// [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:math/0209259v1 [math.DG], свободный.

[7] Goze, M. *Symplectic or contact structures on Lie groups* / M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina // Differential Geom. Appl. – 2004. – Vol. 21, no. 1. – P. 41 – 54.

[8] Корнев, Е. С. *Почти комплексные структуры и метрики на группах Ли размерности 4* / Е. С. Корнев. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. – 156 стр.

[9] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси, К. Намидзу – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.

[10] Magnin, L. *Complex structures on indecomposable 6-dimensional nilpotent real Lie algebras* / L. Magnin // Int. J. of Algebra and Computation. – 2007. – Vol. 17, no. 1. – P. 77 – 113.

[11] Ovando, G. *Complex, symplectic and Kaehler structures on four dimensional Lie groups* / G. Ovando // Rev. U.M.A. – 2004. – Vol. 45(2). – P. 55 – 68. (arXiv:math/0309146v1 [math.DG])

[12] Ovando, G. *Invariant pseudo Kaehler metrics in dimension four* / G. Ovando // J. of Lie Theory. – 2006. – Vol. 16(2). – P. 371 – 391. (arXiv:math/0410232v1 [math.DG]).

[13] Salamon, S. M. *Complex structure on nilpotent Lie algebras* /S. M. Salamon // J. Pure Appl. Algebra. – 2001. – Vol. 157. – P. 311 – 333 (arXiv:math/9808025v2 [math.DG]).

[14] Thurston, W. P. *Some simple examples of symplectic manifolds* / W. P. Thurston // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 55, no. 2. – P. 467 – 468.

[15] Tralle, A. *Symplectic manifolds with no Kähler Structure* / A. Tralle, J. Oprea // Lect. Notes. in Math. – Vol. 1661. – Berlin Heidelberg: Springer, 1997.

УДК 514.76.2

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ РИМАНА-КАРТАНА

С. Е. Степанов, И. А. Гордеева

GEOMETRY OF RIEMANN-CARTAN MANIFOLDS

S. E. Stepanov, I. A. Gordeeva

Пространство Римана-Картана – это триплет $(M, g, \overline{\nabla})$, где (M, g) – риманово n-мерное $(n \geq 2)$ многообразие с линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым тензором кручения S, такой, что $\overline{\nabla} g = 0$. Рассматриваются свойства псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях $(M, g, \overline{\nabla})$ различных классов, а также теоремы исчезновения данных векторных полей.

A Riemann-Cartan manifold is a triple $(M, g, \overline{\nabla})$, where (M, g) is a Riemannian n-dimensional $(n \geq 2)$ manifold with linear connection $\overline{\nabla}$ having nonzero torsion S such that $\overline{\nabla} g = 0$. We consider properties of pseudo-Killing and pseudo-garmonic vector fields on some classes of these manifolds and vanishes theorems as corollaries of these properties

Ключевые слова: многообразие Римана-Картана, связность с кручением, многообразие Вейтценбока, псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля.

Keywords: Riemann-Cartan manifold, linear connection, torsion, Weitzenböck manifold, pseudo-Killing and pseudo-garmonic vector fields.

1. Введение

Пространства Римана-Картана относятся к метрически-аффинным пространствам. Начало теории метрически-аффинных пространств было положено Э. Картаном в 1922 году (см. [8]), который предложил вместо связности Леви-Чивита ∇ в GRT (сокращенное от General Relativity Theory) рассматривать несимметричную линейную связность $\overline{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\overline{\nabla} g = 0$. В результате пространство-время получало в дополнение к кривизне еще и ненулевое кручение S. Впоследствии в 1924 и 1925 годах им было опубликовано еще две работы (см. [9] и [10]) в развитие своей теории, которая получила в дальнейшем название Einstein-Cartan Theory of Gravity или сокращенно ECT (см., напр., [4]; [41]). Идея Э. Картана о несимметрической метрической связности почти сразу нашла отражение в известных монографиях по дифференциальной геометрии первой половины прошлого века (см. [12]; [13]; [61]; [62] и др.).

Вплоть до начала 60-х годов предложение Э. Картана о применении несимметрической метрической связности в GRT не находила поддержки у физиков-теоретиков. Толчком к изучению ECT послужили работы Т. Кибла (см. [23]) и Д. Сциямы (см. [36]), которые независимо друг от друга установили связь между кручением S связности $\overline{\nabla}$ и спин тензором материи s (spin tensor of matter). Впоследствии были найдены и другие физические приложения ЕСТ (см., напр., [30] и [35] и др.). Так, например, установлено (см., [27]), что кручение S зависит от квантовых свойств материи, и поскольку кручение является частью метрической связности $\overline{\nabla}$, то и сама связность $\overline{\nabla}$, следовательно, зависит от квантовых свойств материи.

Впоследствии теория Эйнштейна-Картана была обобщена (см. [19]) за счет снятия требования метричности для линейной связности $\overline{\nabla}$. Новая теория получила название Metric-Affine Gauge Theory of Gravity, или сокращенно MAG (см. [21]; [41]).

Число работ, опубликованных в рамках ЕСТ и MAG исчисляется уже сотнями, причем опубликованные результаты имеют в большей степени прикладной физический характер (см. обзоры [18]; [21]; [22]; [32]). Все исходные формулы новой теории были позаимствованы физиками из работ Э. Картана вместе с его методом, который сейчас так и называется "метод внешних форм Картана"(см. [65]). Также нетрудно проследить заимствования и из монографий по дифференциальной геометрии, например, из классических монографий И. Схоутена и Д. Стройка (см. [61]; [62]; [63]), изложение в которых ведется на тензорном языке. В итоге современные теории ЕСТ и MAG излагаются на довольно причудливом языке, который соединяет в себе методы внешних форм и тензорного анализа одновременно.

В этом контексте характерна работа Мак Креа (см. [26]), где были выведены неприводимые относительно действия псевдоортогональной группы $O(q)$ разложения тензоров неметричности $Q = -\overline{\nabla}\, g$, кручения S и кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$, основные соотношения на которые были приведены еще в монографии И. Схоутена и Д. Стройка (см. [61]). Более того, идею своей статьи Мак Креа также позаимствовал из дифференциальной геометрии, где уже давно и хорошо известны неприводимые разложения тензоров кривизны R риманова и келерова многообразий, что нашло отражение уже и в монографиях (см. [20]; [24]; [49]и др.).

Другой результат Мак Креа о неприводимом разложении тензора кручения S является простым следствием более общего результата (см. [49], доклад XVI) о поточечно $O(q)$-неприводимом разложении соответствующего тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, гладким сечением которого и является S.

Воспользовавшись результатом Мак Креа, целый коллектив авторов (см. [7]), так же, как это делалось не раз в римановой геометрии, но по другим поводам (см. [48] стр. 585-620; [16]; [17]; [42] и др.), за счет последовательного попарного обращения в нуль неприводимых компонент разложения тензора кручения S выделил 4 класса пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ и провел систематизацию результатов, полученных в рамках ЕСТ для четырехмерного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$. При этом авторами был учтен тот факт, что при задании локальной ориентации многообразия оператор Ходжа $* : \Lambda^p M \to \Lambda^{n-p} M$, который на многообразии в размерности n переводит внешние p-формы во внешние $(n-p)$-формы, действует в размерности 4 на внешних 2-формах, определяя естественное разложение $\Lambda^2 M = \Lambda^2_- M \oplus \Lambda^2_+ M$ для представления группы $SO(q)$, где $\Lambda^2_\pm M$ - пространства собственных 2-форм оператора Ходжа, соответствующие собственным значениям $+1$ или -1. В итоге вместо трех неприводимых компонент разложения, которые имеются у тензора S в размерностях n не равных 4, в размерности $n = 4$ их уже четыре.

Заметим здесь, что если последовательно применять отработанную в геометрии методику классификации (см. [48] стр. 585-620; [16]; [17]; [42]; и др.), то вместо выделенных трех классов, в реальности получается 14 классов пространств $(M, g, \overline{\nabla})$.

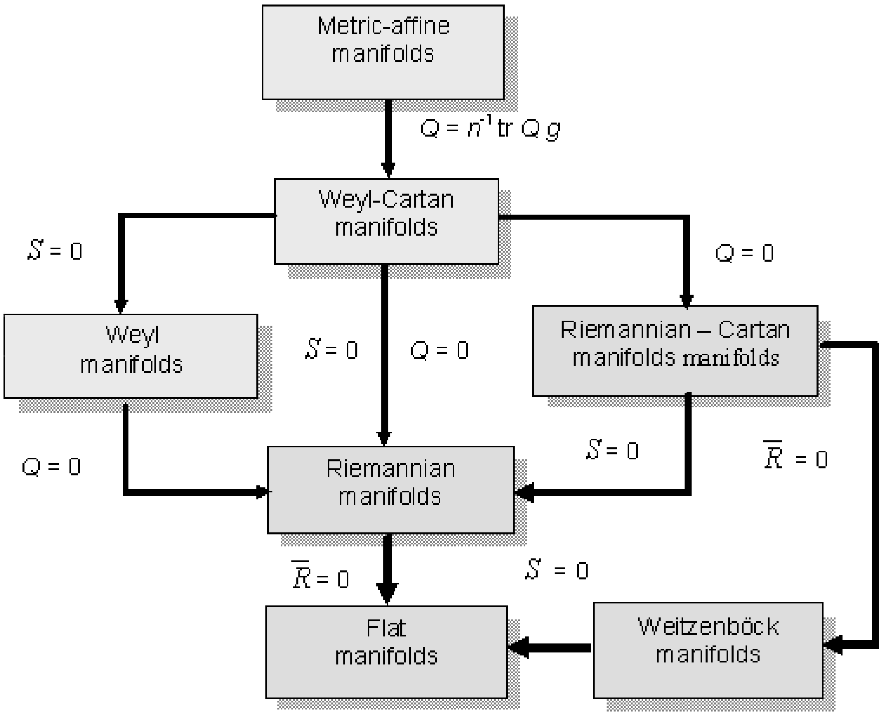
На контрасте со все увеличивающимся потоком работ физиков, геометры к настоящему времени почти потеряли интерес к теории, основы которой заложил еще в двадцатых годах прошлого века известный геометр Э. Картан. Наиболее яркими и, к сожалению, последними результатами геометрии пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ являются результаты Л. Ванхекке и Ф. Тричерри по геометрии многообразий с однородной структурой (см. [42]). В принятой современной физикой терминологии (см. [14]; [20]) эта теория относится к Riemann-Cartan Theory, сокращенно RCT. Геометрия Римана-Картана – это геометрия метрически-аффинного пространства $(M, g, \overline{\nabla})$ с (псевдо)римановой метрикой g и линейной связностью $\overline{\nabla}$ с ненулевым кручением S, такой, что $Q = 0$. Но, в отличие от общей теории метрически-аффинных пространств, Л. Ванхекке и Ф. Тричерри (см. [42]) накладывали на $(M, g, \overline{\nabla})$ дополнительные условия в виде $\overline{\nabla} R = 0$ и $\overline{\nabla} T = 0$, которые, согласно теореме Амброуза-Зингера (см. [2]), вместе с условием $\overline{\nabla} g = 0$ дают критерий однородности риманова многообразия (M, g). Доказав теорему о неприводимом относительно действия ортогональной группы разложении тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$, они, так же, как и в работах [16]; [17]; [42] и др.), перешли к классификации многообразий $(M, g, \overline{\nabla})$ с однородной структурой (см. [43]). В этой и последующих работах ими была изучена геометрия пространств из выделенных классов. Итоги исследований авторы подвели в монографии [42]. Отметим, что Л. Ванхекке и Ф. Тричерри как особый случай рассмотрели классификацию в размерности $n = 4$ (см. [44]).

Следует заметить, что результат Л. Ванхекке и Ф. Тричерри о неприводимом разложении тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ является простым следствием более общего результата (см. [49], доклад XVI) о поточечно $O(q)$-неприводимом разложении соответствующего тензорного расслоения

$\Lambda^2 M \otimes T^*M$, гладким сечением которого и является тензор T.

Как это показано автором (см. [54]), классификация Л. Ванхекке и Ф. Тричерри равносильна классификации, полученной на основе неприводимого разложения тензора кручения S, притом, что последняя не предполагает обращения в нуль тензора неметричности Q, а потому является более общей и, следовательно, включает классификацию Л. Ванхекке и Ф. Тричерри.

Классификация различных типов изучаемых сейчас метрически-аффинных пространств в рамках MAG представлена составленной нами следующей диаграммой:



С большой степенью допущения к RCT можно отнести и теорию статистических многообразий (см. [3], с. 163 – 216), которые принято обозначать так же, как и метрически-аффинные пространства триплетами $(M, g, \overline{\nabla})$, где g – положительно определенная метрика, $S = 0$ и $Sym\ Q = Q$. Теория статистических многообразий нашла свое отражение в десятках статей и серии монографий (см. об этом в [11]).

Из всех видов аффинно-метрических пространств $(M, g, \overline{\nabla})$ в геометрии последовательно в течение длительного времени изучались только четверть-симметрические метрические пространства и их частный вид полусимметрические метрические пространства (см. [5]; [28]; [29]; [37]; [39]; [46] и др.). Четверть-симметрические метрические пространства существуют в рамках RCT и ECT и выделяются дополнительным условием $T(X,Y) := U(X)p(Y) - V(Y)p(X) - g(U(X),Y)Z$, где $g(U(X),Y) = (Sym\ F)(X,Y)$, $g(V(X),Y) = (Alt\ F)(X,Y)$ для некоторого ковариантного 2-тензора F и $p(X) := g(Z,X)$. Полусимметрические метрические пространства определяются, в свою очередь, условием $T(X,Y) = U(Y)X - U(X)Y$ для любых векторных полей X, Y и Z на M. Они были введены в рассмотрение К. Яно (см. [46]) и продолжают вызывать интерес исследователей вплоть до последнего времени (см., например, [45]; [47]).

Геометрия "в целом"метрически-аффинных пространств застыла на результатах К. Яно, С. Бохнера и С. Гольдберга (см. [6]; [15]; [66]) середины прошлого века. В их работах в рамках RCT доказывались "теоремы исчезновения"(vanishing theorems) для псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров на компактных многообразиях Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ с положительно определенным метрическим тензором g, выделяемых следующим условием $trace\ S = 0$ на тензор кручения S связности $\overline{\nabla}$. Даже несмотря на последующие попытки обобщения их результатов за счет введения в рассмотрение компактных метрически-аффинных пространств с границей (см. [25]; [33]), это попрежнему было доказательство тех же теорем исчезновения для тех же векторных полей и тензоров.

При этом сформулированные в "теоремах исчезновения" (vanishing theorems) условия препятствия существованию псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей и тензоров поражают своей громоздкостью, в отличие от аналогичных теорем для киллинговых и гармонических векторных полей и тензоров на римановых многообразиях (см. [66]). Упрощения условий препятствия удавалось достичь только для случая многообразий Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ с антисимметричным тензором кручения S связности $\overline{\nabla}$.

Нам удалось наметить пути модернизации этой техники, при этом первые полученные результаты, анонсированные на Международной конференции "Геометрия в Одессе - 2008"и на Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам в Суздале в 2008 году, имеют геометрически содержательный и компактный вид (см. [50] и [51]). В дальнейшем нами была продолжена работа по изучению свойств псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях Римана-Картана различных классов. Полученные нами результаты изложены в работах [52] и [53].

2. Многообразия Римана-Картана

2.1. Определение. Под *многообразием Римана-Картана* будем понимать триплет $(M, g, \overline{\nabla})$, где пара (M, g) – (псевдо)риманово n-мерное $(n \geq 2)$ многообразие и $\overline{\nabla}$ – линейная связность, обладающая ненулевым кручением S, такая, что $\overline{\nabla} g = 0$.

Поскольку на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ помимо связности $\overline{\nabla}$ существует связность Леви-Чивита ∇, однозначно присоединяемая к метрике g, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ однозначно определяется тензорное поле $T = \overline{\nabla} - \nabla$, которое, согласно предположению

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) =$$
$$= -g(T(X, Y), Z) - g(T(X, Z), Y) = 0, \qquad (2.1)$$

является гладким сечением тензорного расслоения $TM \otimes \Lambda^2 M$. Из формулы непосредственно выводим:

$$g(T(Y, Z), X) =$$
$$= g(S(X, Y), Z) + g(S(X, Z), Y) + g(S(Y, Z), X) \qquad (2.2)$$

для тензора кручения

$$S(X, Y) = \frac{1}{2}(T(X, Y) - T(Y, X)). \qquad (2.3)$$

Здесь и в дальнейшем X, Y, Z – произвольные гладкие векторные поля на M. При этом из (2.2) следует:

$$2\, trace\, S = trace\, T, \qquad (2.4)$$

где $(trace\, S)X := g(S(e_i, X), e_i)$ и $(trace\, T)X := = T(e_i, X, e_i)$ для ортонормированного базиса $\{e_1, \ldots, e_n\}$ касательного пространства $T_x M$ в произвольной точке $x \in M$.

В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия M тензор кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [60], стр. 130):

$$\overline{R}_{ijk}{}^{l} =$$
$$= R_{ijk}{}^{l} + \nabla_i T_{jk}{}^{l} - \nabla_j T_{ik}{}^{l} + T_{im}{}^{l} T_{jk}{}^{m} - T_{jm}{}^{l} T_{ik}{}^{m}, \qquad (2.5)$$

где $R_{ijk}{}^{l}$ и $T_{jk}{}^{l}$ – локальные компоненты тензоров кривизны связности Леви-Чивита ∇ и деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ и $i, j, k, l, m = 1, \ldots, n$.

Условие метричности $\overline{\nabla} g = 0$ связности $\overline{\nabla}$ приводит (см. [66], стр. 79 русского перевода) к следующим свойствам симметрии:

$$\overline{R}_{ijkl} = -\overline{R}_{ijlk}; \quad \overline{R}_{ijkl} = -\overline{R}_{jikl} \qquad (2.6)$$

для компонент $\overline{R}_{ijkl} = g_{lm} \overline{R}_{ijk}{}^{m}$ тензора $\overline{R}^{\flat}$, ассоциированного с тензором кривизны $\overline{R}$ связности $\overline{\nabla}$. При этом тождествам Бианки, коим подчиняется тензор римановой кривизны, тензор $\overline{R}^{\flat}$ не удовлетворяет. Таким образом, справедлива

Лемма 2.1. *Тензор $\overline{R}^{\flat}$ связности $\overline{\nabla}$ многообразия Римана-Картана является гладким сечением тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M$.*

Тензор Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ имеет следующие компоненты (см. [60], стр. 151):

$$\overline{Ric}_{ij} :=$$
$$= Ric_{ij} + \nabla_k T_{ij}{}^{k} - \nabla_i T_{kj}{}^{k} + T_{kl}{}^{k} T_{ij}{}^{l} - T_{ik}{}^{l} T_{lj}{}^{k}, \qquad (2.7)$$

где Ric_{ij} – локальные компоненты тензора Риччи связности Леви-Чивита ∇. Очевидно, что тензор Риччи $\overline{Ric}$ не является симметричным.

Приведем две различные классификации многообразий Римана-Картана.

2.2. Первый способ классификации многообразий Римана-Картана. Тензор кручения S связности $\overline{\nabla}$ является гладким сечением тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes TM$. В свою очередь, для тензорного расслоения $\Lambda^2 M \otimes T^* M$, согласно теореме Ж.-П. Бургиньена, имеет место поточечно $O(n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение

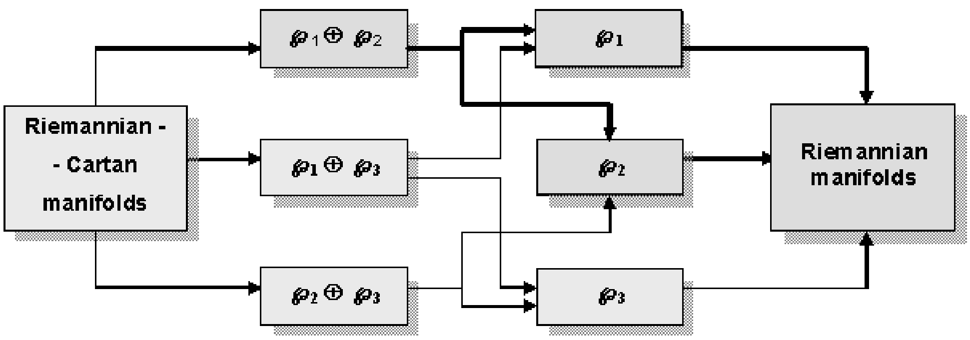
$$\Lambda^2 M \otimes T^* M \cong \wp_1(M) \oplus \wp_2(M) \oplus \wp_3(M),$$

где $\wp_1(M) = \Lambda^3 M$ и $\wp_2(M) = (C^\infty M \cdot g) \wedge T^* M$. При этом ортогональные проекции на компоненты этого разложения определяются равенствами (см., напр., [38]):

$$^{(1)}S^{\flat}(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\wp_1(M)} S)(X, Y, Z) =$$
$$= 3^{-1}(S^{\flat}(X, Y, Z) + S^{\flat}(Y, Z, X) + S^{\flat}(Z, X, Y));$$
$$^{(2)}S^{\flat}(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\wp_2(M)} S)(X, Y, Z) =$$
$$= g(X, Z)\theta(Y) - g(Y, Z)\theta(X);$$
$$^{(3)}S^{\flat}(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\wp_3(M)} S)(X, Y, Z) =$$
$$= S^{\flat}(X, Y, Z) -^{(1)} S(X, Y, Z) -^{(2)} S(X, Y, Z),$$

где $S^{\flat}(X, Y, Z) := g(S(X, Y), Z)$ и $\theta := (n - 1)^{-1} trace\, S$.

Будем говорить, что многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, равно как и его присоединенная связность $\overline{\nabla}$, принадлежат классу $\wp_\alpha$ или $\wp_\alpha \oplus \wp_\beta$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$, если в каждой точке $x \in M$ тензор S^{b} является сечением соответствующего тензорного расслоения $\wp_\alpha(M)$ или $\wp_\alpha(M) \oplus \wp_\beta(M)$. Составим классификационную диаграмму включений:



Будем полагать $\overline{\nabla} \in \wp_1$, если $S_x \in \Lambda^3(T_x M)$ для всех $x \in M$. Такие связности рассматривал К. Яно (см. [66], стр. 78-92) с целью расширения области применения "техники Бохнера"и им же было доказано, что связности $\overline{\nabla} \in \wp_1$ естественным образом возникают в пространстве полупростой группы Ли (см. там же).

Будем полагать $\overline{\nabla} \in \wp_2$, если $S_x \in (\mathbf{R}g_x) \wedge T^*_x M$ для всех $x \in M$, или подробнее ${}^{(2)}S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) = g(X, Z)\theta(Y) - g(Y, Z)\theta(X)$, где $S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) := g(S(X, Y), Z)$ и $\theta := (n-1)^{-1} trace\ S$ для любых $X, Y, Z \in TM$. Этот класс состоит из *полусимметрических метрических связностей* (см. [46]).

Следующие классы несимметрических метрических связностей не были исследованы:

1) $\overline{\nabla} \in \wp_3$, что означает ${}^{(1)}S = 0$ и ${}^{(2)}S = 0$ или

$$S^{\mathrm{b}}(Z, X, Y) + S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) + S^{\mathrm{b}}(Y, Z, X) = 0 \text{ и}$$

$$(trace\ S)X := g(S(e_i, X), e_i) = 0;$$

2) $\overline{\nabla} \in \wp_2 \oplus \wp_3$, что означает ${}^{(1)}S = 0$ или

$$S^{\mathrm{b}}(Z, X, Y) + S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) + S^{\mathrm{b}}(Y, Z, X) = 0;$$

3) $\overline{\nabla} \in \wp_1 \oplus \wp_2$, что означает ${}^{(3)}S = 0$ или $S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) = (AltS^{\mathrm{b}})(X, Y, Z) + \frac{2}{n-1}((trace\ S)(Y)g(X, Z) - (trace\ S)(X)g(Y, Z))$, что равносильно следующим соотношениям

$$S^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) + S^{\mathrm{b}}(X, Z, Y) =$$

$$= (n-1)^{-1}(g(X, Z)(trace\ S)(Y) -$$

$$-2g(Y, Z)(trace\ S)(X) - g(X, Y)(trace\ S)(Z));$$

4) $\overline{\nabla} \in \wp_1 \oplus \wp_3$, что означает ${}^{(2)}S = 0$ или

$$(trace\ S)X := g(S^{\mathrm{b}}(e_i, X), e_i) = 0.$$

2.3. Второй способ классификации многообразий Римана-Картана. Тензор деформации T^{b} является гладким сечением тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$ согласно теореме Ж. П. Бургиньена. Для тензорного расслоения $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, согласно теореме Ж. П. Бургиньена, имеет место поточечно $O(n, \mathbf{R})$-неприводимое разложение

$$T^*M \otimes \Lambda^2 M \cong \Im_1(M) \oplus \Im_2(M) \oplus \Im_3(M),$$

где $\Im_1(M) = \Lambda^3 M$ и $\Im_2(M) = T^*M \wedge (C^\infty M \cdot g)$. При этом ортогональные проекции на компоненты этого разложения определяются равенствами (см., напр., [38]):

$${}^{(1)}T^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\Im_1(M)}T)(X, Y, Z) =$$

$$= 3^{-1}(T^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) + T^{\mathrm{b}}(Y, Z, X) + T^{\mathrm{b}}(Z, X, Y));$$

$${}^{(2)}T^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\Im_2(M)}T)(X, Y, Z) =$$

$$= g(X, Y)\omega(Z) - g(X, Z)\omega(Y);$$

$${}^{(3)}T^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) := (\mathrm{Pr}_{\Im_3(M)}T)(X, Y, Z) =$$

$$= T^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) -^{(1)} T(X, Y, Z) -^{(2)} T(X, Y, Z),$$

где $T^{\mathrm{b}}(X, Y, Z) := g(T(X, Y), Z)$ и $\omega := (n-1)^{-1} trace\ T$.

Будем говорить, что многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, равно как и его присоединенная связность $\overline{\nabla}$, принадлежат классу $\Im_\alpha$ или $\Im_\alpha \oplus \Im_\beta$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$, если в каждой точке $x \in M$ тензор T^{b} является сечением соответствующего тензорного расслоения $\Im_\alpha(M)$ или $\Im_\alpha(M) \oplus \Im_\beta(M)$.

Пространства $\Lambda^2 M \otimes T^*M$ и $T^*M \otimes \Lambda^2 M$, как и их неприводимые компоненты, изоморфны. Более того, связности $\overline{\nabla}$ классов $\wp_\alpha(M)$ и $\Im_\alpha(M)$, $\wp_\alpha(M) \oplus \wp_\beta(M)$ и $\Im_\alpha(M) \oplus \Im_\beta(M)$ для $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ и $\alpha < \beta$ совпадают (см. [54]), а потому две эти классификации равносильны.

3. Примеры многообразий Римана-Картана

3.1. Однородные римановы многообразия. Рассмотрим *однородное риманово многообразие* (M, g), т. е. связное риманово многообразие (M, g), чья группа изометрий, т. е. преобразований, сохраняющих метрический тензор g, транзитивна.

Известно (см. [58], стр. 170), что каждое однородное риманово многообразие является полным. С другой стороны, согласно теореме Амброуза-Зингера (см. [2]), связное полное риманово многообразие (M, g) будет однородным тогда и только тогда, когда на нем можно задать тензорное поле T, как гладкое сечение тензорного расслоения $TM \otimes \Lambda^2 M$, такое, что $\overline{\nabla} R = 0$ и $\overline{\nabla} T = 0$ для связности $\overline{\nabla} = \nabla + T$. Из равенства (2.1) следует, что в этом случае $\overline{\nabla} g = 0$, а потому однородное риманово многообразие является примером многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$. Общую теорию однородных римановых многообразий и многочисленные примеры можно найти, например, в монографиях [48]; [59] и др.

3.2. Почти эрмитовы многообразия. В качестве второго примера рассмотрим *почти эрмитовое многообразие* ([59], стр. 139), которое определяется как триплет (M, g, J), где пара (M, g) – риманово $2m$-мерное многообразие с почти комплексной структурой J, которая является гладким сечением тензорного расслоения $TM \otimes T^*M$, совместимой с метрикой g, т. е. $J^2 = \mathrm{Id}_M$ и $g(J, J) = g$. Непосредственно проверяется, что $\overline{\nabla} g = 0$ для связности $\overline{\nabla} = \nabla + \nabla J$. Известна классификация почти эрмитовых многообразий (см. [17]), которая основана на поточечно $U(m)$-неприводимом разложении тензорного поля $\nabla\Omega$, где $\Omega(X, Y) := = g(X, JY)$ – *фундаментальная 2-форма* почти эрмитова многообразия (M, g, J) (см. [59], стр. 139). Перечислим некоторые из классов почти эрмитовых многообразий вместе с тождествами, их характеризующими.

Почти семи-келеровы многообразия выделяются условием $trace\ \nabla J = 0$ и представляют пример многообразий Римана-Картана класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ или соответственно $\wp_1 \oplus \wp_3$.

Почти-келеровы многообразия выделяются условием $d\Omega = 0$ и представляют пример многообразий Римана-Картана класса $\Im_2 \oplus \Im_3$ или соответственно $\wp_2 \oplus \wp_3$.

Приближенно келеровы многообразия выделяются условием $d\Omega = 3\nabla\Omega$ и представляют пример многообразий Римана-Картана класса $\Im_1$ или соответственно $\wp_1$.

3.3. Пример Э. Картана. Рассмотрим пример Э. Картана (см. [9]) многообразия с несимметрической метрической связностью. Пусть S^2– сфера радиуса R без полюсов евклидова пространства E^3, ξ^1 – долгота и ξ^2 – широта точки сферы, тогда первая квадратичная форма сферы имеет вид: $ds^2 = R^2((cos^2\xi^2)d\xi^1 \otimes d\xi^1 + d\xi^2 \otimes d\xi^2)$, а метрический тензор g имеет компоненты: $g_{11} = R^2 cos^2\xi^2$, $g_{22} = R^2$, $g_{12} = g_{21} = 0$. Тогда векторы $X_1 = \{(Rcos\xi^2)^{-1}; 0\}$ и $X_2 = \{0, R^{-1}\}$ будут единичными векторами в направлении "востока"и "севера". Полагаем, что в некоторой связности $\overline{\nabla}$ векторы X_1 и X_2 переносятся параллельно вдоль любого направления на сфере, т. е. $\overline{\nabla}_k X_1^j = = \partial_k X_1^j + \frac{1}{Rcos\xi^2}\overline{\Gamma}^j_{k1} = 0$ и $\overline{\nabla}_k X_2^j = \partial_k X_2^j + \frac{1}{R}\overline{\Gamma}^j_{k2} = 0$.

При $-\frac{\pi}{2} < \xi^2 < \frac{\pi}{2}$ отсюда последует: $\overline{\Gamma}^1_{21} = -tg\xi^2$, а остальные символы Кристоффеля связности $\overline{\nabla}$ равны нулю, т. е. $\overline{\Gamma}^i_{kj} = 0$. При $n = 2$ тензор кривизны $\overline{R}$ обладает лишь одной существенной компонентой $\overline{R}_{1212}$. Остальные компоненты $\overline{R}_{ijkl}$ либо равны нулю, либо совпадают с ней с точностью до знака. А так как $\overline{\Gamma}^1_{21}$ единственная компонента из всех $\overline{\Gamma}$, отличная от нуля, и производная от нее по ξ^1 равна нулю, то $R_{1212} = 0$. Тогда все коэффициенты $\overline{R}^i_{kjl} = 0$ тензора кривизны $\overline{R}$, а единственным отличным от нуля компонентом тензора кручения S будет $S^1_{21} = -S^1_{12} = \frac{1}{2}tg\xi^2$.

Непосредственно проверяется выполнение условий $\overline{\nabla} g = 0$. Воспользуемся известным соотношением (см. [58], стр. 141)

$$\overline{\nabla}_i g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \overline{\Gamma}^p_{ij} g_{pk} - \overline{\Gamma}^p_{ik} g_{jp}$$

и подставим в него компоненты метрического тензора g.

$$\overline{\nabla}_1 g_{11} = \partial_1 g_{11} - \overline{\Gamma}^p_{11} g_{p1} - \overline{\Gamma}^p_{11} g_{1p} = \partial_1(R^2 cos^2\xi^2) = 0,$$

$$\overline{\nabla}_2 g_{11} = \partial_2 g_{11} - 2\overline{\Gamma}^p_{21} g_{1p} =$$
$$= \partial_2(R^2 cos^2\xi^2) + 2tg\xi^2 R^2 cos^2\xi^2 = 0,$$
$$\overline{\nabla}_1 g_{22} = \partial_1 g_{22} + 2\overline{\Gamma}^p_{12} g_{2p} = \partial_1(R^2) = 0,$$
$$\overline{\nabla}_2 g_{22} = \partial_2 g_{22} + 2\overline{\Gamma}^p_{22} g_{2p} = \partial_2(R^2) = 0,$$
$$\overline{\nabla}_1 g_{12} = \overline{\nabla}_1 g_{21} = \overline{\nabla}_2 g_{12} = \overline{\nabla}_2 g_{21} = 0.$$

Таким образом, $(S^2, g, \overline{\nabla})$ являет пример многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$. В дополнение, если $\overline{R} = 0$, тогда $\overline{\nabla}$ носит название *связности Вейтценбёка* или *абсолютного параллелизма*. Многомерные обобщения пространства $(S^2, g, \overline{\nabla})$ носят название пространств Вейтценбёка (см. [31]).

Пространство Вейтценбёка или пространство абсолютного параллелизма (см. [1], [14], [31]) – это пространство, которое допускает параллельное перенесение n произвольных векторных полей ξ^i с локальными компонентами $\xi^i_{(1)}, \xi^i_{(2)}, \ldots, \xi^i_{(n)}$ по любой кривой, то есть $\overline{\nabla}_k \xi^i_{(1)} = \overline{\nabla}_k \xi^i_{(2)} = \cdots = = \overline{\nabla}_k \xi^i_{(n)} = 0$. Дифференцируя и альтернируя последнее, получим условия интегрируемости, которые являются тождествами Риччи (см. [60], стр. 136)

$$2\overline{\nabla}_{[j}\overline{\nabla}_{k]}\xi^i = \overline{R}^i_{jkp}\xi^p - 2S^p_{jk}\overline{\nabla}_p\xi^i,$$

которые дают

$$\overline{R}^i_{jkp}\xi^p = 0.$$

Это условие должно удовлетворяться тождественно по отношению к выбору вектора ξ^p. Отсюда следует, что тензор кривизны равен нулю. И, обратно, если $\overline{R} = 0$, то существует n линейно независимых векторов ξ^i, являющихся решениями уравнения $\overline{\nabla}_k \xi^i_{(j)} = 0$. Таким образом, если матрица $\xi^i_{(j)}$ невырождена, то пространство не имеет кривизны. Если одновременно кручение также равно нулю, то пространство является плоским.

4. Скалярная и полная скалярная кривизны многообразия Римана-Картана. Теорема Грина

4.1. Теорема Грина. Пусть M – ориентированное n-мерное дифференцируемое многообразие. n-форма ω на M называется *элементом объема*, если $\omega(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n) > 0$ для каждой ориентированной локальной системы координат $x^1, \ldots, x^n$. Для каждого векторного поля X на M с фиксированным элементом объема ω *дивергенция поля* X, обозначаемая $\mathrm{div}X$, есть функция на M, определяемая так:

$$(\mathrm{div}X)\omega = L_X\omega,$$

где L_X – дифференцирование Ли в направлении X. Тогда справедлива теорема Грина

Теорема 4.1. *Пусть M – ориентированное компактное многообразие с фиксированным элементом объема $\omega = dv$. Для любого векторного поля X на M имеем*

$$\int_M \mathrm{div}X dv = 0.$$

На (псевдо)римановом многообразии (M, g) дивергенция произвольного гладкого векторного поля X находится по формуле $div\ X = trace\ \nabla X$. При этом, если многообразие (M, g) компактное и ориентированное, то классическая теорема Грина $\int_M (div\ X)dv = 0$ примет в этом случае вид

$$\int_M trace(\nabla X)\ dv = 0 \qquad (4.1)$$

для элемента объема $dv = \sqrt{|\det \mathrm{g}|}dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, найденного в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ произвольной карты (U, φ) многообразия (M, g) (см. [58], стр. 259-260). Если на многообразии M наряду со связностью Леви-Чивита ∇ задана линейная связность $\overline{\nabla}$, вообще говоря, с кручением, то $\overline{\nabla} = \nabla + T$ и $trace\ \overline{\nabla}X = trace\ \nabla X + (trace\ T)X$. Откуда на основании формулы (4.1) выводим:

$$\int_M (trace\ \overline{\nabla}X - (trace\ S)X)dv = 0. \qquad (4.2)$$

Равенство (4.2) является теоремой Грина для компактного ориентированного многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$.

4.2. Скалярная и полная скалярная кривизна многообразий Римана-Картана. Рассмотрим далее многообразие Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ с положительно определенным метрическим тензором g. Взяв за основу тензор кривизны $\overline{R}$ несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и, воспользовавшись тем фактом, что $R^\flat \in C^\infty(\Lambda^2 M \otimes \Lambda^2 M)$, построим скалярный инвариант $\overline{s} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g(\overline{R}(e_i, e_j)e_j, e_i)$, который по аналогии со скалярной кривизной s риманова многообразия (M, g) (см. [48], стр. 65) назовем *скалярной кривизной многообразия Римана-Картана* $(M, g, \overline{\nabla})$. Хорошо известно, что несимметрический тензор $\overline{Ric} = trace\overline{R}$ является тензором Риччи линейной несимметрической связности $\overline{\nabla}$. Следовательно, мы можем записать следующее тождество $\overline{s} = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{Ric}(e_i, e_i)$. В частности, для связности Вейтценбока $\overline{\nabla}$ мы имеем тождество $\overline{s} = 0$.

Зависимость между скалярными кривизнами s и $\overline{s}$ описывается в следующей лемме.

Лемма 4.1. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и риманова многообразия (M, g) связаны равенством*

$$\overline{s} = s - \|^{(1)}T\|^2 - \frac{n-2}{2}\|^{(2)}T\|^2 + \frac{1}{2}\|^{(3)}T\|^2 - $$
$$-2div(trace\ T^\flat) \qquad (4.3)$$

с неприводимыми компонентами ${}^{(1)}T$, ${}^{(2)}T$ и ${}^{(3)}T$ тензора T.

Кроме того, можно показать, что справедлива следующая

Лемма 4.2. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ и риманова многообразия (M, g) связаны равенством*

$$\overline{s} = s - \|^{(1)}S\|^2 - 2(n-2)\|^{(2)}S\|^2 + 2\|^{(3)}S\|^2 - $$
$$-4div(trace\ S^\flat) \qquad (4.4)$$

с неприводимыми компонентами ${}^{(1)}S$, ${}^{(2)}S$ и ${}^{(3)}S$ тензора S.

Известно (см. [48], стр. 161), что полной скалярной кривизной компактного риманова многообразия (M, g) называется число $s(M) := \int_M s\ dv$. По аналогии сформулируем определение полной скалярной кривизны многообразия Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$.

Определение. *На компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ число $\overline{s}(M) = \int_M \overline{s}\ dv$ обозначает его полную скалярную кривизну.*

Зависимость между полными скалярными кривизнами $s(M)$ и $\overline{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M, g) и Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ описывается следующей теоремой, которая является следствием лемм 4.1., 4.2. и теоремы Грина для многообразий Римана-Картана.

Теорема 4.2. *Полные скалярные кривизны $s(M)$ и $\overline{s}(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ связаны равенством*

$$\overline{s}(M) = s(M) - $$

$$- \int_M (\|^{(1)}T\|^2 + \frac{n-2}{2}\|^{(2)}T\|^2 - \frac{1}{2}\|^{(3)}T\|^2)dv. \quad (4.5)$$

Для компонентов тензора кручения данное уравнение связи имеет вид:

$$\overline{s}(M) = s(M) - $$

$$- \int_M (\|^{(1)}S\|^2 + 2(n-2)\|^{(2)}S\|^2 - 2\|^{(3)}S\|^2)dv. \quad (4.6)$$

5. Характеристики многообразий Римана-Картана выделенных классов и теоремы исчезновения

5.1. Класс $\Im_1$. Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1$, которое характеризуется условием $^{(2)}T = 0$ и $^{(3)}T = 0$ или ему равносильным

$$S(X,Y,Z) =$$

$$= 3^{-1}(S^{\mathrm{b}}(X,Y,Z) + S^{\mathrm{b}}(Y,Z,X) + S^{\mathrm{b}}(Z,X,Y)).$$

Напомним, что пара связностей $\overline{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla} = \overline{\nabla} + 2S$ называется (см. [60], стр. 129) *взаимной.* Полагаем $S_{jk}^{\ \ i} = 2^{-1}(\overline{\Gamma}_{jk}^i - \overline{\Gamma}_{kj}^i)$ для коэффициентов $\overline{\Gamma}_{jk}^i$ связности $\overline{\nabla}$, найденных в локальной системе координат $x^1,\dots,x^n$ на M, тогда коэффициентами взаимных связностей будут $\overline{\Gamma}_{jk}^i$ и $\widetilde{\Gamma}_{jk}^i = \overline{\Gamma}_{jk}^i - 2S_{jk}^{\ \ i}$. Из них можно построить коэффициенты $2^{-1}(\overline{\Gamma}_{jk}^i + \overline{\Gamma}_{kj}^i)$ *средней связности* $\breve{\overline{\nabla}}$ взаимной пары (см. там же).

Тогда справедлива

Теорема 5.1. *Для несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$, заданной на римановом многообразии (M,g) со связностью Леви-Чивита ∇, следующие четыре условия равносильны:*

1. $\overline{\nabla} \in \Im_1$;

2. $T_x^{\mathrm{b}} \in \Lambda^3(T_x^*M)$ для тензора деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$;

3. средняя связность $\breve{\overline{\nabla}}$ взаимной пары связностей $\overline{\nabla}$ и $\widetilde{\nabla} = \overline{\nabla} + 2S$ является метрической;

4. геодезические линии связностей $\overline{\nabla}$ и ∇ совпадают.

Для многообразий данного класса справедлива

Теорема 5.2. *Скалярные кривизны $\overline{s}$ и s многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1$ связаны неравенством $\overline{s} \geq s$, причем равенство возможно только в случае совпадения связности $\overline{\nabla}$ со связностью Леви-Чивита метрики g.*

Следствие. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M,g) с неотрицательно (соответственно положительно) определенным тензором Риччи Ric не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_1$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X,X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

5.2. Класс $\Im_2$. Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ или, что равносильно, класса $\wp_2$, которое характеризуется условиями $^{(1)}S = 0$ и $^{(3)}S = 0$. Для него справедлива следующая

Лемма 5.1. *Связность $\overline{\nabla}$ принадлежит классу $\wp_2$ тогда и только тогда, когда ее тензор кручения удовлетворяет алгебраическому уравнению вида*

$$S(X,Y,Z) - S(X,Z,Y) +$$

$$+ g(X,Y)C(Z) - g(X,Z)C(Y) = 0 \qquad (5.1)$$

для некоторой гладкой 1-формы C и произвольных гладких векторных полей X, Y и Z на M.

Отметим здесь же, что метрическая связность $\overline{\nabla}$ класса $\wp_2$ в литературе (см. [5]; [28]; [46] и др.) называется еще *полусимметрической.*

Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_2$, которое характеризуется условием $^{(1)}T = 0$ и $^{(3)}T = 0$. В этом случае справедлива

Теорема 5.3. *Полные скалярные кривизны $\overline{s}(M)$ и $s(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ связаны неравенством $\overline{s}(M) \geq s(M)$, причем равенство возможно только в случае совпадения связности $\overline{\nabla}$ со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g.*

Зная определение скалярных кривизн $\overline{s}$ и s и учитывая положительную определенность метрики g, можем сформулировать

Следствие. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M,g) с неотрицательно (соответственно положительно) определенным тензором Риччи Ric не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X,X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

5.3. Класс $\Im_3$. Рассмотрим теперь многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_3$, которое характеризуется условиями $^{(1)}T =^{(2)} T = 0$. Последним можно придать вид следующих равенств:

$$trace\ T = 0;$$

$$T(X,Y,Z) + T(Y,Z,X) + T(Z,X,Y) = 0.$$

В этом случае будет справедливой

Теорема 5.4. *Скалярные кривизны s и $\overline{s}$ многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_3$ связаны неравенством $\overline{s} \geq s$. Равенство возможно только, если присоединенная связность $\overline{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g.*

Здесь также будет справедливым

Следствие. *На римановом многообразии (M,g) с неотрицательно (соответственно положительно)скалярной кривизной s не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_3$ с отрицательно (соответственно неположительно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X,X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

Замечание. С. Гольдберг, К. Яно и С. Бохнер, а также Ю. Кубо, Н. Рани и Н. Пракаш (см. [6]; [15]; [25]; [66] и [33]) доказывали свои "теоремы исчезновения"на компактных ориентированных многообразиях Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$, при условии, что $div\ X = trace\ \overline{\nabla}X$ для произвольного гладкого векторного поля X. С учетом предложенных во втором параграфе классификаций можно констатировать, что это были многообразия класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ или, соответственно, класса $\wp_1 \oplus \wp_3$. Это вызвано тем, что только для многообразий этих классов можно записать теорему Грина в форме $\int_M trace\ \overline{\nabla}X\ dv = 0$. Именно последняя лежит в основе "техники Бохнера"для многообразий Римана-Картана (см. [66]).

5.4. Класс $\Im_1 \oplus \Im_2$. Рассмотрим многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что равносильно, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$, которое характеризуется условием ${}^{(3)}S = 0$. Для него нами доказана следующая

Лемма 5.2. *Связность $\overline{\nabla}$ принадлежит классу $\wp_1 \oplus \wp_2$ тогда и только тогда, когда ее тензор кручения удовлетворяет алгебраическому уравнению вида*

$$S(X,Y,Z) + S(X,Z,Y) =$$

$$= g(X,Z)B(Y) + g(X,Y)B(Z) + g(Y,Z)A(X) \quad (5.2)$$

для некоторых гладких 1-форм A и B и произвольных гладких векторных полей X,Y и Z на M.

Для многообразий данного класса справедливы

Теорема 5.5. *Многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ имеет общие изотропные геодезические с псевдоримановым многообразием (M,g).*

Лемма 5.3. *Полные скалярные кривизны $\overline{s}(M)$ и $s(M)$ компактных ориентированных многообразий Римана (M,g) и Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ связаны неравенством $\overline{s}(M) \leq s(M)$. Для* $\dim M \geq 3$ *равенство возможно, когда связность $\overline{\nabla}$ совпадает со связностью Леви-Чивита ∇ метрики g, а для случая* $\dim M = 2$, *когда связность $\overline{\nabla}$ будет полусимметрической.*

Очевидно, что для многообразия Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ со связностью Вейпценбёка класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ верно неравенство $s(M) \geq 0$. Следовательно, мы можем сформулировать

Следствие. *Не существует связностей Вейтценбёка $\overline{\nabla}$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ на римановом многообразии с $s(M) \leq 0$.*

Зная определение скалярных кривизн $\overline{s}$ и s и учитывая положительную определенность метрики g, можем сформулировать

Следствие. *На компактном ориентированном римановом многообразии (M,g) с неположительно (соответственно отрицательно) определенной скалярной кривизной s не существует несимметрической метрической связности $\overline{\nabla}$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ с положительно (соответственно неотрицательно) определенной квадратичной формой $\overline{Ric}(X,X)$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ связности $\overline{\nabla}$ и любого гладкого векторного поля X.*

6. Псевдокиллинговы векторные поля на многообразии Римана-Картана

6.1. Определение. (см. [57], стр. 60–61) *Уравнения $L_\xi g = 0$ или им равносильные*

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi) = 0 \quad (6.1)$$

характеризуют ξ как киллинговое векторное поле или, по другой терминологии, инфинитезимальную изометрию.

Для связности $\overline{\nabla}$ по аналогии с киллинговым векторным полем определим псевдокиллинговое векторное поле

Определение. (см. [6]; [15] и [66], стр. 86) *Уравнения*

$$g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) + g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = 0 \quad (6.2)$$

служат определяющими для псевдокиллингова векторного поля ξ пространства $(M,g,\overline{\nabla})$.

Уравнения (6.2) можно записать в равносильной им форме:

$$(L_\xi g)(X,Y) = T(X,Y,\xi) + T(Y,X,\xi). \quad (6.3)$$

Замечание. На многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1$, которое характеризуется условием $T =^{(1)} T$ или равносильным ему условием $S =^{(1)} S$, где антисимметричны тензоры деформации $T^{\flat}$ и кручения $S^{\flat}$, и на котором сосредоточили свое внимание К. Яно и

С. Бохнер, псевдокиллинговое векторное поле ξ является киллинговым, поскольку в этом случае $(L_\xi g)(X,Y)=0$, как это последует из (6.3).

В отличие от цитируемых выше работ [6], [15], [25], [33], [66], рассмотрим псевдокиллинговое векторное поле ξ на многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1\oplus\Im_2$. В этом случае

$$T(X,Y,\xi)+T(Y,X,\xi)=$$
$$=2g(X,Y)\omega(\xi)-g(Y,\xi)\omega(X)-g(X,\xi)\omega(Y) \quad (6.4)$$

и уравнение (6.3) предстанет в следующем виде:

$$(L_\xi g)(X,Y)=$$
$$=2g(X,Y)\omega(\xi)-\theta(Y)\omega(X)-\theta(X)\omega(Y), \quad (6.5)$$

где $\theta(X)=g(\xi,X)$ и $\omega=(n-1)^{-1}trace\ T$ для произвольного гладкого векторного поля X на M.

Полагаем векторное поле ξ неизотропным, то есть $g(\xi,\xi)\neq 0$, и введем в рассмотрение ортогональное векторному полю ξ гиперраспределение $\xi^\perp : x\in M\to X_x\in\ker\theta_x\subset T_xM$ для всех x из области определения поля ξ на многообразии $(M,g,\overline{\nabla})$. Из (6.5) тогда последует, что $(L_\xi g)(X,Y)=2g(X,Y)\omega(\xi)$ для произвольных гладких векторных полей X и Y распределения $\xi^\perp$. Это равенство характеризует ξ как *инфинитезимальное $(n-1)$-конформное преобразование* (см. [40]) или, по другой терминологии, как *инфинитезимальное обобщенно-конформное преобразование* (см. [56]). Как это доказано в [40], верно и обратное. А именно: каждое инфинитезимальное $(n-1)$-конформное преобразование ξ многообразия (M,g) задается уравнением вида (6.5). Доказана

Теорема 6.1. *Псевдокиллинговое (неизотропное) векторное поле на многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1\oplus\Im_2$ или, что тоже самое, класса $\wp_1\oplus\wp_2$ является инфинитезимальным $(n-1)$-конформным преобразованием.*

С каждым гиперраспределением $\xi^\perp$ ассоциируются *тензор интегрируемости $F^\perp$* и *вторая фундаментальная форма $Q^\perp$*, которые определяются из равенств (см. [34], стр. 148)

$$g(F^\perp(X,Y),\xi):=g([X,Y],\xi); \quad (6.6)$$
$$g(Q^\perp(X,Y),\xi):=g(2^{-1}(\nabla_XY+\nabla_YX),\xi) \quad (6.7)$$

для любых гладких векторных полей X и Y распределения $\xi^\perp$. На многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1\oplus\Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1\oplus\wp_2$ равенство (6.7) принимает следующий вид

$$g(Q^\perp(X,Y),\xi)=$$
$$=g(2^{-1}(\overline{\nabla}_XY+\overline{\nabla}_YX),\xi)+T(X,Y,\xi)+T(Y,X,\xi)$$

для любых гладких векторных полей X и Y распределения $\xi^\perp$ и псевдокиллингова векторного поля ξ. На основании (6.4) заключаем отсюда,что

$$g(Q^\perp(X,Y),\xi)=2g(X,Y)\omega(\xi).$$

Это означает, что $\xi^\perp$ – *омбилическое распределение* (см. [34], стр. 151). Доказана

Теорема 6.2. *На многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_1\oplus\Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1\oplus\wp_2$ гиперраспределение $\xi^\perp$, ортогональное (неизотропному) псевдокиллинговому векторному полю ξ, является омбилическим.*

Тензор интегрируемости $F^\perp$, вообще говоря, не обращается в нуль на многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$. Но возможен частный случай, который описывает

Теорема 6.3. *Пусть $(M,g,\overline{\nabla})$ – компактное ориентированное n-мерное $(n\geq 3)$ многообразие Римана-Картана с положительно определенным метрическим тензором g принадлежит классу $\Im_1\oplus\Im_2$ или, что то же самое, классу $\wp_1\oplus\wp_2$. Если для псевдокиллингова векторного поля ξ выполняется условие $Ric(\xi,\xi)\leq 0$, то гипераспределение $\xi^\perp$ является интегрируемым с максимальными вполне геодезическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1,\dots,x^n$ некоторой карты (U,φ) имеет вид:*

$$ds^2=$$
$$=g_{ab}(x^1,...,x^{n-1})dx^a\otimes dx^b+g_{nn}(x^1,...,x^n)dx^n\otimes dx^n, \quad (6.8)$$

для $a,b=1,\dots,n-1$.

Далее рассмотрим псевдокиллингово векторное поле ξ на многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_2$, для которого, как было показано, присоединенная связность $\overline{\nabla}$ – полусимметрическая. Справедлива

Теорема 6.4. *Если для заданного на компактном многообразии Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ псевдокиллингова векторного поля ξ и тензора Риччи $\overline{Ric}$ присоединенной связности $\overline{\nabla}$ выполняется условие $\overline{Ric}(\xi,\xi)\leq 0$, то ξ является торсообразующим векторным полем, гиперраспределение $\xi^\perp$ - интегрируемым с максимальными омбилическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1,\dots,x^n$ некоторой карты (U,φ) имеет вид:*

$$ds^2=\sigma(x^1,\dots,x^n)g_{ab}(x^1,\dots,x^{n-1})dx^a\otimes dx^b+$$
$$+g_{nn}(x^1,\dots,x^n)dx^n\otimes dx^n, \quad (6.9)$$

для $a,b=1,\dots,n-1$.

6.2. Теоремы исчезновения для псевдокиллинговых векторных полей. Пусть как и прежде многообразие Римана-Картана $(M,g,\overline{\nabla})$ имеет положительно определенный метрический тензор g. Теорема исчезновения для псевдокиллингова векторного поля на многообразии

Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$ имеет следующий вид.

Теорема 6.5. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное ориентированное n-мерное ($n \geq 3$) многообразие Римана-Картана с положительно определенным метрическим тензором g принадлежит классу $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что тоже самое, классу $\wp_1 \oplus \wp_2$. Если при этом тензор Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ метрики g отрицательно определен, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.*

Теорема исчезновения указывает на отрицательную определенность тензора Риччи Ric связности Леви-Чивита ∇ метрики g как на условие препятствия для существования псевдокиллингова векторного поля на многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$, при этом объекты связности $\overline{\nabla}$ в этом не участвуют. Исправить эту ситуацию поможет следующая

Теорема 6.6. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное n-мерное ($n \geq 2$) многообразие Римана-Картана с положительно определенным метрическим тензором g принадлежит классу $\Im_2$ или, что то же самое, классу $\wp_2$. Тогда каждое псевдокиллинговое векторное поле ξ на $(M, g, \overline{\nabla})$ имеет равную нулю ковариантную производную относительно несимметричной метрической связности $\overline{\nabla}$, если $\overline{Ric}(\xi, \xi) \leq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ этой связности. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ отрицательно определена, то на $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдокиллинговых векторных полей.*

7. Псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана-Картана

7.1. Геометрия псевдогармонических векторных полей. Векторное поле ξ на римановом многообразии (M, g) называется *гармоническим*, если (см. [66], стр. 34)

$$\begin{gathered} g(\nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_Y \xi) = 0, \\ div\, \xi = trace_g(\nabla\, \xi) = 0. \end{gathered} \tag{7.1}$$

По аналогии с приведенным определением было дано ([15]; [25]; [33]; см. [66], стр. 84)

Определение. *Псевдогармоническим векторным полем называется такое ξ на многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$, которое подчиняется системе дифференциальных уравнений:*

$$\begin{gathered} g(\overline{\nabla}_X \xi, Y) - g(X, \overline{\nabla}_Y \xi) = 0, \\ trace_g(\overline{\nabla} \xi) = 0. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Изучим геометрию псевдогармонического векторного поля на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ классов $\Im_1 \oplus \Im_2$ и $\Im_2$. Справедлива

Лемма 7.1. *Пусть на компактном многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ тензор кручения S присоединенной связности $\overline{\nabla}$ удовлетворяет уравнению*

$$g(S(X, Y), Z) + g(S(X, Z), Y) =$$

$$= g(X, Y)\tau(Z) + g(X, Z)\tau(Y) + g(Y, Z)\nu(X) \tag{7.3}$$

для произвольных гладких 1-форм τ и ν. Если для заданного на $(M, g, \overline{\nabla})$ псевдогармонического векторного поля ξ и тензора Риччи $\overline{Ric}$ присоединенной связности $\overline{\nabla}$ выполняется условие $\overline{Ric}(X, X) \geq 0$, то с необходимостью $\overline{\nabla}\xi = 0$. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ является положительно определенной, то на многообразии $(M, g, \overline{\nabla})$ не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.

На основании леммы можно доказать, что справедлива следующая

Теорема 7.1. *Пусть ξ – псевдогармоническое векторное поле на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ такое, что $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ присоединенной связности $\overline{\nabla}$. Тогда гиперраспределение $\xi^{\perp}$, ортогональное ξ, является омбилическим.*

Рассмотрим теперь псевдогармоническое векторное поле ξ на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$. Здесь будет справедлива

Теорема 7.2. *Если на компактном многообразии Римана-Картана $(M, g, \overline{\nabla})$ класса $\Im_2$ для псевдогармонического векторного поля ξ выполняется условие $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$, то ξ является торсообразующим векторным полем, гиперраспределение $\xi^{\perp}$ - интегрируемым с максимальными омбилическими интегральными многообразиями, а метрическая форма многообразия в локальной системе координат $x^1, ..., x^n$ некоторой карты (U, φ) приводится к виду:*

$$ds^2 = \sigma(x^1, ..., x^n) g_{ab}(x^1, ..., x^{n-1}) dx^a \otimes dx^b +$$

$$+ g_{nn}(x^1, ..., x^n) dx^n \otimes dx^n,$$

для $a, b = 1, ..., n-1$.

7.2. Теорема исчезновения

Теорема 7.3. *Пусть $(M, g, \overline{\nabla})$ – компактное многообразие Римана-Картана класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ или, что то же самое, класса $\wp_1 \oplus \wp_2$. Тогда каждое псевдогармоническое векторное поле ξ на $(M, g, \overline{\nabla})$ имеет равную нулю ковариантную производную относительно несимметричной метрической связности $\overline{\nabla}$, если $\overline{Ric}(\xi, \xi) \geq 0$ для тензора Риччи $\overline{Ric}$ этой связности. Если же квадратичная форма $\overline{Ric}(X, X)$ является положительно определенной, то на многообразии не существует ненулевых псевдогармонических векторных полей.*

Литература

[1] Aldrovandi, R. *Selected topics in teleparallel gravity* / R. Aldrovandi, J. G. Pereira, and K. H. Vu // Brazilian Journal of Physics. – Vol. 34, № 4A. – 2004.

[2] Ambrose, W. *On homogeneous Riemannian manifolds* / W. Ambrose, I. M. Singer // Duke Math. J. – 1958. – Vol. 25. – P. 647 – 669.

[3] Amari, S.-I. *Differential geometry in statistical inference* / S.-I. Amari, O. E. Barndorff-Nielsen, R. E. Kass, S. L. Lauritzen, C. Rao. – Hayward.: Institute of Mathematical Statistics, 1987.

[4] Arkuszewski, W. *On the linearized Einstein-Cartan theory* / W. Arkuszewski, W. Korczynski, V. Ponomariev // Ann. Ínst. Henri Poincare. – 1974. – Vol. 21. – P. 89 – 95.

[5] Barua, B. *Some properties of semi-symmetric connection in Riemannian manifold* / B. Barua, A. K. Ray // Ind. J. Pure Appl. Math. – 1985. – Vol. 16, no. 7. – P. 726 – 740.

[6] Bochner, S. *Tensor-fields in non-symmetric connections* / S. Bochner, K. Yano // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1952. – Vol. 56, no. 3 – P. 504 – 519.

[7] Capozziello, S. *Geometric classification of the torsion tensor in space-time.* / S. Capozziello, G. Lambiase, C. Stornaiolo // Annalen Phys. – 2001. – Vol. 10. – P. 713 – 727.

[8] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I* / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1923. – Vol. 40. – P. 325 – 412.

[9] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part I.* / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1924. – Vol. 41. – P. 1 – 25.

[10] Cartan, E. *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativé généralisée. Part II.* / E. Cartan // Ann. Éc. Norm. – 1925. – Vol. 42. – P. 17–88.

[11] Deszcz, R. *Differential geometry in statistics and econometrics* / R. Deszcz, K. Sawicz // Electronic Modeling. – 2005. – Vol. 27, no. 2. – P. 139 – 143.

[12] Eisenhart, L. P. *Continuous groups of transformations* / L. P. Eisenhart. – Prinseton: Prinseton Univ. Press, 1933. – 359 p.

[13] Eisenhart, L. P. *Non Riemannian geometry* / L. P. Eisenhart – New York: Amer. Math. Soc. Coll. Publ., 1927. – 184 p.

[14] Garecki, J. *Teleparallel equivalent of general relativity: a critical review Janusz Garecki.*/ J. Garecki // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:1010.2654v2 [gr-qc] 25 Oct 2010.

[15] Goldberg, S. I. *On pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector in metric manifolds with torsion* / S. I. Goldberg // The Annals of Mathematics, 2nd Ser. – 1956. – Vol. 64, no. 2. – P. 364 – 373.

[16] Gray, A. *Einstein-like manifolds which are not Einstein.* / A. Gray // Geometriae deicata. – 1978. – Vol. 7. – P. 259 – 280.

[17] Gray, A. *The sixteen class of almost Hermitean manifolds* / A. Gray, L. Hervella // Ann. Math. Pura Appl. – 1980. – Vol. 123. – P. 35 – 58.

[18] Hamond, R. T. *Torsion gravity* / R. T. Hamond // Rep. Prog. Phys. – 2002. – Vol. 65. – P. 599 – 649.

[19] Hehl, F. W. *On a New Metric-Affine Theory of Gravitation* / F. W. Hehl, P. Heyde // Physics Letters B. – 1976. – Vol. 63, no. 4. – P. 446 – 448.

[20] Hehl, F. W. *Metric-affine gauge theory of gravity: field equations, Noether identities, word spinors, and breaking of dilation invariance* / F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne'eman // Physics Reports. – 1995. – Vol. 258. – P. 1 – 171.

[21] Hehl, F.W. *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects* / F.W. Hehl, P. Heyde, G.D. Kerlick, J.M. Nester // Rev. Mod. Phys. – 1976. – Vol. 48, № 3. – P. 393 – 416.

[22] Hehl, F. W. *Elie Cartan's torsion in geometry and in field theory, an essay* / F. W. Hehl, Y. N. Obukhov // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:0711.1535v1 [gr-qc] 9Nov 2007.

[23] Kibble, T. W. B. *Lorenz invariance and the gravitational field* / T. W. B. Kibble // J. Math. Phys. – 1961. – Vol. 2. – P. 212 – 221.

[24] Крамер, Д. *Точные решения уравнений Эйнштейна* / Д. Крамер, Х. Штефанн, М. Мак-Каллум, Э. Херльт. – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.

[25] Kubo, Y. *Vector fields in a metric manifold with torsion and boundary* / Y. Kubo // Kodai Math. Sem. Rep. – 1972. – Vol. 24. – P. 383 – 395.

[26] McCrea, J. D. *Irreducible decompositions of non-metricity, torsion, curvature and Bianchi identities in metric-affine spacetimes* / J. D. McCrea // Class. Quantum. Grav. – 1992. – Vol. 9. – P. 553 – 568.

[27] Megged, O. *Post-Riemannian Merger of Yang-Mills interactions with gravity* / O. Megged // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:hep-th/0008135.

[28] Muniraja, G. *Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Shur's theorem* / G. Muniraja // Int. J. Contemp. Math. Sciences. – 2008. – Vol. 3, no. 25. – P. 1223 – 1232.

[29] Nakao, Z. *Submanifolds of a Riemannian manifold semi-symmetric metric connections.* / Z. Nakao // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 54. – P. 261 – 266.

[30] Penrose, R. *Spinors and torsion in General Relativity* / R. Penrose // Fond. Of Phys. – 1983. – Vol. 13. – P. 325 – 339.

[31] Pestov, I. B. *Kahler fermions on the Weitzenbok space-time* / I. B. Pestov // [Элек-

тронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:hep-th/9911247v1 30 Nov 1999.

[32] Puetzfeld, D. *Prospects of non-Riemannian cosmology* / D. Puetzfeld // Proceeding of the of 22nd. Texas Symposium on Relativistic Astrophysics at Stanford University (Dec. 13-17, 2004). – California: Stanford Univ. Press – 2004. – P. 1 – 5.

[33] Rani, N. *Non-existence of pseudo-harmonic and pseudo-Killing vector and tensor fields in compact orientable generalized Riemannian space (metric manifold with torsion) with boundary* / N. Rani, N. Prakash // Proc. Natl. Inst. Sci. India. – 1966. – Vol. 32,A., no. 1. – P. 23 – 33.

[34] Reinhart, B. L. *Differential geometry of foliations* / B. L. Reinhart – Berlin-New York: Springer-Verlag, 1983. – 194 p.

[35] Ruggiero, M. L. *Einstein-Cartan theory as a theory of defects in space-time* / M. L. Ruggiero, A. Tartaglia // Amer. J. Phys. – 2003. – Vol. 71. – P. 1303–1313.

[36] Sciama, D. W. *On the analogy between change and spin in general relativity* / D. W. Sciama // Recent developments in General Relativity. – Oxford: Pergamon Press & Warszawa: PWN. – 1962. – P. 415 – 439.

[37] Segupta, J. *On a type of semi-symmetric connection on a Riemannian manifold* / J. Segupta, U. C. De, T. Q. Binh // Ind. J. Pure Appl. Math. – 2000. – Vol. 31, no. 12. – P. 1650 – 1670.

[38] Stepanov, S. E. *On a conformal Killing 2-form of the electromagnetic field* / S. E. Stepanov // Journal Geom. and Phys. – 2000. – Vol. 33. – P. 191 – 209.

[39] Tarafdar, D. *On pseudo concircular symmetric manifold admitting a type quarter symmetric metric connection.* / D. Tarafdar // Istambul Univ. Fen. Fak. Mat. Dergisi. – 1996 – 1997. – Vol. 55 – 56. – P. 237 – 243.

[40] Tanno, S. *Partially conformal transformations with respect to $(m-1)$-dimensional distributions of m-dimensional Riemannian manifolds* / S. Tanno // Tôhoku Math. J. – 1965. – Vol. 17, no. 17. – P. 358 – 409.

[41] Trautman, A. *The Einstein-Cartan theory* / A. Trautman // Encyclopedia of Mathematical Physics. – Oxford: Elsevier, 2006. – Vol. 2. – P. 189 – 195.

[42] Tricerri, F. *Homogeneous structures on Riemannian manifolds* / F. Tricerri, L. Vanhecke // London Math. Soc.: Lecture Note Series. – Vol. 83. - London: Cambridge University Press, 1983.

[43] Tricerri, F. *Homogeneous structures. Progress in mathematics* / F. Tricerri, L. Vanhecke // Differential geometry. – 1983. – Vol. 32. – P. 234 – 246.

[44] Tricerri, F. *Self-dual and anti-self-dual homogeneous structures* / F. Tricerri , L. Vanhecke // Lecture notes in mathematics. – 1984. – no. 1045. – P. 18 – 194.

[45] Vysal, S. A. *On weakly symmetric spaces with semi-symmetric metric connection* / S. A. Vysal, R. O. Laleoğlu // Publ.Math. – 2005. – Vol. 67, no. 1 – 2. – P. 145 – 154.

[46] Yano, K. *On semi-symmetric metric connection* / K. Yano // Rev. Roum. Math. Pure Appl. – 1970. – Vol. 15. – P. 1579 – 1586.

[47] Yasar, E. *Totally umbilical lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection* / E. Yasar, A. C. Cöken, A. Yücesan // Int. J. Pure Appl. Math. – 2005. – Vol. 23, no. 3. – P. 379 – 391.

[48] Бессе, А. *Многообразия Эйнштейна: в 2-х т. Т. 1* / А. Бессе. – М.: Мир, 1990. – 318 с.

[49] Бессе, А. *Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/1979* / А. Бессе. – М.: Мир, 1985 – 334 с.

[50] Гордеева, И. А. *Теорема исчезновения для псевдогармонических векторных полей на многообразии Римана-Картана* / И. А. Гордеева, С. Е. Степанов // Тезисы докладов "Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам". Суздаль, 27 июня – 2 июля 2008 г. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2008. – С. 71 – 73.

[51] Гордеева, И. А. *Псевдокиллинговые векторные поля на многообразиях Римана-Картана* / И. А. Гордеева // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе – 2008", 19 – 24 мая 2008 г. – Одесса: Фонд "Наука 2008. – С. 73 –75.

[52] Гордеева, И. А. *Псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля на многообразии Римана-Картана* / И. А. Гордеева, С. Е. Степанов // Математические заметки. – 2010. – Т. 87, no. 2. – С. 267 — 279.

[53] Гордеева, И. А. *Теоремы исчезновения некоторых классов многообразий Римана–Картана* / И. А. Гордеева // Фундамент. и прикл. матем. – 2010. – Т 16, No 2 – С. 7 — 12.

[54] Гордеева, И. А. *О классификации несимметрических метрических связностей* / И. А. Гордеева // Сборник трудов Международного геометрического семинара им. Г. Ф. Лаптева: – Пенза: Изд-во ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2007. – С. 30 – 37.

[55] Гордеева, И. А. *Многообразия Римана-Картана* / И. А. Гордеева, В. И. Паньженский, С. Е. Степанов // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я).: ВИНИТИ РАН. – М., 2009. – Т. 123. – С. 110 – 141.

[56] Дубинкин, А. В. *К вопросу об инфинитезимальных обобщенно-конформных преобразованиях* / А. В. Дубинкин, А. П. Широков // Труды геометрического семинара (КГУ, Казань). – 1983. – Т. 15. – С. 26 – 34.

[57] Кобаяси, Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

[58] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 1.* /Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 344 с.

[59] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. Т. 2.* /Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 416 с.

[60] Норден, А. П. *Пространства аффинной связности* / А. П. Норден. – М.: Наука, 1976. – 463 с.

[61] Схоутен И. А. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т.1.* / И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. – М.: ГОНТИ, 1939.

[62] Схоутен, И. А. *Введение в новые методы дифференциальной геометрии, Т.II.* / И. А. Схоутен, Д. Дж. Стройк. – М.: ИЛ, 1948.

[63] Схоутен, Я. А. *Тензорный анализ для физиков* / Я. А. Схоутен. – М.: Наука, 1965.

[64] *Точные решения уравнений Эйнштейна* /Д. Крамер, Х. Штефани, Э. Херльт, М. Мак-Каллум; под ред. Э. Шмутцера; пер. с англ. – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.

[65] Фиников, С. П. *Метод внешних форм Картана дифференциальной геометрии* / С. П. Фиников. – М.: Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.

[66] Яно, К. *Кривизна и числа Бетти* / К. Яно, С. Бохнер. – М.: ИЛ, 1957 – 152 с.

514.763.34

RICCI SOLITONS IN CONTACT METRIC MANIFOLDS

Mukut Mani Tripathi

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ В КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

М. М. Трипатхи

In $N(k)$-contact metric manifolds and/or (k,μ)-manifolds, gradient Ricci solitons, compact Ricci solitons and Ricci solitons with V pointwise collinear with the structure vector field ξ are studied.

В работе изучаются солитоны Риччи, в $N(k)$-контактных метрических многообразиях и в контактных (k,μ)-многообразиях

Keywords: солитоны Риччи, $N(k)$-контактные метрические многообразия, (k,μ)-многообразия, K-контактные многообразия, многообразия Сасаки.

Ключевые слова: Ricci soliton, $N(k)$-contact metric manifold, (k,μ)-manifold, K-contact manifold, Sasakian manifold.

1. Introduction

A Ricci soliton is a generalization of an Einstein metric. In a Riemannian manifold (M,g), g is called a Ricci soliton [18] if

$$\pounds_V g + 2\,Ric + 2\lambda g = 0, \tag{1}$$

where $\pounds$ is the Lie derivative, V is a complete vector field on M and λ is a constant. Metrics satisfying (1) are interesting and useful in physics and are often referred as quasi-Einstein (e.g. [9], [10], [15]). Compact Ricci solitons are the fixed point of the Ricci flow

$$\frac{\partial}{\partial t}\,g = -\,2\,Ric$$

projected from the space of metrics onto its quotient modulo diffeomorphisms and scalings, and often arise as blow-up limits for the Ricci flow on compact manifolds. The Ricci soliton is said to be shrinking, steady, and expanding according as λ is negative, zero, and positive respectively. If the vector field V is the gradient of a potential function $-f$, then g is called a gradient Ricci soliton and equation (1) assumes the form

$$\nabla\nabla f = Ric + \lambda g. \tag{2}$$

A Ricci soliton on a compact manifold has constant curvature in dimension 2 (Hamilton [18]), and also in dimension 3 (Ivey [19]). For details we refer to Chow and Knoff [12] and Derdzinski [14]. We also recall the following significant result of Perelman [24]: *A Ricci soliton on a compact manifold is a gradient Ricci soliton.*

On the other hand, the roots of contact geometry lie in differential equations as in 1872 Sophus Lie introduced the notion of contact transformation (Berührungstransformation) as a geometric tool to study systems of differential equations. This subject has manifold connections with the other fields of pure mathematics, and substantial applications in applied areas such as mechanics, optics, phase space of a dynamical system, thermodynamics and control theory (for more details see [1], [3], [16], [21] and [22]).

It is well known [26] that the tangent sphere bundle T_1M of a Riemannian manifold M admits a contact metric structure. If M is of constant curvature $c = 1$ then T_1M is Sasakian [33], and if $c = 0$ then the curvature tensor R satisfies $R(X,Y)\xi = 0$ [2]. As a generalization of these two cases, in [5], Blair, Koufogiorgos and Papantoniou started the study of the class of contact metric manifolds, in which the