УДК 514.76.2

КАНОНИЧЕСКИЕ ПСЕВДОКЭЛЕРОВЫ МЕТРИКИ НА ШЕСТИМЕРНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Н. К. Смоленцев

CANONICAL PSEUDO-KÄHLER METRICS ON SIX-DIMENSIONAL NILPOTENT LIE GROUPS

N. K. Smolentsev

Найдены левоинвариантные псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли, зависящие только от тех параметров, которые оказывают влияние на кривизну. Все такие структуры имеют нулевой тензор Риччи, нулевую псевдориманову норму и большинство из них не являются плоскими. Полученные псевдокэлеровы структуры дают простые модели псевдокэлеровых шестимерных нильмногообразий.

Left-invariant pseudo-Kähler structures on the six-dimensional nilpotent Lie groups, depending only from those parametres which influence curvature are discovered. All such structures have a zero Ricci tensor, zero Pseudo-Riemannian norm and the majority of them are not flat. The received pseudo-Kähler structures give simple models pseudo-Kähler six-dimensional nilmanifolds.

Ключевые слова: шестимерные группы Ли, нильмногообразия, псевдокэлеровы группы Ли, симплектические группы Ли.

Keywords: six-dimensional Lie groups, nilmanifolds, pseudo-Kähler Lie groups, symplectic Lie groups.

1. Кэлеровы и псевдокэлеровы структуры на группах Ли

Левоинвариантная кэлерова структура на группе Ли G – это тройка (g, J, ω), состоящая из левоинвариантной римановой метрики g, ортогональной левоинвариантной комплексной структуры J и левоинвариантной симплектической формы $\omega(X, Y)$, причем

$$g(X, Y) = \omega(X, JY) \qquad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Поэтому такую структуру на группе Ли G можно задать парой (J, ω), где J – комплексная структура, а ω – симплектическая форма, *согласованная* с J, т.е. такая, что $\omega(JX, JY) = \omega(X, Y)$. Если $\omega(X, JX) > 0$, $\forall X \neq 0$, получается кэлерова метрика, а если условие положительности не выполняется, то $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ является псевдоримановой метрикой и тогда (g, J, ω) называется *псевдокэлеровой* структурой на группе Ли G. Из левоинвариантности следует, что (псевдо)кэлерова структура (g, J, ω) может быть задана значениями J, ω и g на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G. Тогда $(\mathfrak{g}, J, \omega, g)$ называется *псевдокэлеровой алгеброй Ли*. Обратно, если $(\mathfrak{g}, J, g)$ есть алгебра Ли, наделенная комплексной структурой J, ортогональной относительно псевдоримановой метрики g, то равенство (1) определяет (фундаментальную) 2-форму ω, которая замкнута тогда и только тогда, когда J параллельна [9].

Поскольку (псевдо)кэлерова группа Ли G является симплектической, то следует также иметь ввиду ряд общих фактов о симплектических структурах. В частности: полупростые группы Ли не допускают симплектической формы, компактные группы Ли (за исключением тора) также не допускают симплектической формы, четырехмерные симплектические и унимодулярные симплектические группы Ли являются разрешимыми [4].

Условие существования положительно определенной кэлеровой метрики накладывает серьезные ограничения на структуру алгебры Ли. Например, в работе Benson C. и Gordon C. показано [3], что такая алгебра Ли не может быть нильпотентной за исключением абелевого случая. Задача нахождения эрмитовых или симплектических многообразий, которые не являются кэлеровыми, имеет достаточно длинную историю. Первым можно считать пример, приведенный Терстоном [14], четырехмерного многообразия, которое является симплектическим, но не допускает кэлеровой метрики. Идеи работы Терстона были развиты в серии работ Cordero L.A., Fernández M. и Gray A. и были получены другие примеры симплектических многообразий, не допускающих кэлеровой метрики. Все эти примеры являются нильмногообразиями, т. е. компактными факторами нильпотентной группы Ли по дискретной подгруппе. Итоги исследований представлены в книге Tralle A., Oprea J. [15].

Хотя нильмногообразия (за исключением тора) не допускают кэлеровой метрики [3], но на таких многообразиях могут существовать псевдокэлеровы структуры. В данной работе мы рассмотрим псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли. Приведем некоторые общие факты о псевдокэлеровых структурах на группах Ли.

Особыми объектами на симплектической алгебре Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ являются изотропные и лагранжевы подпространства. Напомним, что подпространство $W \subset \mathfrak{g}$ называется *ω-изотропным*, если и только если $\omega(W, W) = 0$ и называется ω-*лагранжевым*, если оно ω-изотропно и из $\omega(W,u) = 0$ следует $u \in W$. Подпространства $U, V \subset W$ симплектического пространства (W,ω) будем называть ω-*дуальными*, если для любого вектора $u \in U$ существует вектор $v \in V$ такой, что $\omega(u,v) \neq 0$ и, наоборот, $\forall v \in V, \exists u \in U, \omega(u,v) \neq 0$.

Если g – (псевдо)риманова метрика, то для данного подпространства W из $\mathfrak{g}$, ортогональное подпространство $W^{\perp}$ определяется обычным образом, $W^{\perp} = \{X \in \mathfrak{g} |\ g(X,Y) = 0, \forall\ Y \in W\}$. Подпространство W называется *изотропным*, если $W \subset W^{\perp}$ и называется вполне изотропным, если $W = W^{\perp}$.

Пусть ∇ – связность Леви-Чивита, соответствующая псевдоримановой метрике g. Она определяется из шестичленной формулы [9], которая для левоинвариантных векторных полей X, Y, Z на группе Ли принимает вид: $2g(\nabla_X Y, Z) =$
$= g([X,Y],Z) + g([Z,X],Y) + g(X,[Z,Y])$. Напомним, что тензор кривизны $R(X,Y)$ и тензор Риччи $Ric(X,Y)$ определяются формулами:

$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$,

$Ric(X,Y) = \sum_i \varepsilon_i g(R(e_i,X)Y, e_i)$,

где $\{e_i\}$ – ортонормированный репер на $\mathfrak{g}$ и $\varepsilon_i =$
$= g(e_i,e_i)$. Риманова метрика g называется плоской, если $R \equiv 0$, и Риччи-плоской, если $Ric \equiv 0$.

Лемма 1.1. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, \omega)$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли. Тогда если $\mathfrak{h}$ есть ω-изотропный идеал, то:*

- *$\mathfrak{h}$ является абелевым*
- *$J(\mathfrak{h})$ есть ω-изотропная подалгебра в $\mathfrak{g}$.*

Таким образом, $\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$ есть подалгебра $\mathfrak{g}$ и сумма не обязательно прямая. При этом $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h}$ есть идеал в $\mathfrak{h} + J\mathfrak{h}$ инвариантный относительно J.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{h}$ есть ω-изотропный идеал, первое утверждение следует из условия замкнутости и невырожденности ω. Условие интегрируемости J, ограниченное на абелев идеал $\mathfrak{h}$, влечет $[JX, JY] = J([JX,Y] + [X,JY])$. Это показывает, что $J\mathfrak{h}$ есть подалгебра в $\mathfrak{g}$. Согласованность J и ω показывает, что $\omega(JX,JY) = \omega(X,Y) = 0$ для $X, Y \in \mathfrak{h}$, и тогда $J\mathfrak{h}$ – ω-изотропна. Кроме того, если $\mathfrak{h}$ есть ω-лагранжев, то $J\mathfrak{h}$ также ω-лагранжева и второе утверждение доказано.

Подмногообразие N является вполне геодезическим, если $\nabla_X Y \in TN$ для $X, Y \in TN$. На уровне алгебр Ли мы имеем вполне геодезические подпространства и подалгебры, которые соответствуют вполне геодезическим подмногообразиям и подгруппам группы Ли G с левоинвариантной псевдометрикой g.

Следующие свойства сразу вытекают из формулы для определения ковариантной производной и из свойств (псевдо)кэлеровой структуры (J,ω) алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Предложение 1.2. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, g)$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли и предположим, что $\mathfrak{h}$ есть идеал, удовлетворяющий $J\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\perp}$ и $\mathfrak{h} \cap J\mathfrak{h} = 0$ (т. е. $\mathfrak{h}$ есть ω-лагранжев), тогда для $X, Y \in \mathfrak{h}$ имеет место следующее:*

- *$\nabla_X Y \in J\mathfrak{h}$;*
- *$\nabla_{JX} JY \in J\mathfrak{h}$;*
- *$\nabla_X JY \in \mathfrak{h}$; и $\nabla_{JX} Y \in \mathfrak{h}$.*

Таким образом, подгруппа соответствующая $J\mathfrak{h}$ в группе Ли G является вполне геодезической.

Предложение 1.3. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g}, J, g)$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли и предположим, что $\mathfrak{h}$ есть абелев идеал, удовлетворяющий условиям $J\mathfrak{h} = \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{\perp}$. Тогда имеет место:*

- *$\nabla_Z Y \in \mathfrak{h}$ для всех $Y \in \mathfrak{h}$, и $Z \in \mathfrak{g}$; в частности: $\nabla_X Y = 0$ для всех $X, Y \in \mathfrak{h}$*

Таким образом, нормальная подгруппа H, соответствующая идеалу $\mathfrak{h}$, является вполне геодезической в группе Ли G.

Для s-ступенной нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ размерности m определена возрастающая центральная последовательность идеалов:

$$\mathfrak{g}_0 = \{0\} \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \cdots \subset \mathfrak{g}_{s-1} \subset \mathfrak{g}_s = \mathfrak{g},$$

$\mathfrak{g}_k = \{X \in \mathfrak{g} |\ [X,\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{g}_{k-1}\},\ \ k \geq 1.$

Если J – комплексная структура на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, то можно по аналогии определить возрастающую последовательность идеалов $\mathfrak{a}_k(J)$ следующим образом: $\mathfrak{a}_0(J) = \{0\}$, $\mathfrak{a}_k(J) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X,\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}(J)$ и $[JX,\mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{a}_{k-1}(J)\}$, $k \geq 1$. Каждый идеал $\mathfrak{a}_k(J)$ инвариантен относительно J и $\mathfrak{a}_k(J) \subseteq \mathfrak{g}_k$ для $k \geq 1$.

Напомним, что левоинвариантная комплексная структура J на G называется *нильпотентной*, если для ряда $\mathfrak{a}_k(J)$ существует номер p такой, что $\mathfrak{a}_p(J) = \mathfrak{g}$.

Очевидно, что идеал $\mathfrak{a}_1(J)$ лежит в центре $\mathcal{Z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Если нильпотентная алгебра Ли имеет двумерный центр $\mathcal{Z}$, то для любой левоинвариантной комплексной нильпотентной структуры J идеал $\mathcal{Z}$ инвариантен относительно J. Если нильпотентная алгебра Ли имеет возрастающую центральную последовательность идеалов $\mathfrak{g}_k$, $k = 0,1,\ldots,s$, для которой размерности возрастают каждый раз на две единицы, то для любой левоинвариантной комплексной нильпотентной структуры J выполняются равенства $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{a}_k(J)$, $k = 0,1,\ldots,s$. Если базис $\mathfrak{g}$ выбран так, что $\mathfrak{g}_1 = \{e_{2n-1}, e_{2n}\}$, $\mathfrak{g}_2 = \{e_{2n-3}, e_{2n-2}, e_{2n-1}, e_{2n}\}$, $\ldots$, то комплексная структура J имеет следующий блочный вид (например, для шестимерного случая):

$$J_0 = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} & 0 & 0 \\ \psi_{51} & \psi_{52} & \psi_{53} & \psi_{54} & \psi_{55} & \psi_{56} \\ \psi_{61} & \psi_{62} & \psi_{63} & \psi_{64} & \psi_{65} & \psi_{66} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Оставшиеся параметры в (2) не являются свободными, они связаны условиями интегрируемости $N_J = 0$ и $J^2 = -1$.

Лемма 1.4. *Если $C^1(\mathfrak{g})$ – первый производный идеал и $\mathcal{Z}$ – центр алгебры Ли, то для любой симплектической формы ω на $\mathfrak{g}$, $\omega(C^1(\mathfrak{g}), \mathcal{Z}) = 0$.*

Сразу следует из формулы $d\omega(X, Y, Z) = \omega([X, Y], Z) - \omega([X, Z], Y) + \omega([Y, Z], X) = 0$, $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Лемма 1.5. *Если $C^1\mathfrak{g}$ – первый производный идеал, то $\omega(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0$.*

Следствие 1.6. *Для любой (псевдо)кэлеровой структуры $(\mathfrak{g}, \omega, g, J)$ идеал $\mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ ортогонален подпространству $C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g})$:*

$$g(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathfrak{a}_1(J)) = 0.$$

Из формулы $2g(\nabla_X Y, Z) = g([X, Y], Z) + g([Z, X], Y) + g(X, [Z, Y])$ для ковариантной производной ∇ на группе Ли сразу вытекают следующие наблюдения:

- если векторы X и Y лежат в центре алгебры Ли, то $\nabla_X Y = 0$ для любой левоинвариантной (псевдо)римановой структуры g на алгебре Ли;
- если вектор X лежит в центре алгебры Ли, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X$.

Лемма 1.7. *Если вектор X лежит в идеале $\mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ алгебры Ли, то $\nabla_X Y = \nabla_Y X = 0$, $\forall Y \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ и $Z, Y \in \mathfrak{g}$. Тогда из следствия 1.6 выше вытекает, что $2g(\nabla_X Y, Z) = g(X, [Z, Y]) = 0$.

Следствие 1.8 *Если вектор X лежит в идеале $\mathfrak{a}_1(J) \subset \mathcal{Z}$ алгебры Ли, то $R(X, Y)Z = R(Z, Y)X = 0$, $\forall Y, Z \in \mathfrak{g}$. Если согласованная с ω комплексная структура J имеет вид (2), то кривизна $R(X, Y)$ ассоциированной метрики не зависит от свободных параметров ψ_{51}, ψ_{52}, ψ_{53}, ψ_{54}, ψ_{61}, ψ_{62}, ψ_{63}, ψ_{64}.*

Замечание 1. Отметим, что параметры ψ_{ij} комплексной структуры J связаны тремя условиями: согласованность, интегрируемость и $J^2 = -1$. Поэтому некоторые из указанных выше параметров могут выражаться через другие, например через ψ_{11} и ψ_{12}. В следствии 1.8 речь идет о свободных параметрах, т. е. таких, которые остались независимыми. От них кривизна не зависит.

Как уже отмечалось, (псевдо)кэлерова метрика g может быть неопределенной. В знакоопределенном случае Риччи-плоские метрики являются плоскими [1]. В неопределенном случае это вообще неверно. Однако в размерности четыре, если $\mathfrak{g}$ – унимодулярная и псевдокэлерова метрика является Риччи-плоской, то она плоская.

2. Кэлеровы и псевдокэлеровы структуры на четырехмерных группах Ли

Кэлеровы и псевдокэлеровы структуры (J, ω) на четырехмерных группах Ли изучались в последнее время во многих работах. Отметим серию статей Г. Овандо [11], [12] и работы Е. С. Корнева [8]. В работе [4] показано, что четырехмерные псевдокэлеровы группы Ли могут быть только разрешимыми. В работе Г. Овандо [12] подробно изучены псевдокэлеровы левоинвариантные метрики на четырехмерных группах Ли. Совместимые пары (J, ω) параметризованы с точностью до комплексного изоморфизма. Показано, что многие из таких групп Ли допускают псевдокэлеровы эйнштейновы метрики. Рассмотрены Риччи-плоские и плоские метрики. В частности, показано, что в размерности четыре Риччи-плоские унимодулярные псевдокэлеровы алгебры Ли являются плоскими. Показано, что в восьми из 11 семейств (псевдо)кэлеровых алгебр Ли существуют эйнштейновы представители. В работе [12] показано, что симплектическая алгебра Ли, допускающая абелеву комплексную структуру, является псевдокэлеровой. В этом случае $(\mathfrak{g}, J)$ является псевдокэлеровой, если и только если, J является абелевой. Например, алгебра Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$ имеет и абелевы и неабелевы комплексные структуры; однако только абелевы допускают согласованную симплектическую форму. Напомним, что комплексная структура J называется *абелевой*, если она удовлетворяет условию $[JX, JY] = [X, Y]$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Четырехмерные (псевдо)кэлеровы алгебры Ли. Классификацию четырехмерных разрешимых вещественных алгебр Ли можно найти, например, в работе [2]. Обозначим $\{e^i\}$ базис на $\mathfrak{g}^*$ дуальный к базису $\{e_i\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и пусть $e^{ij} = e^i \wedge e^j$.

Теорема 2.1. ([12]) *Пусть $\mathfrak{g}$ – (псевдо)кэлерова алгебра Ли, тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной из следующих алгебр Ли, наделенных комплексной и согласованной симплектической структурами из следующего списка:*

$\mathfrak{rh}_3$: $[e_1,e_2]=e_3,\quad Je_1=e_2,\ Je_3=e_4,\quad \omega=a(e^{13}+e^{24})+b(e^{14}-e^{23})+ce^{12},\ a^2+b^2\neq 0$

$\mathfrak{rr}_{3,0}$: $[e_1,e_2]=e_2,\quad Je_1=e_2,\ Je_3=e_4,\quad \omega=a\,e^{12}+b\,e^{34},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{rr}'_{3,0}$: $[e_1,e_2]=-e_3,\ [e_1,e_3]=e_2,\quad Je_1=e_4,\ Je_2=e_3,\quad \omega=a\,e^{14}+b\,e^{23},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$: $[e_1,e_2]=e_2,\ [e_3,e_4]=e_4,\quad Je_1=e_2,\ Je_3=e_4,\quad \omega=a\,e^{12}+b\,e^{34},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{r}'_2$: $[e_1,e_3]=e_3,\ [e_1,e_4]=e_4,\ [e_2,e_3]=e_4,\ [e_2,e_4]=-e_3,$
$J_1e_1=e_3,\ J_1e_2=e_4,\quad \omega_1=a\,(e^{13}-e^{24})+b\,(e^{14}+e^{23}),\ a^2+b^2\neq 0$
$J_2e_1=-e_2,\ J_2e_3=e_4,\quad \omega_2=a\,(e^{13}-e^{24})+b\,(e^{14}+e^{23})+c\,e^{12},\quad a^2+b^2\neq 0$

$\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$: $[e_4,e_1]=e_1,\ [e_4,e_2]=-e_2,\ [e_4,e_3]=-e_3,$
$Je_4=e_1,\ Je_2=e_3,\quad \omega=a\,(e^{12}+e^{34})+b\,(e^{13}-e^{24})+c\,e^{14},\quad a^2+b^2\neq 0$

$\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$: $[e_4,e_1]=e_1,\ [e_4,e_2]=-\delta e_3,\ [e_4,e_3]=\delta e_2,\ \delta>0,$
$J_1e_4=e_1,\ J_1e_2=e_3,\quad J_2e_4=e_1,\ J_2e_2=-e_3,\quad \omega=a\,e^{14}+b\,e^{23},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{d}_{4,1}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_3]=e_3,\ [e_4,e_1]=e_1,$
$Je_1=e_4,\ Je_2=e_3,\quad \omega=a\,(e^{12}-e^{34})+be^{14},\ a\neq 0$

$\mathfrak{d}_{4,2}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_3]=e_3,\ [e_4,e_1]=2e_1,\ [e_4,e_2]=-e_2,$
$J_1e_4=-e_2,\ J_1e_1=e_3,\quad \omega_1=a\,(e^{14}+e^{23})+be^{24},\ a\neq 0$
$J_2e_4=-2e_1,\ J_2e_2=e_3,\quad \omega_2=a\,e^{14}+b\,e^{23},\ ab\neq 0$

$\mathfrak{d}_{4,1/2}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_3]=e_3,\ [e_4,e_1]=\frac{1}{2}e_1,\ [e_4,e_2]=\frac{1}{2}e_2,$
$J_1e_4=e_3,\ J_1e_1=e_2,\quad J_2e_4=e_3,\ J_2e_1=-e_2,\quad \omega=a(e^{12}-e^{34}),\ a\neq 0$

$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$: $[e_1,e_2]=e_3,\ [e_4,e_1]=\frac{\delta}{2}e_1-e_2,\ [e_4,e_3]=\delta e_3,\ [e_4,e_2]=e_1+\frac{\delta}{2}e_2,\quad \delta\geq 0,$
$J_1e_4=e_3,\ J_1e_1=e_2,\quad J_2e_4=-e_3,\ J_2e_1=e_2,\quad J_3e_4=-e_3,\ J_3e_1=-e_2,$
$\omega=a\,(e^{12}-\delta e^{34}),\ a\neq 0$.

Отметим, что $\mathfrak{rh}_3$ есть тривиальное расширение трехмерной алгебры Ли Гейзенберга, обозначаемой $\mathfrak{h}_3$; $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ есть алгебра Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, где $\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$ – алгебра Ли группы Ли аффинных движений $\mathbb{R}$, $\mathfrak{r}'_2$ есть вещественная алгебра Ли, лежащей в основе комплексной алгебры Ли $\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$, $\mathfrak{r}'_{3,0}$ есть тривиальное расширение $\mathfrak{e}(2)$, алгебры Ли группы Ли движений $\mathbb{R}^2$; $\mathfrak{r}_{3,-1}$ – алгебра Ли $\mathfrak{e}(1,1)$ группы Ли движений 2-пространства Минковского. Унимодулярные четырехмерные разрешимые алгебры Ли – это следующие: $\mathbb{R}^4$, $\mathfrak{rh}_3$, $\mathfrak{rr}_{3,-1}$, $\mathfrak{rr}'_{3,0}$, $\mathfrak{n}_4$, $\mathfrak{r}_{4,-1/2}$, $\mathfrak{r}_{4,\mu,-1-\mu}$ $(-1<\mu\leq -1/2)$, $\mathfrak{r}'_{4,\mu,-\mu/2}$, $\mathfrak{d}_4$, $\mathfrak{d}'_{4,0}$.

Из списка теоремы 2.1 получаем ряд следствий [12]:

1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная (неабелева) четырехмерная псевдокэлерова алгебра Ли, тогда она изоморфна $\mathbb{R}\times\mathfrak{h}_3$ и любая комплексная структура является абелевой.*

2. *Пусть $\mathfrak{g}$ – четырехмерная алгебра Ли для которой любая комплексная структура допускает (псевдо)кэлерову структуру на $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной из алгебр $\mathbb{R}\times\mathfrak{h}_3$, $\mathbb{R}^2\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}\times\mathfrak{e}(2)$, $\mathfrak{r}_{4,-1,-1}$, $\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$, $\mathfrak{d}_{4,1}$ $\mathfrak{d}_{4,2}$*

3. *Пусть $\mathfrak{g}$ – четырехмерная алгебра Ли, допускающая абелеву комплексную структуру. Тогда $(\mathfrak{g},J)$ является (псевдо)кэлеровой тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ – симплектическая и J – абелева.*

4. *Пусть $(\mathfrak{g},J)$ – неабелева четырехмерная алгебра Ли с комплексной структурой J, допускающая только знакоопределенные кэлеровы метрики, тогда $(\mathfrak{g},J)$ изоморфна либо алгебре Ли $(\mathfrak{d}_{4,1/2},J_1)$, или алгебре $(\mathfrak{d}'_{4,\delta},J_1,J_3)$.*

   Псевдокэлеровы алгебры Ли $(\mathbb{R}\times\mathfrak{h}_3,J)$, $(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}),J_1,J_2)$, $(\mathfrak{r}_{4,-1,-1},J)$ и $(\mathfrak{d}_{4,1},J)$ и $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$ допускают только нейтральные псевдоримановы метрики.

Здесь комплексные структуры J, J_1, J_2 и J_3 определены в таблице теоремы 2.1.

Теорема 2.2. ([12]) *Пусть $\mathfrak{g}$ – унимодулярная четырехмерная псевдокэлерова алгебра Ли, тогда метрика g является плоской и ее связность Леви-Чивита является полной.*

Теорема 2.3. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g},J)$ – не унимодулярная четырехмерная кэлерова алгебра Ли с псевдокэлеровой Риччи-плоской метрикой g. Тогда $(\mathfrak{g},J)$ изоморфна одной из $(\mathfrak{r}_{4,-1,-1},J)$, $(\mathfrak{d}_{4,2},J_2)$, $(\mathfrak{aff}(\mathbb{C}),J_2)$. Кроме того, эти алгебры Ли имеют плоские метрики и также Риччи-плоские но не плоские метрики.*

В работе [12] определены все эйнштейновы кэлеровы метрики в четырехмерном случае. Напомним, что $e^i\cdot e^j$ – это симметричное произведение 1-форм e^i и e^j.

Предложение 2.4. ([12]) *Пусть $(\mathfrak{g},J,g)$ – кэлерова алгебра Ли с эйнштейновой метрикой g. Тогда, если g – не Риччи-плоская, то g есть (псевдо)кэлерова метрика, соответствующая одной из следующих алгебр Ли:*

$\mathfrak{aff}(\mathbb{R})\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$	J	$g=\alpha(e^1\cdot e^1+e^2\cdot e^2+e^3\cdot e^3+e^4\cdot e^4)\,,$
$\mathfrak{aff}(\mathbb{C})$	J_1	$g=\alpha(e^1\cdot e^1-e^2\cdot e^2+e^3\cdot e^3-e^4\cdot e^4)\,,$
$\mathfrak{d}_{4,1/2}$	$J_1,$ J_2	$g=\alpha(e^1\cdot e^1+e^2\cdot e^2+e^3\cdot e^3+e^4\cdot e^4)\,,$ $g=\alpha(e^1\cdot e^1+e^2\cdot e^2-e^3\cdot e^3-e^4\cdot e^4)\,,$
$\mathfrak{d}'_{4,\delta}$	J_1,J_3,J_2	$g=\alpha(e^1\cdot e^1+e^2\cdot e^2+\delta(e^3\cdot e^3+e^4\cdot e^4))\,,$ $g=\alpha(e^1\cdot e^1+e^2\cdot e^2-\delta(e^3\cdot e^3+e^4\cdot e^4))\,.$

Теорема 2.5. ([12]) *Пусть* $(\mathfrak{g},J,g)$ – *кэлерова алгебра Ли. Если* $\mathfrak{g}$ *не допускает эйнштейновой кэлеровой метрики, то* $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной из алгебр* $\mathbb{R}^2\times\mathfrak{aff}(\mathbb{R})$, $\mathfrak{r}'_{4,0,\delta}$, $\mathfrak{d}_{4,1}$.

3. Псевдокэлеровы структуры на шестимерных нильпотентных группах Ли

Как известно [3], не существует нильпотентных групп Ли, допускающих левоинвариантную кэлерову структуру, кроме абелевых. Однако псевдокэлеровы структуры существуют на многих нильпотентных группах Ли. Псевдокэлерова структура на группе Ли задается симплектической формой ω и согласованной с ней комплексной структурой J, т. е. такой, что $\omega(JX,JY)=\omega(X,Y)$. Классификация левоинвариантных комплексных структур на шестимерных нильпотентных группах Ли получена в работе Саламона [13]. Полный список симплектических структур на шестимерных нильпотентных группах Ли, установлен в работе M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina [7]:

Каждая нильпотентная симплектическая алгебра Ли размерности 6 *симплекто-изоморфна одной и только одной из следующих симплектических алгебр Ли*:

1. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
   $\omega=e^1\wedge e^6+(1-\lambda)e^2\wedge e^5+\lambda e^3\wedge e^4,\qquad \lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}\,.$
2. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
   $\omega(\lambda)=\lambda(e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^4-e^2\wedge e^5),\qquad \lambda\neq 0\,.$
3. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$
4. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_5]=e_6,$
   $\omega(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1e^1\wedge e^4+\lambda_2(e^1\wedge e^5+e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5),\quad \lambda_1,\,\lambda_2\in\mathbb{R},\,\lambda_2\neq 0\,.$
5. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=-e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_5]=e_6,$
   $\omega_1(\lambda_1,\lambda_2)=\lambda_1e^1\wedge e^4+\lambda_2(e^1\wedge e^5+e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5),\ \lambda_1,\,\lambda_2\in\mathbb{R},\,\lambda_2\neq 0\,,$
   $\omega_2(\lambda)=\lambda(e^1\wedge e^6-2e^1\wedge e^5-2e^2\wedge e^4+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^4+e^3\wedge e^5),\ \lambda\neq 0\,,$
   $\omega_3(\lambda)=\lambda(e^1\wedge e^4-e^1\wedge e^5+e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^4+e^2\wedge e^5+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^4+e^3\wedge e^5),\ \lambda\neq 0\,,$
   $\omega_4(\lambda)=\lambda(2e^1\wedge e^4+e^1\wedge e^6+2e^2\wedge e^5+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^4+e^3\wedge e^5),\ \lambda\neq 0\,.$
6. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
   $\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4,\qquad \omega_2=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^4-e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$
7. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
   $\omega_1(\lambda)=\lambda(e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^6-e^4\wedge e^5),\qquad \omega_2(\lambda)=\lambda(e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4),\quad \lambda\neq 0\,.$
8. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
   $\omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4\,.$
9. $[e_1,e_2]=e_4,\ [e_1,e_4]=e_5,\ [e_1,e_5]=e_6,\ [e_2,e_3]=e_6,\ \omega(\lambda)=\lambda(e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^6-e^4\wedge e^5),\ \lambda\neq 0.$
10. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
   $\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^2\wedge e^6-e^3\wedge e^4,\qquad \omega_2=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^4\,.$
11. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
   $\omega_1(\lambda)=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+\lambda e^2\wedge e^6-e^3\wedge e^4,\quad \omega_2(\lambda)=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5+\lambda e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^4,\ \lambda\in\mathbb{R}\,.$

12. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_3]=-e_5,\quad [e_2,e_4]=e_6,$
$\omega(\lambda)=\lambda e^1\wedge e^5+e^2\wedge e^6+(\lambda+1)e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0,-1\,.$

13. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
$\omega_1(\lambda)=e^1\wedge e^6+\lambda e^2\wedge e^5+(\lambda-1)\,e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0\,,1\,,$
$\omega_2(\lambda)=e^1\wedge e^6+\lambda e^2\wedge e^4+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^5,\quad \lambda\neq 0\,,$
$\omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+\frac{1}{2}e^2\wedge e^5-\frac{1}{2}e^3\wedge e^4\,.$

14. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_1,e_3]=e_5,\qquad \omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5,$
$\omega_2=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5,\quad \omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

15. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,\qquad \omega_1=-e^1\wedge e^5+e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4,$
$\omega_2=e^1\wedge e^5-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4,\qquad \omega_3=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4+e^3\wedge e^5\,.$

16. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\quad [e_2,e_4]=e_6,\quad [e_3,e_4]=-e_5,$
$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^3-e^4\wedge e^5,\qquad \omega_2=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^3+e^4\wedge e^5\,.$

17. $[e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

18. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_6,$
$\omega_1(\lambda)=e^1\wedge e^6+\lambda e^2\wedge e^5+(\lambda-1)\,e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0,\ 1,$
$\omega_2(\lambda)=e^1\wedge e^5+\lambda e^1\wedge e^6-\lambda e^2\wedge e^5+e^2\wedge e^6-2\lambda e^3\wedge e^4,\quad \lambda\neq 0,$
$\omega_3=e^3\wedge e^5-e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+2e^3\wedge e^4\,.$

19. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^3+e^2\wedge e^6-e^4\wedge e^5\,.$

20. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_3]=e_5,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4\,.$

21. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_6,\qquad \omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^4-e^3\wedge e^4-e^3\wedge e^5,$
$\omega_2=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4,\qquad \omega_3=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

22. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

23. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_3]=e_6,\qquad \omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4,$
$\omega_2=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^6+e^3\wedge e^5,\qquad \omega_3=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^6-e^3\wedge e^5\,.$

24. $[e_1,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_3]=e_5,$
$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4,\qquad \omega_1=-e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^4\,.$

25. $[e_1,e_2]=e_6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

26. $\mathbb{R}^6,\qquad \omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4\,.$

Укажем также нильпотентные алгебры Ли, не допускающие ни комплексной, ни симплектической структур [13]:

1. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,$
$[e_2,e_3]=e_5,\ [e_3,e_4]=e_6,\ [e_2,e_5]=-e_6.$

2. $[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_3]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,$
$[e_3,e_4]=e_6,\quad [e_2,e_5]=-e_6.$

3. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,$
$[e_3,e_5]=e_6.$

4. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,$
$[e_3,e_5]=e_6.$

5. $[e_1,e_2]=e_5,\quad [e_1,e_5]=e_6,\quad [e_3,e_4]=e_6.$

Следующие нильпотентные алгебры Ли не допускают только симплектической структуры:

1. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_2,e_3]=e_5,\quad [e_1,e_4]=e_6,$
$[e_3,e_5]=-e_6.$

2. $[e_1,e_2]=e_4,\quad [e_1,e_4]=e_5,\quad [e_2,e_4]=e_6.$

3. $[e_1,e_2]=e_6,\quad [e_3,e_4]=e_6.$

Алгебра Ли с коммутационными соотношениями $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_5] = e_6$ допускает комплексные структуры и отдельно симплектические, но не допускает согласованных, т. е. псевдокэлеровых структур.

Как уже упоминалось, на нильпотентных группах Ли нет кэлеровых метрик, но могут существовать псевдокэлеровы структуры. Достаточно подробное изучение псевдокэлеровых структур в шестимерном нильпотентном случае проведено недавно L. A. Cordero, M. Fernández и L. Ugarte [5]. Показано, что для псевдокэлеровой структуры (J, ω) на шестимерной нильпотентной группе Ли комплексная структура J должна быть нильпотентной, а на некоторых группах Ли – абелевой. В работе [6] показано, что левоинвариантные псевдокэлеровы метрики на нильпотентной группе Ли являются Риччи-плоскими, но многие из них неплоские.

В следующей теореме алгебру Ли $\mathfrak{g}$ будем записывать в виде m-ки $(0, 0, d\theta^3, \dots, d\theta^m)$, в которой используется сокращение записи $\theta^{ij} = \theta^i \wedge \theta^j$ как ij. Например, запись $(0, 0, 0, 12)$ обозначает алгебру Ли со структурными уравнениями: $d\theta^1 = 0$, $d\theta^2 = 0$, $d\theta^3 = 0$ и $d\theta^4 = \theta^1 \wedge \theta^2$. Кроме того, у каждой алгебры указан также ее номер в списке симплектических алгебр Ли работы M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina [7].

Теорема 3.1. ([5]) *Шестимерная нильпотентная неабелева алгебра Ли $\mathfrak{g}$ допускает согласованную пару (J, ω) тогда и только тогда, когда она изоморфна одной из алгебр следующего списка:*

$\mathfrak{h}_{21} = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 25)$,
$\mathfrak{h}_{14} = (0, 0, 0, 12, 13, 14)$,
$\mathfrak{h}_{13} = (0, 0, 0, 12, 13, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{15} = (0, 0, 0, 12, 13, 24)$,
$\mathfrak{h}_{11} = (0, 0, 0, 12, 13 + 14, 24)$,
$\mathfrak{h}_{10} = (0, 0, 0, 12, 14, 13 + 42)$,
$\mathfrak{h}_{12} = (0, 0, 0, 12, 13 + 42, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{24} = (0, 0, 0, 0, 12, 34)$,
$\mathfrak{h}_{17} = (0, 0, 0, 0, 12, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{16} = (0, 0, 0, 0, 13 + 42, 14 + 23)$,
$\mathfrak{h}_{23} = (0, 0, 0, 0, 12, 13)$,
$\mathfrak{h}_{18} = (0, 0, 0, 12, 13, 23)$,
$\mathfrak{h}_{25} = (0, 0, 0, 0, 0, 12)$.

Для каждой алгебры Ли этого списка в работе [5] выбран пример нильпотентной комплексной структуры и для нее найдены согласованные симплектические формы. Естественнее опираться на классификационный список M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina [7], в котором приведены все симплектические 6-мерные алгебры Ли и показано, что каждая нильпотентная алгебра Ли симплектоизоморфна одной их алгебр этого списка. Таким образом, мы будем рассматривать алгебры Ли теоремы 3.1 с симплектической структурой из списка [7] и для них искать все согласованные комплексные структуры. Мы получим явные выражения комплексных структур и исследуем свойства кривизны. Оказывается, что существуют многопараметрические семейства таких комплексных структур. Однако все они имеют ряд общих свойств. А именно: ассоциированная псевдокэлерова метрика является Риччи-плоской, тензор Римана имеет нулевую псевдориманову норму, тензор Римана имеет несколько ненулевых компонент, зависящих, только от двух или, самое большее, трех параметров.

Для шестимерной нильпотентная алгебры Ли $\mathfrak{g}$, допускающей комплексную структуру, размерности ее возрастающей центральной последовательности $\mathfrak{g}_k$ могут быть: $(2, 4, 6)$, $(2, 6)$, $(3, 6)$, $(4, 6)$ и 6. Последовательность этих размерностей будем называть *типом алгебры Ли*. В списке алгебр Ли теоремы 3.1 алгебры Ли типа $(2, 4, 6)$ стоят в начале – семь первых алгебр Ли.

3.1 Алгебры Ли типа $(2, 4, 6)$

Рассмотрим нильпотентные алгебры Ли, у которых последовательность идеалов $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}$ имеет размерности $(2, 4, 6)$. Легко видеть, что такая алгебра Ли типа $(2, 4, 6)$ раскладывается в прямую сумму двумерных подпространств:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z},$$

обладающих свойствами:

- $\mathcal{Z} = \mathfrak{g}_1$ – центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$,
- $\mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z} = \mathfrak{g}_2$,
- $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] \subset \mathcal{Z}$.

Будем далее считать, что в $\mathfrak{g}$ выбран базис $e_1, \dots, e_6$ так, что $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$ – это базисы подпространств $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ и $\mathcal{Z}$ соответственно.

Для любой нильпотентной комплексной структуры J на алгебре типа $(2, 4, 6)$ последовательность идеалов $\mathfrak{a}_k(J)$ совпадает с $\mathfrak{g}_k$, $k = 1, 2, 3$ и матрица J имеет вид (2). Кроме того, для такой комплексной структуры J имеем $C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}) = \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z} = \mathfrak{g}_2$.

Теорема 3.2. *Пусть шестимерная симплектическая алгебра Ли $(\mathfrak{g}, \omega)$ имеет тип $(2, 4, 6)$ и*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z},$$

где $\mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z} = C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g})$ – абелева подалгебра. Предположим, что подпространства $\mathfrak{a}$ и $\mathcal{Z}$ – ω-изотропны и ω-дуальны, а на $\mathfrak{b}$ форма ω невырождена. Тогда для любой согласованной с ω комплексной структуры J и связности Леви-Чивита ∇ соответствующей псевдоримановой метрики g_J имеют место свойства:

- $\nabla_X Y \in \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{a}$,
- $\nabla_X Y \in \mathcal{Z}, \quad \forall X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{b}$,
- $\nabla_X Y = 0, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$.

Доказательство. Пусть $X, Y \in \mathfrak{a}$. Если $\nabla_X Y$ имеет ненулевую компоненту из $\mathfrak{a}$, тогда существует вектор $JZ \in \mathcal{Z}$, такой, что $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. С другой стороны, $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =$
$= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle =$
$= \omega([X,Y], JZ) = 0$, поскольку $\omega(C^1\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_1(J)) = 0$. Пусть теперь $X \in \mathfrak{a}$ и $Y \in \mathfrak{b}$. Совершенно аналогично показывается, что $\nabla_X Y$ имеет нулевую компоненту из $\mathfrak{a}$. Предположим, что $\nabla_X Y$ имеет ненулевую компоненту из $\mathfrak{b}$. Тогда существует вектор $Z \in \mathfrak{b}$, что $JZ \in \mathfrak{b}$ и такой, что $\omega(\nabla_X Y, JZ) \neq 0$. В то же время, $2\omega(\nabla_X Y, JZ) = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =$
$= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle = \omega([X,Y], JZ) +$
$+ \omega([Z,X], JY) = 0$. Последнее равенство следует из того, что $Y, JY, Z, JZ \in \mathfrak{b} \subset C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g})$, тогда $[X,Y], [Z,X] \in \mathcal{Z}$ и $\omega(C^1\mathfrak{g} \oplus J(C^1\mathfrak{g}), \mathcal{Z}) = 0$. Рассмотрим третье утверждение. Пусть $X, Y \in \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$. Тогда для любого $Z \in \mathfrak{g}$, $2\langle \nabla_X Y, Z\rangle =$
$= \langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle =$
$= \omega([Z,X], JY) + \omega([Z,Y], JX) = 0$ по тем же аргументам, что и в предыдущем пункте.

Следствие 3.3. *В предположениях теоремы 3.2, если вектор X лежит в идеале $\mathfrak{a}_2(J)$ алгебры Ли, то $R(X,Y)Z = R(Z,Y)X = 0$, $\forall Y, Z \in \mathfrak{g}$. Если согласованная комплексная структура J имеет вид (2), то кривизна $R(X,Y)$ ассоциированной метрики не зависит от свободных параметров ψ_{31}, ψ_{32}, ψ_{41}, ψ_{42}.*

Отметим, что параметры ψ_{ij} комплексной структуры J связаны тремя условиями: согласованность, интегрируемость и $J^2 = -1$. Поэтому некоторые из указанных выше параметров могут выражаться через другие. Если в результате среди ψ_{31}, ψ_{32}, ψ_{41}, ψ_{42} остались независимые параметры, то их можно считать нулевыми, поскольку от них кривизна не зависит. Напомним, что, согласно следствию 1.8, кривизна $R(X,Y)$ ассоциированной метрики не зависит также от свободных параметров ψ_{51}, ψ_{52}, ψ_{53}, ψ_{54}, ψ_{61}, ψ_{62}, ψ_{63}, ψ_{64}.

Следствие 3.4. *В предположениях теоремы 3.2 для любых $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, $R(X,Y)Z \in \mathcal{Z}$. Поэтому псевдориманова норма тензора Римана равна нулю. В соответствии с разложением $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \oplus \mathcal{Z}$ выберем базисе $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$. Тогда тензор кривизны может иметь с точностью до симметрий только четыре ненулевые компоненты $R^5_{1,2,1}$, $R^6_{1,2,1}$, $R^5_{1,2,2}$, $R^6_{1,2,2}$.*

Аналогичные утверждения имеют место для алгебр Ли типа (2,6). Алгебра Ли типа (4,6) является прямым произведением четырехмерной алгебры Ли и $\mathbb{R}^2$. Случай (3,6) является наиболее сложным.

Теперь рассмотрим все шестимерные нильпотентные алгебры Ли типа $(2,4,6)$. В соответствии с теоремой 3.1 имеется 7 таких алгебр Ли, которые допускают псевдокэлерову структуру. Напомним, что номер у каждой алгебры соответствует ее номеру в списке работы [7].

1. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{14}$. Рассмотрим шестимерную группу Ли G_{14}, которая имеет алгебру Ли $\mathfrak{h}_{14}$, определенную следующими коммутационными соотношениями: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_5$. Легко видеть, что она имеет тип (2,4,6), $\mathcal{Z} = \mathfrak{g}_1 = \{e_5, e_6\}$, $\mathfrak{g}_2 = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$, $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}$. Согласно результатам [7], данная алгебра имеет три симплектических структуры:
$\omega_1 = -e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$,
$\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^6$,
$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$.

Левоинвариантные комплексные структуры на этой группе найдены в явном виде в работе Магнина [10] (алгебра $M1$). Показано, что группа Ли G_{14} имеет 10 параметрическое семейство левоинвариантных комплексных структур. Прямая проверка согласованности семейства комплексных структур на G_{14} показывает, что для первых двух симплектических форм не существует согласованных комплексных структур. Для формы ω_3 согласованная комплексная структура зависит от 6 параметров и имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} \psi_{11} & -\psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{42}\psi_{11}^2+\psi_{42}+2\psi_{41}\psi_{12}\psi_{11}}{\psi_{12}^2} & \psi_{41} & -\psi_{11} & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & 0 & 0 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{12} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ \psi_{51} & J_{52} & \psi_{42} & -\psi_{41} & \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{61} & \psi_{51} & \psi_{41} & \frac{\psi_{42}\psi_{11}^2+\psi_{42}+2\psi_{41}\psi_{12}\psi_{11}}{\psi_{12}^2} & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $J_{52} = \frac{2\psi_{11}\psi_{43}\psi_{42}\psi_{41} - 2\psi_{11}\psi_{43}^2\psi_{51} + \psi_{42}^2\psi_{11}^2 + \psi_{42}^2 + \psi_{43}^2\psi_{41}^2 - \psi_{43}^2\psi_{61}^2}{(\psi_{11}^2+1)\psi_{43}}$.

Тензор кривизны метрики $g(X,Y) = \omega_3(X, JY)$ имеет, с точностью до симметрий, четыре ненулевых компоненты: $R^5_{1,2,1} = -\frac{(\psi_{11}^2+1)\psi_{11}}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,2} = \psi_{11}^2 + 1$, $R^6_{1,2,2} = -\frac{(\psi_{11}^2+1)\psi_{11}}{\psi_{12}}$, $R^6_{1,2,1} = \frac{(\psi_{11}^2+1)^2}{\psi_{12}^2}$. Мы видим, что тензор кривизны зависит только от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}, что вполне соответствует теореме 3.2 и следствиям 3.3 и 1.8. После опускания индекса, получаем одну компоненту кривизны $R_{1,2,1,2} = \frac{1+\psi_{11}^2}{\psi_{12}}$. Параметры ψ_{ij} метрического тензора g и комплексной структуры J, которые на кривизну не влияют, естественно считать нулевыми.

Определение. *Пусть $(g(\psi), J(\psi))$ – многопараметрическое семейство псевдокэлеровых структур. Пседокэлерову структуру (g, J) на группе Ли G будем называть полуканонической, если метрический тензор g_{ij} зависит только от тех параметров ψ, которые влияют на кривизну R_{ijk}^l. Канонической будем называть такую псевдокэлерову структуру (g, J) на группе Ли G, у которой метрический тензор g_{ij} зависит только от тех параметров, которые влияют на кривизну R_{ijkl}.*

Тогда получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ на группе G_{14}:

$J(e_2) = -\psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,
$J(e_3) = -\psi_{11}\, e_3 + \psi_{12}\, e_4$,
$J(e_6) = \psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Каноническая псевдокэлерова метрика:

$$g=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & -\psi_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_{11} & \psi_{12} \\ 0 & 0 & \psi_{12} & \psi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{11} & \frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & 0 & 0 \\ -\frac{\psi_{11}^2+1}{\psi_{12}} & \psi_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\psi_{11} & \psi_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

2. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{21}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{21}$ имеет две симплектических структуры [7]. Прямая проверка показывает, что для первой структуры $\omega_1 = e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 - e^3\wedge e^4 - e^3\wedge e^5$ нет согласованных комплексных структур. Рассмотрим вторую симплектическую структуру

$$\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4.$$

Имеется многопараметрическое семейство согласованных комплексных структур. С учетом результатов теоремы 3.2 и следствий 3.3 и 1.8, прямыми вычислениями получаем, что тензор кривизны ассоциированной метрики $g(X,Y) = \omega(X, JY)$ зависит от двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$ и имеет следующие ненулевые компоненты: $R_{1,2,1}^6 = 1 + \psi_{11}^2$, $R_{1,2,2}^6 = \psi_{12}\psi_{11}$, $R_{1,2,1}^5 = \psi_{12}\psi_{11}$, $R_{1,2,2}^5 = \psi_{12}^2$. Поэтому полуканоническая комплексная структуру задается следующим образом:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,
$J(e_4) = -\psi_{12}\, e_3 - \psi_{11}\, e_4$,
$J(e_6) = -\psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2} = -\psi_{12}$. Тогда, полагая $\psi_{12} = -a \neq 0$ и $\psi_{11} = 0$, получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику кривизны $R_{1,2,1,2} = a$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{21}$:

$J(e_2) = -a\, e_1,\ J(e_4) = a\, e_3,\ J(e_6) = a\, e_5,$

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ -a^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{13}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = e_6$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{13}$ имеет [7] три симплектических структуры. Левоинвариантные комплексные структуры на этой группе найдены в явном виде в работе Магнина [10] (алгебра $M6$). Для использования результатов Магнина переобозначим векторы базиса $e_3 := -e_3$, $e_5 := -e_5$ и получаем коммутационные соотношения в списке Магнина: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_1, e_4] = e_6$, $[e_2, e_3] = -e_6$. Симплектические структуры:

$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 - (\lambda - 1)e^3 \wedge e^4$,
$\omega_2 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^5$,
$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 - \frac{1}{2}e^2 \wedge e^5 + \frac{1}{2}e^3 \wedge e^4$.

Первый случай. Рассмотрим форму $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 - (\lambda - 1)e^3 \wedge e^4$. Имеется многопараметрическое семейство согласованных комплексных структур. С учетом результатов теоремы 3.2 и следствий 3.3 и 1.8, прямыми вычислениями получаем, что тензор кривизны ассоциированной метрики $g_1(X,Y) = \omega_1(X, J_1Y)$ зависит от двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$ и имеет следующие ненулевые компоненты: $R_{1,2,2}^6 = \frac{(3\lambda-1)\psi_{12}\psi_{11}}{\lambda-1}$, $R_{1,2,2}^5 = -\frac{(1+\lambda)(3\lambda-1)\psi_{12}^2}{\lambda(\lambda-1)}$, $R_{1,2,1}^6 = \frac{(3\lambda-1)(1+\psi_{11}^2)}{\lambda^2-1}$, $R_{1,2,1}^5 = -\frac{(3\lambda-1)\psi_{12}\psi_{11}}{\lambda(\lambda-1)}$. Поэтому полуканоническая комплексная структура задается следующим образом: $J_1(e_2) = (1+\lambda)\psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$, $J_1(e_4) = \psi_{12}\, e_3 - \psi_{11}\, e_4$, $J_1(e_6) = \frac{(1+\lambda)\psi_{12}}{\lambda}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$. Соответствующая псевдокэлерова метрика находится по формуле $g_1 = \omega_1 \circ J_1$.

После опускания индекса получается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{(3\lambda-1)\psi_{12}}{\lambda-1}$. Тогда, полагая $\psi_{12} = a \neq 0$ и $\psi_{11} = 0$, получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику кривизны $R_{1,2,1,2} = -\frac{(3\lambda-1)a}{\lambda-1}$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{13}$:

$J_1(e_2) = (1+\lambda)a\, e_1,\ J(e_4) = a\, e_3,$
$J(e_6) = \frac{(1+\lambda)a}{\lambda}\, e_5,$
$g_1(X,Y) = \omega_1(X, J_1Y).$

Второй случай. Для симплектической формы $\omega_2 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^5$ нет согласованных комплексных структур.

Третий случай. Симплектическая структура: $\omega_3 = e^1\wedge e^6 + e^2\wedge e^4 - \frac{1}{2}e^2\wedge e^5 + \frac{1}{2}e^3\wedge e^4$. Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}:

$R^5_{1,2,2} = \frac{4\psi_{12}^2}{3}$, $R^5_{1,2,1} = \frac{4\psi_{12}\psi_{11}}{3}$, $R^6_{1,2,2} = -\frac{2\psi_{12}\psi_{11}}{3}$, $R^6_{1,2,1} = -\frac{2(1+\psi_{11}^2)}{3}$. Поэтому полуканоническая комплексная структуру задается следующим образом:

$J_3(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2,$
$J_3(e_3) = \psi_{11}\, e_3 - 3\frac{{\psi_{11}}^2+1}{2\,\psi_{12}}\, e_4 - 3\frac{{\psi_{11}}^2+1}{\psi_{12}}\, e_5,$
$J_3(e_4) = \frac{2\psi_{12}}{3}\, e_3 - \psi_{11}\, e_4 - 4\,\psi_{11}\, e_5 + \frac{{\psi_{11}}^2+1}{\psi_{12}}\, e_6,$
$J_3(e_6) = 2\,\psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6.$

Соответствующий метрический тензор получается по формуле $g_3(X,Y) = \omega_3(X, J_3Y)$. При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2} = \frac{2\psi_{12}}{3}$. Тогда, полагая $\psi_{12} = -a \neq 0$ и $\psi_{11} = 0$, получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику кривизны $R_{1,2,1,2} = -\frac{2\,a}{3}$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{13}$ с J_3-инвариантными площадками $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_5, e_6\}$:

$J_3(e_2) = -a\, e_1,$
$J_3(e_3) = \frac{3}{2\,a}\, e_4 + \frac{3}{a}\, e_5,$
$J_3(e_4) = -\frac{2a}{3}\, e_3 - \frac{1}{a}\, e_6,$
$J_3(e_6) = -2\, a\, e_5,$

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a} & \frac{1}{2a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & \frac{3}{4a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{a} & 0 & 0 & \frac{a}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{15}$. Коммутационные соотношения: $[e^1, e^2] = e^4$, $[e^1, e^3] = e^6$, $[e^2, e^4] = e^5$. Группа Ли имеет [7] три симплектические структуры:

$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4,$
$\omega_2 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5,$
$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4.$

Это алгебра Ли $M7$, рассмотренная в работе Магнина [10]. Чтобы увидеть это, сделаем замену: $e_1 := E_2$, $e_2 := -E_1$, $e_5 := -E_6$, $e_6 := E_5$. Тогда $[E_1, E_2] = E_4$, $[E_1, E_3] = E_6$, $[E_2, E_4] = E_5$. Симплектические структуры принимают вид:

$\omega_1 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 + E^3 \wedge E^4,$
$\omega_2 = -E^1 \wedge E^4 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^6,$
$\omega_3 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^4.$

Первый случай. Симплектическая структура: $\omega_1 = E^2 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 + E^1 \wedge E^6 + E^3 \wedge E^4$

Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}. После опускания индекса остается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{\psi_{11}^4 + \psi_{11}^3\,\psi_{12} + 2\,\psi_{11}^2 - 2\,\psi_{12}^2\,\psi_{11}^2 + \psi_{11}\,\psi_{12} + 1}{\psi_{12}\,(-2\,\psi_{11}\psi_{12} + 1 + \psi_{11}^2)}$. Поэтому каноническая комплексная структура J_1 задается следующим образом:

$J_1(E_2) = \psi_{12}\, E_1 - \psi_{11}\, E_2,$
$J_1(E_4) = \frac{1 + 2\,{\psi_{11}}^2 + {\psi_{11}}^4}{\psi_{12}\,(-2\,\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2)}\, E_3 +$
$+ \frac{{\psi_{11}}^3 - {\psi_{11}}^2\psi_{12} + \psi_{11} + \psi_{12}}{-2\,\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2}\, E_4,$
$J_1(E_5) = -\frac{-\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, E_5 + \frac{1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, E_6.$

Метрический тензор псевдокэлеровой структуры находится по формуле $g_1 = \omega_1 \circ J_1$.

Второй случай. Нет комплексных структур, согласованных с формой ω_2.

Третий случай. Симплектическая структура $\omega_3 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^4$

Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и ψ_{12}. После опускания верхнего индекса остается одна компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{3 + 4\,\psi_{11}\psi_{12} - 8\,\psi_{11}^2\psi_{12}^2 + 4\,\psi_{12}\psi_{11}^3 + 6\,\psi_{11}^2 + 3\,\psi_{11}^4}{8\,\psi_{11}\psi_{12}^2}$. Тогда получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{15}$:

$J_3(E_2) = \psi_{12}\, E_1 - \psi_{11}\, E_2,$
$J_3(E_3) = \frac{1 - {\psi_{11}}^2}{2\,\psi_{11}}\, E_3 + \frac{{\psi_{12}}^2}{2\,\psi_{11}}\, E_4,$
$J_3(E_6) = -\psi_{12}\, E_5 - \psi_{11}\, E_6.$

Ненулевые компоненты метрического тензора: $g_{15} = \frac{1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}$, $g_{16} = -\psi_{11}$, $g_{25} = \psi_{11}$, $g_{26} = -\psi_{12}$, $g_{33} = -\frac{{\psi_{12}}^2}{2\,\psi_{11}}$, $g_{34} = \frac{1 - {\psi_{11}}^2}{2\,\psi_{11}}$, $g_{44} = -\frac{1 + 2\,{\psi_{11}}^2 + {\psi_{11}}^4}{2\,{\psi_{12}}^2\psi_{11}}$.

5. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{11}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_4] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$, $[e_2, e_4] = e_6$, Это алгебра Ли $M8$, рассмотренная в работе Магнина [10]. Симплектическая структура:

$\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4 + \lambda e^2 \wedge e^6$

Тензор кривизны зависит от параметра λ и еще двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$. Согласованная комплексная структура имеет J-инвариантные площадки $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$, однако ее вид является достаточно сложным:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2,$
$J(e_3) = -\frac{2\,{\psi_{12}}^2 - 3\,\psi_{11}\,\lambda\,\psi_{12} + \lambda^2(1 + {\psi_{11}}^2)}{\lambda\,\psi_{12}}\, e_3 +$
$+ \frac{{\psi_{12}}^2 - 2\,\psi_{11}\,\lambda\,\psi_{12} + \lambda^2(1 + \psi_{11}^2)}{\lambda\,\psi_{12}}\, e_4,$
$J(e_5) = \frac{\psi_{11}\,\psi_{12} - \lambda(1 + \psi_{11}^2)}{\psi_{12}}\, e_5 + \frac{1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, e_6.$

Псевдокэлерова метрика находится по формуле $g = \omega \circ J$.

При опускании индекса тензора кривизны получается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = -\frac{\lambda^2(\psi_{11}^2 + 1) - 5\lambda\psi_{12}\,\psi_{11} + 4\psi_{12}^2}{\lambda\psi_{12}}$.

6. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{10}$. Коммутационные соотношения: $[e^1, e^2] = e^4$, $[e^1, e^4] = e^5$, $[e^1, e^3] = e^6$, $[e^2, e^4] = e^6$, Симплектическая структура: $\omega = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 - e^3 \wedge e^4 - e^2 \wedge e^6$.

Тензор кривизны зависит от двух параметров ψ_{11} и $\psi_{12} \neq 0$. Тогда получаем следующую каноническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g = \omega \circ J$:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2,$
$J(e_3) = -\frac{\psi_{12} + 3\,{\psi_{11}}^2\psi_{12} + 2\,{\psi_{12}}^2\psi_{11} + \psi_{11} + {\psi_{11}}^3}{2\,{\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2}\, e_3 -$
$- \frac{({\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2)\psi_{12}}{2\,{\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2}\, e_4,$
$J(e_5) = \frac{\psi_{12}\,\psi_{11} + 1 + {\psi_{11}}^2}{\psi_{12}}\, e_5 + \frac{1 + \psi_{11}^2}{\psi_{12}}\, e_6.$

При опускании индекса получается одна ненулевая компонента тензора Римана $R_{1,2,1,2} =$
$= \frac{{\psi_{11}}^4 + 4\,\psi_{12}\,{\psi_{11}}^3 + 3\,{\psi_{11}}^2{\psi_{12}}^2 + 2\,{\psi_{11}}^2 + 4\,\psi_{11}\,\psi_{12}}{\psi_{12}\,(2\,{\psi_{12}}^2 + 2\,\psi_{11}\,\psi_{12} + 1 + {\psi_{11}}^2)} +$

$+\frac{-2\,\psi_{11}\,\psi_{12}{}^3+3\,\psi_{12}{}^2+1-2\,\psi_{12}{}^4}{\psi_{12}\,(2\,\psi_{12}{}^2+2\,\psi_{11}\,\psi_{12}+1+\psi_{11}{}^2)}$.

7. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{12}$. Коммутационные соотношения $[e_1,e_2]=e_4$, $[e_1,e_4]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_6$, $[e_2,e_3]=-e_5$, $[e_2,e_4]=e_6$. Симплектическая структура $\omega=\lambda e^1\wedge e^5+e^2\wedge e^6+(\lambda+1)e^3\wedge e^4$ Это алгебра Ли $M10$, рассмотренная в работе Магнина [10]. Сделаем замену $e_1=-E_1$, $e_2=E_2$, $e_3=-E_4$, $e_4=-E_3$, $e_5=E_5$, $e_6=E_6$, для приведения коммутационных соотношений к виду $M10$: $[E_1,E_2]=E_3$, $[E_1,E_3]=E_5$, $[E_1,E_4]=E_6$, $[E_2,E_4]=E_5$, $[E_2,E_3]=-E_6$. Тогда симплектическая структура принимает вид

$\omega=-\lambda E^1\wedge E_5+E^2\wedge E^6+(\lambda+1)E^3\wedge E^4$.

В этом случае получаем следующую каноническую комплексную структуру и псевдокэлерову метрику $g=\omega\circ J$, зависящую от λ и от одного параметра $\psi_{12}\neq 0$:

$J(e_1)=-\frac{1}{\psi_{12}}\,e_2,\quad J(e_2)=\psi_{12}\,e_1,$

$J(e_3)=-\frac{\psi_{12}{}^2\lambda-1}{(\lambda-1)\psi_{12}}\,e_4,\quad J(e_4)=\frac{(\lambda-1)\psi_{12}}{\psi_{12}{}^2\lambda-1}\,e_3,$

$J(e_5)=\lambda\,\psi_{12}\,e_6,\quad J(e_6)=-\frac{1}{\lambda\,\psi_{12}}\,e_5.$

Тензор кривизны имеет следующие ненулевые компоненты: $R^6_{1,2,2}=\frac{\lambda(\psi_{12}^2(3\lambda+1)-\lambda-3)}{\lambda^2-1}$, $R^5_{1,2,1}=-\frac{3\psi_{12}^2\lambda-\lambda-3+\psi_{12}^2}{(\lambda^2-1)\psi_{12}^2}$. После опускания индекса остается одна компонента $R_{1,2,1,2}=-\frac{(3\lambda\psi_{12}^2-\lambda-3+\psi_{12}^2)\lambda}{(\lambda^2-1)\psi_{12}}$.

3.1 Алгебры Ли типа $(2,6)$

Имеется три алгебры данного типа.

8. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{24}$. Коммутационные соотношения $[e_1,e_4]=e_6$, $[e_2,e_3]=e_5$. Двухступенно нильпотентная алгебра Ли. Прямое произведение двух трехмерных алгебр Гейзенберга $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_3\times\mathfrak{h}_3$ Центр и первый производный идеал: $\mathcal{Z}=\{e_5,\ e_6\}=C^1(\mathfrak{g})$. Симплектическая структура: $\omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4$.

Тензор кривизны зависит от двух параметров $\psi_{11}\neq 0$ и $\psi_{12}\neq 0$. Поэтому получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g=\omega\circ J$:

$J(e_2)=\psi_{12}\,e_1-\psi_{11}\,e_2,$

$J(e_4)=\frac{\psi_{12}^2}{2\psi_{11}}\,e_3-\frac{\psi_{11}^2-1}{2\,\psi_{11}}\,e_4,$

$J(e_6)=-\psi_{12}\,e_5-\psi_{11}\,e_6.$

Ненулевые компоненты тензора кривизны: $R^6_{1,2,2}=-\psi_{11}^2$, $R^6_{1,2,1}=-\frac{(1+\psi_{11}^2)\psi_{11}}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,2}=-\psi_{12}\psi_{11}$, $R^5_{1,2,1}=-\psi_{11}^2$. При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2}=\psi_{11}$. Тогда, полагая $\psi_{12}=1$ и $\psi_{11}=b$, получаем следующую каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2}=b$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{24}$:

$J(e_2)=e_1-b\,e_2,$

$J(e_4)=\frac{1}{2b}\,e_3-\frac{b^2-1}{2\,b}\,e_4,$

$J(e_6)=-\,e_5-b\,e_6.$

$g(X,Y)=\omega(X,JY.$

9. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{17}$. Коммутационные соотношения: $[e^1,e^3]=e^5$, $[e^1,e^4]=e^6$, $[e^2,e^3]=e^6$, Двустепенно нильпотентная, $\mathcal{Z}=\{e_5,e_6\}=C^1(\mathfrak{g})$. Симплектическая структура:

$\omega=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^4$

Тензор кривизны зависит от двух параметров $\psi_{12}\neq 0$ и ψ_{11}. Поэтому получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g=\omega\circ J$:

$J(e_2)=\psi_{12}\,e_1-\psi_{11}\,e_2,$

$J(e_4)=-\frac{\psi_{12}}{2}\,e_3-\psi_{11}\,e_4,$

$J(e_6)=-\psi_{12}\,e_5-\psi_{11}\,e_6.$

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^5_{1,2,1}=\psi_{11}\psi_{12}$, $R^6_{1,2,1}=1+\psi_{11}^2$, $R^5_{1,2,2}=\psi_{12}^2$, $R^6_{1,2,2}=\psi_{11}\psi_{12}$. При опускании индекса получается всего одна (с точностью до симметрий) ненулевая компонента тензора кривизны $R_{1,2,1,2}=-\psi_{12}$. Тогда полагая $\psi_{12}=a$ и $\psi_{11}=0$, получаем следующую каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2}=-a$ на алгебре Ли $\mathfrak{h}_{24}$:

$$g=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1/a & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a\\ 0 & 0 & 2/a & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & a/2 & 0 & 0\\ 1/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{16}$. Комплексная алгебра Гейзенберга. Коммутационные соотношения: $[e_1,e_2]=e_5$, $[e_1,e_3]=e_6$, $[e_2,e_4]=e_6$, $[e_3,e_4]=-e_5$. Имеет [7] две симплектические структуры:

$\omega_1=e^1\wedge e^6+e^2\wedge e^3-e^4\wedge e^5,$

$\omega_2=e^1\wedge e^6-e^2\wedge e^3+e^4\wedge e^5.$

Это алгебра $M5$, рассмотренная в работе Магнина [10], поэтому сделаем замену: $e_1=E_1$, $e_2=E_3$, $e_3=E_4$, $e_4=E_2$, $e_5=E_5$, $e_6=E_6$. Новые коммутационные соотношения: $[E^1,E^3]=E^5$, $[E^1,E^4]=E^6$, $[E^2,E^3]=-E^6$, $[E^2,E^4]=E^5$. Симплектические структуры принимают вид:

$\omega_1=E^1\wedge E^6+E^3\wedge E^4-E^2\wedge E^5,$

$\omega_2=E^1\wedge E^6-E^3\wedge E^4+E^2\wedge E^5.$

Пусть $Z_1=\frac{1}{2}(E_1+iE_2)$, $Z_2=\frac{1}{2}(E_3-iE_4)$, $Z_3=\frac{1}{2}(E_5-iE_6)$, тогда коммутационные соотношения выражаются одной формулой $[Z_1,Z_2]=Z_3$. Оператор комплексной структуры J_0 комплексной алгебры Ли $M5$ действует следующим образом: $J_0(E_1)=-E_2$, $J_0(E_3)=E_4$, $J_0(E_5)=E_6$. Комплексная структура J_0 не согласована с формой $\omega_1=E^1\wedge E^6-E^2\wedge E^5+E^3\wedge E^4$, но согласована с формой $\omega_2=E^1\wedge E^6+E^2\wedge E^5-E^3\wedge E^4$. При этом, псевдокэлерова метрика имеет матрицу:

$$g_0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и ненулевые компоненты тензора кривизны: $R^6_{1,2,1}=1$, $R^5_{1,2,2}=1$, $R_{1,2,1,2}=-1$.

Первый случай. Симплектическая структура: $\omega_1 = E^1 \wedge E^6 - E^2 \wedge E^5 + E^3 \wedge E^4$. Тензор кривизны зависит от двух параметров: $\psi_{12} \neq 0$ и ψ_{11}. Поэтому получаем следующую каноническую комплексную структуру J_1 и псевдокэлерову метрику $g_1 = \omega \circ J_1$:

$J_1(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,

$J_1(e_3) = -\frac{\psi_{11}\,(1+{\psi_{11}}^2-{\psi_{12}}^2)}{{\psi_{12}}^2+1+{\psi_{11}}^2}\, e_3 - \frac{2(1+{\psi_{11}}^2)\psi_{12}}{{\psi_{12}}^2+1+{\psi_{11}}^2}\, e_4$,

$J_1(e_6) = \psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^5_{1,2,1} = \frac{\psi_{11}(1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2)}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,2} = 1 + \psi_{11}^2 + \psi_{12}^2$, $R^6_{1,2,1} = -\frac{(1+\psi_{11}^2)(1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2)}{\psi_{12}^2}$, $R^6_{1,2,2} = -\frac{\psi_{11}(1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2)}{\psi_{12}}$.

После опускания индекса остается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = \frac{1+\psi_{11}^2+\psi_{12}^2}{\psi_{12}}$.

Второй случай. Симплектическая структура: $\omega_2 = E^1 \wedge E^6 + E^2 \wedge E^5 - E^3 \wedge E^4$. Одно из условий согласованности выражается равенством $\psi_{12}^2 = 1$. Далее пусть $\psi_{12} = 1$. Тогда полуканоническая комплексная структура действует следующим образом:

$J_2(e_2) = e_1$,

$J_2(e_4) = \psi_{34}\, e_3 - \psi_{33}\, e_4$,

$J_2(e_6) = -e_5$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,1} = -\mathrm{sign}(\psi_{12})\psi_{34}$, $R^5_{1,2,2} = -\mathrm{sign}(\psi_{12})\psi_{34}$. После опускания индекса остается одна ненулевая компонента $R_{1,2,1,2} = \mathrm{sign}(\psi_{12})\psi_{34}$. Полагая ψ_{33} и $\psi_{34} = a$, получаем (при $\psi_{12} = 1$) следующую каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2} = a$ на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{16}, \omega_2)$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Полученная комплексная структура является биинвариантной (комплексная группа Ли) только в том случае, когда $\psi_{33} = 0$ и $\psi_{34} = -1$, т. е. когда $J_2 = J_0$.

3.1. Алгебры Ли типа $(4, 6)$

В этом классе всего одна алгебра.

11. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{25}$. Алгебра Ли с одним коммутационным соотношением $[e_1, e_2] = e_3$. Алгебра Ли такого типа является прямым произведением трехмерной нильпотентной алгебры Ли Гейзенберга $\mathfrak{h}_3$ и $\mathbb{R}^3$. Симплектическая структура: $\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4 + e^5 \wedge e^6$.

В этом случае имеется 8-параметрическое семейство согласованных комплексных структур и псевдокэлеровых метрик. Все метрики являются плоскими. Поэтому укажем только наиболее простые выражения без параметров:

$J(e_1) = e_2, \quad J(e_3) = e_4, \quad J(e_5) = e_6$.

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.1 Алгебры Ли типа $(3, 6)$

Имеется две алгебры Ли типа (3,6), допускающие псевдокэлерову структуру.

12. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{18}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_4$, $[e_1, e_3] = e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$. Тогда $\mathcal{Z} = \mathfrak{g}_1 = \{e_4, e_5, e_6\}$, $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$. Согласно результатам [7], данная алгебра имеет три симплектических структуры:

$\omega_1(\lambda) = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^5 + (\lambda - 1)\, e^3 \wedge e^4$,
$\lambda \neq 0, 1$,

$\omega_2(\lambda) = e^1 \wedge e^5 + \lambda e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 - 2\lambda e^3 \wedge e^4$,
$\lambda \neq 0$,

$\omega_3 = -e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + 2e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5$.

Это алгебра Ли $M3$ в классификации Магнина [10]. Поэтому для нахождения комплексных структур, согласованных с симплектическими формами воспользуемся результатами работы [10], где найдены в явном виде комплексные структуры на данной группе Ли. Укажем только такие псевдокэлеровы структуры, от параметров которых зависит тензор кривизны.

1. Первый случай. Симплектическая структура: $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + \lambda e^2 \wedge e^5 + (\lambda - 1)e^3 \wedge e^4$. В этом случае согласованные комплексные структуры существуют только при $\lambda = -1$, т. е. для $\omega_1 = e^1 \wedge e^6 - e^2 \wedge e^5 - 2\, e^3 \wedge e^4$. Получаем следующую полуканоническую комплексную структуру J и псевдокэлерову метрику $g = \omega \circ J$:

$J_1(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,

$J_1(e_4) = \psi_{34}\, e_3 - \psi_{33}\, e_4$,

$J_1(e_6) = \psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,1} = -\frac{2\psi_{34}(1+\psi_{11}^2)}{\psi_{12}}$, $R^6_{1,2,2} = -2\psi_{11}\psi_{34}$, $R^5_{1,2,2} = 2\psi_{12}\psi_{34}$, $R^5_{1,2,1} = 2\psi_{11}\psi_{34}$. После опускания верхнего индекса получаем одну ненулевую компоненту, $R_{1,2,1,2} = 2\psi_{34}$. Полагая $\psi_{34} = a$, $\psi_{12} = 1$, $\psi_{11} = 0$ и $\psi_{33} = 0$, получаем каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2} = 2\,a$ на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{18}, \omega_1)$:

$J_1(e_2) = e_1, \quad J_1(e_4) = a\, e_3, \quad J_1(e_6) = e_5$.

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2\,a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\,a & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Второй случай. Симплектическая структура: $\omega_2 = e^1 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^6 + \lambda e^1 \wedge e^6 - \lambda e^2 \wedge e^5 - 2\lambda e^3 \wedge e^4$. Из условий интегрируемости и согласованности следует, в частности, что $\psi_{12}^2 = 1$. Берем случай $\psi_{12} = 1$. Тогда семейство согласованных комплексных структур принимает вид:

$J_2(e_2) = e_1$,

$J_2(e_4) = \psi_{34}\, e_3 - \psi_{33}\, e_4$,

$J_2(e_6) = e_5$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,2} = -\frac{2\lambda\psi_{34}}{\lambda^2+1}$, $R^6_{1,2,1} = -\frac{2\lambda^2\psi_{34}}{\lambda^2+1}$, $R^5_{1,2,1} = -\frac{2\lambda\psi_{34}}{\lambda^2+1}$, $R^5_{1,2,2} = \frac{2\lambda^2\psi_{34}}{\lambda^2+1}$. После опускания индекса получаем одну ненулевую компоненту, $R_{1,2,1,2} = 2\lambda\psi_{34}$. Полагая $\psi_{34} = a$ и $\psi_{33} = 0$, получаем каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2} = 2a\lambda$ на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{18}, \omega_2)$:

$J_2(e_2) = e_1, \quad J_2(e_4) = a\, e_3, \quad J_2(e_6) = e_5.$

$$g_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\lambda \\ 0 & 0 & \frac{2\lambda}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda a & 0 & 0 \\ -\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Третий случай.

$\omega_3 = -e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + 2e^3 \wedge e^4 + e^3 \wedge e^5$.

В этом случае согласованная комплексная структура принимает вид:

$J_3(e_1) = \psi_{46}^{-1} e_3$,

$J_3(e_2) = -3\,\psi_{46}\, e_1 - \psi_{25}^{-1} e_4 + \psi_{25}^{-1} e_5$,

$J_3(e_3) = -\psi_{46}\, e_1$,

$J_3(e_4) = 3\,\psi_{25}\, e_2 - 9\,\psi_{25}\, e_3 + 2\,\psi_{46}^{-1} e_6$,

$J_3(e_5) = \psi_{25}\, e_2 - 3\,\psi_{25}\, e_3 + \psi_{46}^{-1} e_6$,

$J_3(e_6) = \psi_{46}\, e_4 - 3\,\psi_{46}\, e_5$.

Первый J-инвариантный идеал $\mathfrak{a}_1(J)$ порожден векторами e_6 и $\psi_{46}e_4 - 3\psi_{46}e_5$.

Ненулевые компоненты тензора Римана: $R^6_{1,2,1} = -\frac{6\psi_{25}}{\psi_{46}}$, $R^5_{1,2,2} = 54\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^5_{1,2,3} = 18\psi_{46}\psi_{25}$, $R^4_{1,2,3} = -6\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^6_{1,3,1} = -\frac{2\psi_{25}}{\psi_{46}}$, $R^5_{1,3,2} = 18\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^4_{1,2,2} = -18\psi_{46}\psi_{25}$, $R^4_{1,3,2} = -6\psi_{46}\psi_{25}$,

$R^5_{1,3,3} = 6\psi_{46}\psi_{25}$, $R^4_{1,3,3} = -2\psi_{46}\psi_{25}$.

После опускания индекса получаем три ненулевых компоненты кривизны: $R_{1,2,1,3} = 6\psi_{25}$, $R_{1,3,1,3} = 2\psi_{25}$, $R_{1,2,1,2} = 18\psi_{25}$.

Полагая $\psi_{25} = a$ и $\psi_{46} = 1$, получаем каноническую псевдокэлерову метрику на алгебре Ли $(\mathfrak{h}_{18}, \omega_3)$:

$$g_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2\,a^{-1} & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 18\,a & 6\,a & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 6\,a & 2\,a & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_{23}$. Коммутационные соотношения: $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_6$. Имеется [7] три различных симплектических структуры:

$\omega_1 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$,

$\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^6 + e^3 \wedge e^5$ и

$\omega_3 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^6 - e^3 \wedge e^5$.

Для первых двух симплектических структур не существует согласованных комплексных структур. Для третьей симплектической структуры ω_3 существует семейство согласованных комплексных структур, зависящих от нескольких параметров. Будет удобно перенумеровать базисные векторы следующим образом: $e_2 := e_1$, $e_3 := -e_2$, $e_1 := e_3$, тогда $[e_1, e_3] = -e_5$, $[e_2, e_3] = e_6$ и

$\omega_3 = e^1 \wedge e^6 + e^2 \wedge e^5 + e^3 \wedge e^4$.

Легко видеть, что данная алгебра Ли получается из $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}\{e_1, e_2, e_5, e_6\}$ полупрямым произведением с $\mathbb{R}e_3$ и затем прямым произведением с $\mathbb{R}e_4$, $\mathfrak{g}_{23} = \mathbb{R}^4 \rtimes \mathbb{R}e_3 \times \mathbb{R}e_4$.

Семейство комплексных структур, параметры которого влияют на кривизну, действует на инвариантных площадках $\{e_1, e_2\}$, $\{e_3, e_4\}$ и $\{e_5, e_6\}$ следующим образом:

$J(e_2) = \psi_{12}\, e_1 - \psi_{11}\, e_2$,

$J(e_4) = \psi_{34}\, e_3 - \psi_{33}\, e_4$,

$J(e_6) = -\psi_{12}\, e_5 - \psi_{11}\, e_6$.

Тензор кривизны зависит от четырех параметров и имеет следующие ненулевые компоненты: $R^6_{1,2,1} = \frac{\psi_{34}(1+\psi_{11}^2)}{\psi_{12}}$, $R^5_{1,2,1} = \psi_{11}\psi_{34}$, $R^5_{1,2,2} = \psi_{12}\psi_{34}$. После опускания индекса остается одна компонента $R_{1,2,1,2} = -\psi_{34}$.

Полагая $\psi_{34} = -a$, $\psi_{12} = 1$, $\psi_{11} = 0$ и $\psi_{33} = 0$, получаем каноническую псевдокэлерову структуру кривизны $R_{1,2,1,2} = a$:

$J(e_2) = e_1, \quad J(e_4) = -a\, e_3, \quad J(e_6) = -e_5.$

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & a^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Литература

[1] Алексеевский, Д. В. *Строение однородных римановых пространств с нулевой кривизной Риччи* / Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд // Функц. анализ и его прил. – 1975. – Т. 9:2. – С. 5 – 11

[2] Andrada, A. *Product structures on four dimensional solvable Lie algebras* / A. Andrada, M. L. Barberis, I. G. Dotti, G. P. Ovando // Homology Homotopy Appl. – 2005. – Vol. 7. – P. 9 — – 37. (arXiv, math.RA/0402234).

[3] Benson, C. *Kähler and symplectic structures on nilmanifold* / C. Benson, C. S. Gordon // Topology. – 1988. – Vol. 27. – P. 513 – 518.

[4] Chu, B.-Y. *Symplectic homogeneous spaces* / B.-Y. Chu // Trans. Amer. Math. Soc. – 1974. – Vol. 197. – P. 145 – 159,

[5] Cordero, L. A., Fernández M., Ugarte L. *Pseudo-Kähler metrics on six-dimensional nilpotent Lie algebras* / L. A. Cordero, M. Fernández, L. Ugarte // J. of Geom. and Phys. – 2004. – Vol. 50. – P. 115 – 137.

[6] Fino, A. *Families of strong KT structures in six dimensions* / A. Fino, M. Parton, S. Salamon

// [Электронный ресурс]. – Режим доступа: arXiv:math/0209259v1 [math.DG], свободный.

[7] Goze, M. *Symplectic or contact structures on Lie groups* / M. Goze, Y. Khakimdjanov, A. Medina // Differential Geom. Appl. – 2004. – Vol. 21, no. 1. – P. 41 – 54.

[8] Корнев, Е. С. *Почти комплексные структуры и метрики на группах Ли размерности 4* / Е. С. Корнев. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2010. – 156 стр.

[9] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси, К. Намидзу – М.: Наука, 1981. – Т. 2. – 416 с.

[10] Magnin, L. *Complex structures on indecomposable 6-dimensional nilpotent real Lie algebras* / L. Magnin // Int. J. of Algebra and Computation. – 2007. – Vol. 17, no. 1. – P. 77 – 113.

[11] Ovando, G. *Complex, symplectic and Kaehler structures on four dimensional Lie groups* / G. Ovando // Rev. U.M.A. – 2004. – Vol. 45(2). – P. 55 – 68. (arXiv:math/0309146v1 [math.DG])

[12] Ovando, G. *Invariant pseudo Kaehler metrics in dimension four* / G. Ovando // J. of Lie Theory. – 2006. – Vol. 16(2). – P. 371 – 391. (arXiv:math/0410232v1 [math.DG]).

[13] Salamon, S. M. *Complex structure on nilpotent Lie algebras* /S. M. Salamon // J. Pure Appl. Algebra. – 2001. – Vol. 157. – P. 311 – 333 (arXiv:math/9808025v2 [math.DG]).

[14] Thurston, W. P. *Some simple examples of symplectic manifolds* / W. P. Thurston // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – Vol. 55, no. 2. – P. 467 – 468.

[15] Tralle, A. *Symplectic manifolds with no Kähler Structure* / A. Tralle, J. Oprea // Lect. Notes. in Math. – Vol. 1661. – Berlin Heidelberg: Springer, 1997.

УДК 514.76.2

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ РИМАНА-КАРТАНА

С. Е. Степанов, И. А. Гордеева

GEOMETRY OF RIEMANN-CARTAN MANIFOLDS

S. E. Stepanov, I. A. Gordeeva

Пространство Римана-Картана – это триплет $(M, g, \overline{\nabla})$*, где* (M, g) *– риманово* n*-мерное* $(n \geq 2)$ *многообразие с линейной связностью* $\overline{\nabla}$ *с ненулевым тензором кручения* S*, такой, что* $\overline{\nabla} g = 0$*. Рассматриваются свойства псевдокиллинговых и псевдогармонических векторных полей на многообразиях* $(M, g, \overline{\nabla})$ *различных классов, а также теоремы исчезновения данных векторных полей.*

A Riemann-Cartan manifold is a triple $(M, g, \overline{\nabla})$*, where* (M, g) *is a Riemannian* n*-dimensional* $(n \geq 2)$ *manifold with linear connection* $\overline{\nabla}$ *having nonzero torsion* S *such that* $\overline{\nabla} g = 0$*. We consider properties of pseudo-Killing and pseudo-garmonic vector fields on some classes of these manifolds and vanishes theorems as corollaries of these properties*

Ключевые слова: многообразие Римана-Картана, связность с кручением, многообразие Вейтценбока, псевдокиллинговы и псевдогармонические векторные поля.

Keywords: Riemann-Cartan manifold, linear connection, torsion, Weitzenböck manifold, pseudo-Killing and pseudo-garmonic vector fields.

1. Введение

Пространства Римана-Картана относятся к метрически-аффинным пространствам. Начало теории метрически-аффинных пространств было положено Э. Картаном в 1922 году (см. [8]), который предложил вместо связности Леви-Чивита ∇ в GRT (сокращенное от General Relativity Theory) рассматривать несимметричную линейную связность $\overline{\nabla}$, обладающую свойством метричности $\overline{\nabla} g = 0$. В результате пространство-время получало в дополнение к кривизне еще и ненулевое кручение S. Впоследствии в 1924 и 1925 годах им было опубликовано еще две работы (см. [9] и [10]) в развитие своей теории, которая получила в дальнейшем название Einstein-Cartan Theory of Gravity или сокращенно ECT (см., напр., [4]; [41]). Идея Э. Картана о несимметрической метрической связности почти сразу нашла отражение в известных монографиях по дифференциальной геометрии первой половины прошлого века (см. [12]; [13]; [61]; [62] и др.).

Вплоть до начала 60-х годов предложение Э. Картана о применении несимметрической метрической связности в GRT не находила поддержки у физиков-теоретиков. Толчком к изучению ECT послужили работы Т. Кибла (см. [23]) и Д. Сциямы (см. [36]), которые независимо друг от друга установили связь между кручением S связности $\overline{\nabla}$ и спин тензором материи s (spin tensor of matter). Впоследствии были найдены и другие физические