14. – P. 135 – 145.
- [24] Perelman, G. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*/ G. Perelman. – Preprint, <http://arXiv.org/abs/Math.DG/0211159>.
- [25] Sasaki, S. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I* / S. Sasaki // Tôhoku Math. J. – 1960. – Vol. (2) 12. – P. 459 – 476.
- [26] Sasaki, S. *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds II* / S. Sasaki // Tôhoku Math. J. – 1962. – Vol. (2) 14. – P. 146 – 155.
- [27] Sasaki, S., Hatakeyama, Y. *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II* / S. Sasaki, Y. Hatakeyama // Tôhoku Math. J. – 1961. – Vol. (2) 13. – P. 281 – 294.
- [28] Sharma, R. *Certain results on K -contact and (κ, μ) -contact manifolds*/ R. Sharma // J. Geom. – 2008. – Vol. 89, no. 1 – 2. – P. 138 – 147.
- [29] Sharma, R. *Sasakian 3-manifold as a Ricci Soliton represents the Heisenberg group* / R. Sharma, A. Ghosh // International Journal of Geometric Methods in Modern Physics. – 2011. – Vol. 8, no. 1. – P. 149 – 154.
- [30] Tanno, S. *The topology of contact Riemannian manifolds* / S. Tanno // Illinois J. Math. – 1968. – Vol. 12. – P. 700 – 717.
- [31] Tanno, S. *Some differential equations on Riemannian manifolds* / S. Tanno // J. Math. Soc. Japan. – 1978. – Vol. 30. – P. 509 – 531.
- [32] Tanno, S. *Ricci curvatures of contact Riemannian manifolds* / S. Tanno // Tôhoku Math. J. – 1988. – Vol. 40. – P. 441 – 448.
- [33] Tashiro, Y. *On contact structure of tangent sphere bundles* / Y. Tashiro // Tôhoku Math. J. – 1969. – Vol. 21. – P. 117 – 143.
- [34] Tripathi, M. M. and Kim, J.-S. *On the concircular curvature tensor of a (κ, μ) -manifold*/ M. M. Tripathi and J.-S. Kim // Balkan J. Geom. Appl. – 2004. – Vol. 9, no. 1. – P. 114 – 124.

УДК 515.164.13

БАНАХОВО МНОГООБРАЗИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ВПОЛНЕ ПАРАЛЛЕЛИЗУЕМОЙ СИСТЕМЫ ПФАФФА

В. Н. Черненко

BANACH MANIFOLD OF INTEGRAL CURVES OF COMPLETELY PARALLELIZABLE PFAFFIAN SYSTEM

V. N. Chernenko

В данной работе изучается множество интегральных кривых вполне параллелизуемой системы Пфаффа. Показано, что это множество является банаховым многообразием.

In this paper we study the set of integral curves completely parallelizable Pfaffian system. It is shown that this set is a Banach manifold.

Ключевые слова: система Пфаффа, интегральные кривые, банахово многообразие.

Keywords: Pfaffian system, integral curves, Banach manifold.

Пусть M – гладкое паракомпактное n -мерное C^s -многообразие без края, $s \geq 4$. Напомним, что системой Пфаффа ранга r на многообразии M называется r -мерное C^{s-1} -подрасслоение σ кокасательного расслоения T^*M . Локальным сечением системы σ на открытом подмножестве $U \subset M$ называется дифференциальная 1-форма $\omega \in \Gamma(\sigma|_U)$ класса C^{s-1} . Для всякой точки $p \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$ и r локальных сечений ω^j , $j = 1, 2, \dots, r$, системы σ на U , таких, что $\omega^j(q)$ образуют базис векторного пространства $\sigma_q = \sigma \cap T_q^*M$ для любого $q \in U$. Систему форм будем в этом случае называть локальным базисом системы Пфаффа σ на множестве U . Если для локального базиса ω^j системы σ выполняется равенство $U = M$, то этот базис называется глобальным, а сама система σ в этом случае называется вполне параллелизуемой. Будем предполагать, что на многообразии M задана вполне параллелизуемая система Пфаффа σ ранга r , снабжённая глобальным базисом ω^j , $j = 1, 2, \dots, r$.

Обозначим через $\Omega(M) = C^1([\alpha, \beta], M)$ – множество C^1 -кривых на M . Кривая $c \in \Omega(M)$ называется интегральной кривой системы σ , если $\dot{c}(t) \in \text{Ann } \sigma_{c(t)}$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$. Другими словами, кривая c является интегральной кривой системы σ , если $\omega^j|_{c(t)}(\dot{c}(t)) = 0$ для любых $j = 1, 2, \dots, r$ и $t \in [\alpha, \beta]$. Подмножество из $\Omega(M)$, состоящее из интегральных кривых системы σ на многообразии M , обозначим через $\Omega_\sigma(M)$. При данном $h = (h^1, \dots, h^r) \in C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)$ будем говорить, что кривая $c \in \Omega(M)$ имеет тип h относительно системы σ , если $\omega^j|_c(\dot{c}) = h^j$ для любого $j = 1, 2, \dots, r$. Подмножество из $\Omega(M)$, состоящее из кривых типа h относительно системы σ на многообразии M , обозначим через $\Omega_\sigma^h(M)$. Таким образом, $\Omega_\sigma(M) = \Omega_\sigma^0(M)$.

Множество $\Omega(M)$ является бесконечномерным банаховым C^{s-3} -многообразием [1], [2]. Опишем дифференцируемую структуру на нём. Сначала введём на $\Omega(M)$ C^1 -топологию Уитни [3], базу которой образуют подмножества вида $B(U) = \{c \in \Omega(M) : (j^1 c)([\alpha, \beta]) \subset U\}$, где U – произвольное открытое подмножество в пространстве $J^1([\alpha, \beta], M)$ 1-струй всевозможных кривых из $\Omega(M)$. Зададим на M риманову структуру g , которая индуцирует экспоненциальное отображение $\exp : D \rightarrow M$, где D – открытая окрестность нулевого сечения касательного расслоения TM . Обозначим через $\pi : TM \rightarrow M$ каноническую проекцию. Уменьшая в случае необходимости окрестность D , будем считать, что отображение $\pi \times \exp : D \rightarrow M \times M$ является диффеоморфизмом на свой образ [4]. Векторным полем вдоль $c \in \Omega(M)$ называется отображение $X : ([\alpha, \beta] \rightarrow TM)$, такое, что $\pi \circ X = c$. Множество C^1 -векторных полей вдоль c является векторным пространством и естественным образом отождествляется с векторным пространством $\Gamma^1(c^*TM)$ C^1 -сечений индуцирован-

ного расслоения c^*TM [3]. Риманова структура g определяет норму $|\cdot| : T_p M \rightarrow \mathbf{R}$ для каждой точки $p \in M$ и риманову ковариантную производную

$$\nabla : \Gamma^1(T[\alpha, \beta]) \times \Gamma^1(c^*TM) \longrightarrow \Gamma^0(c^*TM)$$

вдоль каждой кривой $c \in \Omega(M)$ [4]. Определим на векторном пространстве $\Gamma^1(c^*TM)$ норму

$$|X| = \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |X(t)| + \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |(\nabla_{\dot{c}} X)(t)|$$

для любого $X \in \Gamma^1(c^*TM)$. Тогда $\Gamma^1(c^*TM)$ становится банаховым пространством. Для каждой кривой $c \in \Omega(M)$ определим отображение

$$\Phi_c : \Gamma^1(c^*D) \longrightarrow \Omega(M)$$

формулой $\Phi_c(X) = \exp \circ X$. Это отображение является гомеоморфизмом на свой образ $\Phi_c(\Gamma^1(c^*D))$ и обратное отображение

$$\Phi_c^{-1} : \Phi_c(\Gamma^1(c^*D)) \longrightarrow \Gamma^1(c^*D)$$

является картой на $\Omega(M)$, центрированной в c . Все такие карты C^{s-3} -согласованы и превращают множество $\Omega(M)$ в банахово C^{s-3} -многообразие. Если $c \in \Omega(M)$, то касательное пространство $T_c \Omega(M)$ естественным образом отождествляется с пространством $\Gamma^1(c^*TM)$.

Для произвольного отображения $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$ и чисел $t \in [\alpha, \beta]$, $\tau \in [0, \varepsilon]$ обозначим через $F_\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ и $F^t : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ кривые, определенные, соответственно, формулами $F_\tau(t) = F(t, \tau)$ и $F^t(\tau) = F(t, \tau)$.

Определение 1. Вариацией кривой $c \in \Omega(M)$ называется C^1 -отображение $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$, $\varepsilon > 0$, такое, что $F_0 = c$. Вариацию F будем называть $A^{1,1}$ -вариацией, если для любой карты (U, φ) на M , такой, что $F^{-1}(U) \neq \emptyset$, частные производные

$$\frac{\partial^2(\varphi \circ F|_{F^{-1}(U)})}{\partial t \partial \tau}$$

существуют и непрерывны.

Если F является $A^{1,1}$ -вариацией, то для любого $\tau \in [0, \varepsilon]$ векторное поле $X_\tau : [\alpha, \beta] \rightarrow TM$ вдоль F_τ , определённое формулой $X_\tau(t) = \dot{F}^t(\tau)$, принадлежит классу C^1 . Каждую вариацию F кривой c можно рассматривать как путь $F^* : [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega(M)$, определённый формулой $F^*(\tau) = F_\tau$. При этом $F^*(0) = c$. Если вариация F является $A^{1,1}$ -вариацией, то путь F^* на многообразии $\Omega(M)$ является C^1 -путём [5]. Его вектор скорости $\dot{F}^*(\tau)$ с точностью до указанного выше отождествления есть векторное поле X_τ . В дальнейшем любая вариация F предполагается $A^{1,1}$ -вариацией.

Определение 2. Вариация F интегральной кривой $c \in \Omega_\sigma(M)$ системы Пфаффа σ называется интегральной вариацией, если $F_\tau \in \Omega_\sigma(M)$ для

любого $\tau \in [0, \varepsilon]$. Вариация F кривой $c \in \Omega_\sigma^h(M)$ типа h относительно системы Пфаффа σ называется вариацией типа h , если $F_\tau \in \Omega_\sigma^h(M)$ для любого $\tau \in [0, \varepsilon]$.

Определение 3. Пусть F – вариация кривой $c \in \Omega(M)$ и $X \in \Gamma^1(c^*TM)$ – векторное поле вдоль c . Будем говорить, что F является вариацией в направлении поля X , если $X_0 = X$.

Предложение 1. Пусть $c \in \Omega_\sigma^h(M)$ – кривая типа h системы Пфаффа σ и $X \in \Gamma^1(c^*TM)$ – векторное поле вдоль c . Вариация типа h кривой c в направлении поля X существует тогда и только тогда, когда поле X удовлетворяет условию

$$\frac{d}{dt}(\omega^j|_c(X)) - (d\omega^j)|_c(\dot{c}, X) = 0 \quad (1)$$

для любого $j = 1, \dots, r$.

Доказательство. Пусть $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$ – вариация типа h кривой c в направлении поля X . Возьмём произвольную точку $t \in [\alpha, \beta]$ и выберем в окрестности точки $c(t)$ карту многообразия M . Обозначим через F^i , c^i , X^i , $i = 1, 2, \dots, n$, координатные функции, соответственно, вариации F , кривой c и поля X в этой карте. Тогда по определению вариации F кривой c в направлении поля X имеем:

$$F^i(t, 0) = c^i(t), \quad \frac{\partial F^i}{\partial \tau}(t, 0) = X^i(t). \quad (2)$$

Обозначим $\omega^j = \omega_i^j(x^m)dx^i$, $m = 1, 2, \dots, n$. Тогда из определения типа вариации F следуют тождества:

$$\omega_i^j(F^m(t, \tau)) \frac{\partial F^i}{\partial t}(t, \tau) = h^j(t), \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Дифференцируя их по τ при $\tau = 0$ и учитывая (2), получаем:

$$\frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(c^m(t))X^k(t)\dot{c}^i(t) + \omega_i^j(c^m(t))\dot{X}^i(t) = 0.$$

Отсюда:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\omega^j|_{c(t)}(X(t))) - (d\omega^j)|_{c(t)}(\dot{c}(t), X(t)) = \\ & = \frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(c^m(t))\dot{c}^k(t)X^i(t) + \omega_i^j(c^m(t))\dot{X}^i(t) - \\ & - \left(\frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(c^m(t))\dot{c}^k(t)X^i(t) - \frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(c^m(t))X^k(t)\dot{c}^i(t) \right) = 0. \end{aligned}$$

Условие (1) выполнено.

Лемма. Пусть в $\mathbf{R}^n$ задана вполне параллелизуемая система Пфаффа θ ранга r , определённая глобальным базисом ν^j ,

$$\nu^j(x^m) = \nu_i^j(x^m)dx^i, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (3)$$

такая, что

$$\det \|\nu_k^j(x^m)\| \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

для любой точки $(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbf{R}^n$. Пусть $c : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – C^1 -кривая типа h относительно системы θ , $X : [a, b] \rightarrow \mathbf{TR}^n$ – векторное C^1 -поле вдоль c , $\varphi : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^n$ – C^1 -кривая в $\mathbf{R}^n$, $Y : [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{TR}^n$ – векторное C^1 -поле вдоль φ . Предположим, что выполнены условия:

$$c(a) = \varphi(0), \quad \dot{c}(a) = Y(0), \quad X(a) = \dot{\varphi}(0), \quad \dot{X}(a) = \dot{Y}(0); \quad (5)$$

$$\nu^j|_\varphi(Y) = h^j(a), \quad j = 1, 2, \dots, r; \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}(\nu^j|_c(X)) - (d\nu^j)|_c(\dot{c}, X) = 0, \quad j = 1, \dots, r. \quad (7)$$

Тогда существует вариация $F : [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^n$ типа h относительно системы θ кривой c в направлении поля X такая, что

$$F^a = \varphi, \quad \frac{dF_\tau}{dt}(a) = Y(\tau), \quad \tau \in [0, \varepsilon]. \quad (8)$$

Доказательство леммы. Обозначим через c^i , φ^i , X^i , Y^i , $i = 1, 2, \dots, n$, координатные функции, соответственно, отображений c , φ , X , Y . Определим отображение $\tilde{F} : [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow \mathbf{R}^n$ при помощи координатных функций $\tilde{F}^i$, полагая

$$\begin{aligned} \tilde{F}^i(t, \tau) = & c^i(t) + \varphi^i(\tau) + \tau(X^i(t) - X^i(a)) + \\ & + (t - a)(Y^i(\tau) - Y^i(0)) - \tau(t - a)\dot{X}^i(a) - c^i(a). \end{aligned}$$

Тогда $\tilde{F}$ является $A^{1,1}$ -вариацией кривой c . Непосредственно проверяется выполнение следующих равенств:

$$\tilde{F}^i(a, \tau) = \varphi^i(\tau), \quad \tilde{F}^i(t, 0) = c^i(t),$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial t}(a, \tau) = Y^i(\tau), \quad \frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial \tau}(t, 0) = X^i(t). \quad (9)$$

Будем искать вариацию F типа h кривой c , определённую координатными функциями

$$\begin{cases} F^k(t, \tau) = \tilde{F}^k(t, \tau) + f^k(t, \tau), & k = 1, 2, \dots, r; \\ F^l(t, \tau) = \tilde{F}^l(t, \tau), & l = r + 1, \dots, n, \end{cases} \quad (10)$$

где функции $f^k(t, \tau)$ пока неизвестны. Для их определения подставим (10) в равенства $\nu^j|_{F_\tau}(\dot{F}_\tau) = h^j$, $j = 1, 2, \dots, r$, вытекающие из определения типа вариации. В результате получим следующие уравнения:

$$\nu_k^j(\tilde{F}^k(t, \tau) + f^k(t, \tau), \tilde{F}^l(t, \tau))(\frac{\partial \tilde{F}^k}{\partial t}(t, \tau) + \frac{\partial f^k}{\partial t}(t, \tau)) +$$

$$+ \nu_m^j(\tilde{F}^k(t, \tau) + f^k(t, \tau), \tilde{F}^l(t, \tau))\frac{\partial \tilde{F}^m}{\partial t}(t, \tau) = h^j(t), \quad m = r + 1, \dots, n. \quad (11)$$

Учитывая (4), разрешим систему (11) относительно $(\partial f^k / \partial t)(t, \tau)$, получив эквивалентную систему вида

$$\frac{\partial f^k}{\partial t}(t, \tau) = G(t, \tau, f^j(t, \tau)), \quad j, k = 1, 2, \dots, r. \quad (12)$$

Легко проверяется, что из равенств (6), (7), (9) вытекают тождества:

$$G^k(a, \tau, 0) = 0, \quad G^k(t, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial G^k}{\partial \tau}(t, 0, 0) \quad (13)$$

для $k = 1, 2, \dots, r$. Будем теперь считать, что функции $f^k = f^k(t, \tau)$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений (12), зависящей от параметра τ , при начальных условиях

$$f^k(a, \tau) = 0. \quad (14)$$

Тогда функции $f^k = f^k(t, \tau)$ принадлежат классу C^1 и производные $(\partial^2 f^k / \partial t \partial \tau)(t, \tau)$ непрерывны [6]. Поэтому вариация F , определённая системой (10), является $A^{1,1}$ -вариацией. При этом, в силу (11), вариация F имеет тип h относительно системы θ . Заметим, что при $\tau = 0$, в силу (13), набор из r нулевых функций является решением системы (12), удовлетворяющим условию (14), и, в силу единственности решения [6], имеем тождества

$$f^k(t, 0) = 0. \quad (15)$$

Из этих тождеств следует, что F является вариацией пути s . Решение (15) определено на компактном множестве $[a, b]$, поэтому, уменьшая, если это необходимо, число ε , можно считать, что все решения $f^k = f^k(t, \tau)$ определены на отрезке $[a, b]$ для любого значения параметра $\tau \in [0, \varepsilon]$.

Подставляя в (12) значение $t = a$ и используя (13) и (14), убеждаемся, что

$$\frac{\partial f^k}{\partial t}(a, \tau) = 0. \quad (16)$$

Равенства (14) и (16) вместе с (9) и (10) влекут (8). Далее замечаем, что, в силу (12), функции $g^k = \partial f^k / \partial \tau$ являются решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial g^k}{\partial t}(t, \tau) = \frac{\partial G^k}{\partial \tau}(t, \tau, f^j(t, \tau)) + \frac{\partial G^k}{\partial f^m}(t, \tau, f^j(t, \tau))g^m(t, \tau), \quad (17)$$

$j, k, m = 1, 2, \dots, r$, зависящей от параметра τ с неизвестными функциями $g^k(t, \tau)$ при начальном

условии $g^k(a, \tau) = 0$. Набор из r нулевых функций является решением системы (17) при $\tau = 0$ и поэтому, в силу единственности решения, имеем $(\partial f^k / \partial \tau)(t, 0) = 0$. Отсюда и из (9) и (10) следует, что F – вариация в направлении поля X . Лемма доказана.

Окончание доказательства предложения 1.

Пусть векторное поле X вдоль кривой s удовлетворяет условию (1). Покроем компактное множество $c([\alpha, \beta]) \subset M$ конечным числом координатных областей $U_1, U_2, \dots, U_m$ карт (U_q, ψ_q) , где $\psi_q(U_q) = \mathbf{R}^n$, так, чтобы существовало разбиение $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m = \beta$ отрезка $[\alpha, \beta]$, такое, что $c([\alpha_{q-1}, \alpha_q]) \subset U_q$, $q = 1, 2, \dots, m$, и базис $\nu^j = \omega^j|_{U_q}$ системы $\sigma|_{U_q}$ удовлетворял в каждой карте (U_q, ψ_q) условию (4). В области U_1 определим кривую $\varphi : [0, \varepsilon] \rightarrow U_1$ с помощью координатных функций $\varphi^i(\tau) = c^i(\alpha_0) + \tau X^i(\alpha_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, где c^i и X^i – координатные функции, соответственно, кривой $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ и поля $X|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$. Тогда φ удовлетворяет первому и третьему из условий (5) для кривой $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ и поля $X|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$, кривая $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ имеет тип $h|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ относительно системы Пфаффа $\sigma|_{U_1}$ и выполнено условие (7). Далее определим векторное поле $Y : [0, \varepsilon] \rightarrow TU_1$ вдоль φ координатными функциями $Y^i = Y^i(\tau)$, $i = 1, \dots, n$, где $Y^l(\tau) = \dot{c}^l(\alpha_0) + \tau \dot{X}^l(\alpha_0)$, $l = r + 1, \dots, n$, а $Y^k(\tau)$ единственным образом находится из уравнений:

$$\omega_k^j(\varphi^i(\tau))Y^k(\tau) + \omega_l^j(\varphi^i(\tau))Y^l(\tau) = h^j(\alpha_0), \quad (18)$$

$j, k = 1, 2, \dots, r$, что возможно в силу (4). Поэтому поле Y удовлетворяет условию (6). Заметим, что

$$Y^l(0) = \dot{c}^l(\alpha_0), \quad \dot{Y}^l(0) = \dot{X}^l(\alpha_0). \quad (19)$$

Равенство (18) с учетом (19) и первого из равенств (5) при $\tau = 0$ превращается в равенство

$$\omega_k^j(c^i(\alpha_0))Y^k(0) + \omega_l^j(c^i(\alpha_0))\dot{c}^l(\alpha_0) = h^j(\alpha_0). \quad (20)$$

Поскольку кривая $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ имеет тип $h|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$, то

$$\omega_k^j(c^i(\alpha_0))\dot{c}^k(\alpha_0) + \omega_l^j(c^i(\alpha_0))\dot{c}^l(\alpha_0) = h^j(\alpha_0). \quad (21)$$

Из равенств (20) и (21) следует, что $Y^k(0) = \dot{c}^k(\alpha_0)$, что вместе с (19) влечёт второе из условий (5). Дифференцируя (18) по τ при $\tau = 0$ и учитывая второе и третье из условий (5) и второе из условий (19), имеем:

$$\frac{\partial \omega_{i_1}^j}{\partial x^{i_2}}(c^i(\alpha_0))X^{i_2}(\alpha_0)\dot{c}^{i_1}(\alpha_0) + \omega_k^j(c^i(\alpha_0))\dot{Y}^k(0) + \omega_l^j(c^i(\alpha_0))\dot{X}^l(\alpha_0) = 0, \quad i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n. \quad (22)$$

В свою очередь, равенство (7) в координатах при $t = \alpha_0$ имеет вид:

$$\frac{\partial \omega_{i_1}^j}{\partial x^{i_2}}(c^i(\alpha_0))X^{i_2}(\alpha_0)\dot{c}^{i_1}(\alpha_0) + \omega_k^j(c^i(\alpha_0))\dot{X}^k(\alpha_0) + \\ + \omega_l^j(c^i(\alpha_0))\dot{X}^l(\alpha_0) = 0. \quad (23)$$

Из равенств (22) и (23) в силу (4) следует равенство $\dot{Y}^k(0) = \dot{X}^k(\alpha_0)$, что вместе с (19) влечёт четвертое из условий (5). Поэтому для системы Пфаффа $\sigma|_{U_1}$ с базисом $\omega^j|_{U_1}$, кривых $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$, φ и полей $X|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$, Y выполнены все условия леммы. Применяя лемму, получаем вариацию $F_{(1)} : [\alpha_0, \alpha_1] \times [0, \varepsilon] \rightarrow U_1 \subset M$ типа $h|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ кривой $c|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$ в направлении поля $X|_{[\alpha_0, \alpha_1]}$. Далее, по индукции, предположим, что мы построили вариацию $F_{(p)} : [\alpha_0, \alpha_p] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$, $p = 1, 2, \dots, m-1$, типа $h|_{[\alpha_0, \alpha_p]}$ кривой $c|_{[\alpha_0, \alpha_p]}$ в направлении поля $X|_{[\alpha_0, \alpha_p]}$. Тогда

$$F_{(p)}(t, 0) = c|_{[\alpha_0, \alpha_p]}(t), \quad \omega^j|_{F_{(p)}(t, \tau)}\left(\frac{\partial F_{(p)}}{\partial t}(t, \tau)\right) = \\ = h^j|_{[\alpha_0, \alpha_p]}(t), \quad \frac{\partial F_{(p)}}{\partial \tau}(t, 0) = X|_{[\alpha_0, \alpha_p]}(t). \quad (24)$$

Положим

$$\varphi(\tau) = F_{(p)}(\alpha_p, \tau), \quad Y(\tau) = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial t}(\alpha_p, \tau). \quad (25)$$

Тогда из (24) и (25) вытекает, что:

$$c|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = \varphi(0), \quad \dot{c}|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = Y(0), \\ X|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = \dot{\varphi}(0), \\ \dot{X}|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}(\alpha_p) = \dot{Y}|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}(0), \\ \omega^j|_{\varphi(\tau)}(Y(\tau)) = h^j|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}(\alpha_p).$$

Поэтому для системы Пфаффа $\sigma|_{U_{p+1}}$ с базисом $\omega^j|_{U_{p+1}}$, кривых $c|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}$, φ и полей $X|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}$, Y выполнены все условия леммы. Применяя лемму, получаем вариацию $\tilde{F}_{(p+1)} : [\alpha_p, \alpha_{p+1}] \times [0, \varepsilon] \rightarrow U_{p+1} \subset M$, типа $h|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}$ кривой $c|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}$ в направлении поля $X|_{[\alpha_p, \alpha_{p+1}]}$, удовлетворяющую условию (8), которое в силу (25) превращается в тождества

$$\tilde{F}_{(p+1)}(\alpha_p, \tau) = F_{(p)}(\alpha_p, \tau), \quad (26)$$

$$\frac{\partial \tilde{F}_{(p+1)}}{\partial t}(\alpha_p, \tau) = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial t}(\alpha_p, \tau). \quad (27)$$

Из них вытекает, что

$$\frac{\partial \tilde{F}_{(p+1)}}{\partial \tau}(\alpha_p, \tau) = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial \tau}(\alpha_p, \tau), \quad (28)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}_{(p+1)}}{\partial t \partial \tau}(\alpha_p, \tau) = \frac{\partial^2 F_{(p)}}{\partial t \partial \tau}(\alpha_p, \tau). \quad (29)$$

Пользуясь равенствами (26), произведём склейку вариаций $F_{(p)}$ и $\tilde{F}_{(p+1)}$ вдоль координатной линии $t = \alpha_p$, получив непрерывное отображение

$F_{(p+1)} : [\alpha_0, \alpha_{p+1}] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$. Равенства (27), (28) гарантируют, что отображение $F_{(p+1)}$ будет класса C^1 , а равенство (29) влечёт, что $F_{(p+1)}$ будет $A^{(1,1)}$ -вариацией кривой $c|_{[\alpha_0, \alpha_{p+1}]}$ типа $h|_{[\alpha_0, \alpha_{p+1}]}$ в направлении поля $X|_{[\alpha_0, \alpha_{p+1}]}$. При $p = m-1$ получаем искомую вариацию $F = F_{(m)} : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$ типа h кривой c в направлении поля X . Предложение 1 доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие (1) неформально можно записать в виде $(L_X \omega^j)(\dot{c}) = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (1) линейно по X , поэтому для произвольной кривой $c \in \Omega(M)$ выделяет в пространстве $T_c \Omega(M) = \Gamma^1(c^* TM)$ подпространство $D_\sigma(c)$.

Предложение 2. Если $c \in \Omega_\sigma(M)$, то $\dot{c} \in D_\sigma(c)$.

Доказательство. Подставляя $\dot{c}$ в условие (1), и учитывая тождества $\omega^j|_c(\dot{c}) = 0$, $j = 1, 2, \dots, r$, вытекающие из интегральности кривой c , убеждаемся, что $\dot{c} \in D_\sigma(c)$. Предложение доказано.

Отображение $D_\sigma : c \mapsto D_\sigma(c)$ является распределением на многообразии $\Omega(M)$ [4]. C^1 -путь $\mu : I \rightarrow \Omega(M)$, где I – интервал из $\mathbf{R}$, называется интегральным путём распределения D_σ , если $\dot{\mu}(\tau) \in D_\sigma(\mu(\tau))$ для любого $\tau \in I$.

Предложение 3. Пусть $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$ – вариация кривой $c \in \Omega(M)$. Путь $F^* : [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega(M)$ является интегральным путём распределения D_σ тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\omega^j|_{F_\tau}(\dot{F}_\tau)) = 0 \quad (30)$$

для любого $j = 1, 2, \dots, r$ и любого $\tau \in [0, \varepsilon]$.

Доказательство. Интегральность пути F^* означает, что для любого $\tau \in [0, \varepsilon]$ касательный вектор $X_\tau = \partial F / \partial \tau$ пути F^* в точке τ принадлежит $D_\sigma(F_\tau)$. Это, в свою очередь, означает, что для любого $j = 1, 2, \dots, r$ должно удовлетворяться соотношение (1), то есть

$$\frac{d}{dt}(\omega^j|_{F_\tau}(X_\tau)) - (d\omega^j)|_{F_\tau}(\dot{F}_\tau, X_\tau) = 0. \quad (31)$$

Остаётся доказать эквивалентность (30) и (31). Для этого выберем в окрестности точки $F(t, \tau)$ карту многообразия M , в которой F определяется координатными функциями F^i , $i = 1, 2, \dots, n$, и $\omega^j = \omega_i^j(x^m)dx^i$, $m = 1, 2, \dots, n$. Тогда (31) в координатах после очевидных сокращений примет вид:

$$\frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(F^m(t, \tau)) \frac{\partial F^k}{\partial \tau}(t, \tau) \frac{\partial F^i}{\partial t}(t, \tau) + \\ + \omega_i^j(F^m(t, \tau)) \frac{\partial^2 F^i}{\partial t \partial \tau}(t, \tau) = 0,$$

$k = 1, 2, \dots, n$. Но точно такой же вид в координатах принимает и соотношение (30). Предложение доказано.

Определим отображение $\gamma : \Omega(M) \rightarrow C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)$ формулой

$$\gamma(c) = (\omega^1|_c(\dot{c}), \omega^2|_c(\dot{c}), \dots, \omega^r|_c(\dot{c})).$$

Предложение 4. *Отображение γ является C^{s-3} -субмерсией.*

Доказательство. Базис ω^j системы σ определяет отображение $g : TM \rightarrow \mathbf{R}^r$ класса C^{s-1} . Множество $C^0([\alpha, \beta], TM)$ является банаховым C^{s-3} -многообразием [2], поэтому отображение

$$\omega_g : C^0([\alpha, \beta], TM) \longrightarrow C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r),$$

определённое формулой $\omega_g(X) = g \circ X$, по ω -теореме принадлежит классу C^{s-3} [2]. Пусть

$$j^1 : \Omega(M) = C^1([\alpha, \beta], M) \longrightarrow C^0([\alpha, \beta], TM)$$

1-струйное расширение, являющееся C^{s-3} -вложением [2], и так как $\gamma = \omega_g \circ j^1$, то γ принадлежит классу C^{s-3} . Далее зафиксируем кривую $c \in \Omega(M)$ и вектор $Y \in T_{\gamma(c)}C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)$ и будем искать вектор $X \in T_c\Omega(M)$, такой, что

$$d\gamma|_c(X) = Y. \quad (32)$$

Для этого сначала предположим, что $c([\alpha, \beta])$ принадлежит области U некоторой карты на M . Обозначим через $c^i, X^i, Y^j, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, r$, координатные функции, соответственно, кривой c и полей X, Y . Обозначим также $\omega^j = \omega_i^j(x^m)dx^i, m = 1, 2, \dots, n$. Определим вариацию $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow U \subset M$ кривой c в направлении поля X координатными функциями

$$F^i(t, \tau) = c^i(t) + \tau X^i(t).$$

Тогда $F^*(0) = c$ и $\dot{F}^*(0) = X$. Поэтому

$$d\gamma|_c(X) = \frac{\partial(\gamma \circ F^*)}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}$$

и уравнение (32) в координатах переписывается в виде:

$$\frac{\partial \omega_i^j}{\partial x^k}(c^m(t))X^k(t)\dot{c}^i(t) + \omega_i^j(c^m(t))\dot{X}^i(t) = Y^j(t). \quad (33)$$

В силу того, что $\text{rank} \parallel \omega_i^j(x^m) \parallel = r$, это уравнение всегда имеет C^1 -решение $X^i = X^i(t), t \in [\alpha, \beta]$. В общем случае, когда компактное множество $c([\alpha, \beta])$ не покрывается одной картой, покроем его конечным числом карт и будем строить поле X вдоль кривой c последовательно в каждой из этих карт, обеспечивая его C^1 -гладкость с помощью начальных условий для системы (33). Предложение доказано.

Предложение 5. *Для любого $h \in C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)$ множество $\Omega_\sigma^h(M)$ кривых типа h относительно системы σ на многообразии M*

является банаховым C^{s-3} -многообразием, вложенным в банахово C^{s-3} -многообразие $\Omega(M)$.

Доказательство. По определению типа кривой имеем равенство $\Omega_\sigma^h(M) = \gamma^{-1}(h)$ и в силу предложения 4 множество $\Omega_\sigma^h(M)$ является вложенным подмногообразием многообразия $\Omega(M)$.

Следствие. *Семейство*

$$\{\Omega_\sigma^h(M) : h \in C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)\}$$

образует C^{s-3} -слоение на многообразии $\Omega(M)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Слоение $\{\Omega_\sigma^h(M)\}$ зависит от выбора базиса ω^j системы σ , однако его слой $\Omega_\sigma(M)$, состоящий из интегральных кривых системы σ , от этого выбора не зависит.

Предложение 6. *Для любого $h \in C^0([\alpha, \beta], \mathbf{R}^r)$ и любого пути $c \in \Omega_\sigma^h(M)$ касательное пространство $T_c\Omega_\sigma^h(M)$ совпадает с пространством $D_\sigma(c)$.*

Доказательство. Пусть $X \in T_c\Omega_\sigma^h(M)$. Тогда существует C^1 -путь $\mu : [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega_\sigma^h(M)$ такой, что $\mu(0) = c$ и $\dot{\mu}(0) = X$. Путь μ определяет вариацию $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$ формулой $F(t, \tau) = (\mu(\tau))(t)$. Эта вариация кривой c в направлении поля X имеет тип h и по предложению 1 поле X удовлетворяет условию (1), откуда $X \in D_\sigma(c)$. Обратно, пусть $X \in D_\sigma(c)$. Тогда X удовлетворяет условию (1) и по предложению 1 существует вариация $F : [\alpha, \beta] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$ типа h кривой c в направлении поля X . Эта вариация определяет путь $F^* : [0, \varepsilon] \rightarrow \Omega_\sigma^h(M)$, такой, что $F^*(0) = c$ и $\dot{F}^*(0) = X$, и поэтому $X \in T_c\Omega_\sigma^h(M)$. Предложение доказано.

Следствие. *Распределение D_σ совпадает с касательным распределением к слоению $\{\Omega_\sigma^h(M)\}$.*

Предложение 7. *Если многообразие M связано, то банахово многообразие $\Omega_\sigma(M)$ также связано.*

Доказательство. Пусть $c_1, c_2 \in \Omega_\sigma(M)$. Из связности M вытекает его линейная связность и поэтому существует кривая $c \in C^0([1, 2], M)$, такая, что $c(1) = c_1(\alpha), c(2) = c_2(\alpha)$. Для произвольной точки $x \in M$ обозначим через $c_x : [\alpha, \beta] \rightarrow M$ постоянное отображение в эту точку. Тогда $c_x \in \Omega_\sigma(M)$. Определим отображение $\hat{c}_1 : [0, 1] \rightarrow \Omega_\sigma(M)$ формулой $(\hat{c}_1(\tau))(t) = c_1(t(1-\tau) + \alpha\tau), \tau \in [0, 1], t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $\hat{c}_1$ — непрерывно [5] и

$$\hat{c}_1(0) = c_1, \quad \hat{c}_1(1) = c_{c_1(\alpha)}. \quad (34)$$

Определим отображение $\hat{c} : [1, 2] \rightarrow \Omega_\sigma(M)$ формулой $(\hat{c}(\tau))(t) = c(\tau), \tau \in [1, 2], t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $\hat{c}$ — непрерывно и

$$\hat{c}(1) = c_{c_1(\alpha)}, \quad \hat{c}(2) = c_{c_2(\alpha)}. \quad (35)$$

Определим отображение $\hat{c}_2 : [2, 3] \rightarrow \Omega_\sigma(M)$ формулой $(\hat{c}_2(\tau))(t) = c_2(t(\tau - 2) + \alpha(3 - \tau))$, $\tau \in [2, 3]$, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда $\hat{c}_2$ – непрерывно и

$$\hat{c}_2(2) = c_{c_2(\alpha)}, \quad \hat{c}_2(3) = c_2. \quad (36)$$

Отображение $\mu : [0, 3] \rightarrow \Omega_\sigma(M)$, определённое формулой

$$\mu(\tau) = \begin{cases} \hat{c}_1(\tau), & 0 \leq \tau \leq 1, \\ \hat{c}(\tau), & 1 \leq \tau \leq 2, \\ \hat{c}_2(\tau), & 2 \leq \tau \leq 3, \end{cases}$$

определено и непрерывно в силу (34)-(36) и удовлетворяет условию $\mu(0) = c_1$, $\mu(3) = c_2$. Таким образом, многообразие $\Omega_\sigma(M)$ линейно связно и поэтому связно. Предложение доказано.

Литература

[1] Eliasson, H. I. *Geometry of Manifolds of Maps*

/ Н. I. Eliasson // J. Differential Geometry. – 1967. – no. 1. – P. 169 – 194.

[2] Ленг, С. *Введение в теорию дифференцируемых многообразий* / С. Ленг – М.: Мир, 1967. – 204 с.

[3] Голубицкий, М. *Устойчивые отображения и их особенности* / М. Голубицкий, В. Гийемин – М.: Мир, 1977. – 292 с.

[4] Громол, Д. *Риманова геометрия в целом* / Д. Громол, В. Клингенберг, В. Мейер. – М.: Мир, 1971. – 344 с.

[5] Бурбаки, Н. *Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов* / Н. Бурбаки. – М.: Мир, 1975 – 222 с.

[6] Понтрягин, Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* / Л. С. Понтрягин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 312 с.