of 3-Sasakian manifolds/ С. Р. Boyer, К. Galicki, Vol. 455. – P. 183 – 220.
В .М. Mann // J. reine angew. Math. – 1994. –

УДК 514.76

**ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ К РЕШЕНИЮ
ВОПРОСОВ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ K -КОНТАКТНЫХ
ЭЙНШТЕЙНОВЫХ СТРУКТУР САСАКИ НА ГРУППАХ ЛИ**

Я. В. Славолубова

**APPLICATION OF SYSTEMS OF COMPUTER MATHEMATICS TO THE DECISION
QUESTIONS OF EXISTENCE SEMI-RIEMANNIAN K -CONTACT-SASAKI-EINSTEIN
STRUCTURES ON LIE GROUPS**

Ya. V. Slavolyubova

С использованием процедур символьных вычислений на Maple найдены пятимерные алгебры Ли, допускающие левоинвариантные псевдоримановы K -контактные эйнштейновы структуры Сасаки. В качестве примера на одной из пятимерных алгебр Ли найдено в явной форме семейство структур Сасаки и получены геометрические свойства метрик семейства.

With use of procedures of symbolic computations on Maple the Lie algebras of dimension 5 supposing left invariant semi-Riemannian K -contact-Sasaki-Einstein structures are found. On one of Lie algebras of dimension 5 as an example the family of Sasaki structures is found in the obvious form and geometrical properties of metrics of family are received.

Ключевые слова: системы компьютерной математики, Maple, контактные структуры, пятимерные алгебры Ли, структуры Сасаки.

Keywords: systems of computer mathematics, Maple, contact structures, Lie algebras of dimension 5, Sasaki structures.

Системы компьютерной математики совмещают в одной оболочке обширный набор инструментов, позволяющий решать научные задачи как прикладного, так и теоретического характера. Однако они нацелены не на приближенные вычисления, а на решения задач, требующих проведения очень сложных символьных вычислений для получения точных решений или доказательств теорем. С использованием систем компьютерной математики получено множество новых математических результатов в областях, ранее далеких от использования компьютерных вычислений. Естественно, что для решения теоретических задач необходим этап математического моделирования, т. е. постановки задачи в том виде, в котором она возможна для компьютерного решения. Maple – одна из наиболее используемых систем компьютерной математики наряду с другими, такими, как Mathematica, MATLAB, MathCAD, Mupad, Derive [1]. Пакет Maple идеален для формулировки, решения и исследования различных математических моделей. При изучении геометрических структур на группах Ли возникает необходимость проведения чрезвычайно сложных вычислений. Многие задачи допускают возможность применения компьютерных символьных вычислений. В данной работе рассматривается применение системы компьютерной математики Maple к решению за-

дач теории левоинвариантных контактных метрических структур на пятимерных группах Ли. Исследуемыми объектами являются группы и алгебры Ли размерности 5.

1. Предварительные сведения

Приведем сначала математические понятия, необходимые для постановки и моделирования задачи, решение которой осуществляется с использованием математического пакета Maple.

Определение 1. Дифференцируемое $(2n + 1)$ -мерное многообразие M класса C^∞ называется контактным, если на нем задана 1-форма η , такая, что $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ всюду на M^{2n+1} .

Контактная форма η определяет на многообразии M^{2n+1} распределение $D = \{X \in TM : \eta(X) = 0\}$ размерности $2n$, которое называется контактным. Кроме того, контактное многообразие M^{2n+1} имеет всюду ненулевое векторное поле ξ , которое определяется свойствами: $\eta(\xi) = 1$ и $d\eta(\xi, X) = 0$ для всех векторных полей X на M^{2n+1} . Векторное поле ξ называется полем Рибба или характеристическим векторным полем контактной структуры.

Определение 2. Если (M^{2n+1}, η) – контактное многообразие, то контактной метрической

структурой называется четверка (η, ξ, φ, g) , где η – контактная форма, ξ – поле Рибба, φ – аффинор на M^{2n+1} , g – риманова метрика со свойствами:

1. $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$,
2. $d\eta(X, Y) = g(\varphi X, Y)$,
3. $g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

где I – тождественный эндоморфизм TM^{2n+1} .

Риманова метрика g контактной метрической структуры называется ассоциированной. Из третьего свойства сразу следует, что ассоциированная метрика для контактной структуры η полностью определяется аффинором: $g(X, Y) = d\eta(X, \varphi Y) + \eta(X)\eta(Y)$. Поэтому мы ассоциированные метрики будем задавать аффинором φ . Отметим также, что аффинор φ действует как почти комплексная структура на контактном распределении D . На контактном метрическом многообразии определены два тензора $N^{(1)}$ и $N^{(3)}$ следующими выражениями [2]:

$$N^{(1)}(X, Y) = [\varphi, \varphi](X, Y) + d\eta(X, Y)\xi,$$

$$N^{(3)}(X) = (L_\xi \varphi)X.$$

Определение 3. Контактная метрическая структура называется структурой Сасаки, если на многообразии $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ интегрируема почти комплексная структура J , определенная формулой

$$J(X, f \frac{d}{dt}) = (\varphi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}),$$

где $X \in TM^{2n+1}$, $t \in \mathbb{R}$, f – функция класса C^∞ .

Определение 4. Контактная метрическая структура называется K -контактной структурой, если поле Рибба ξ порождает группу изометрий метрики g , т.е. поле Рибба ξ является киллинговым относительно метрики g .

Определение 5. [3] Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) называется η -эйнштейновой структурой, если существуют гладкие функции a и b на M^{2n+1} , такие, что $\forall X, Y \in TM^{2n+1}$

$$Ric_g(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y).$$

Если в качестве многообразия рассматривается группа Ли G , то естественно рассматривать левоинвариантные контактные структуры. В этом случае контактная форма η , векторное поле Рибба ξ , аффинор φ и ассоциированная метрика g задаются своими значениями в единице, т.е. на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G .

2. Применение пакета Maple к исследованию контактных метрических структур на алгебре Ли

Известно [4], не существует K -контактных-эйнштейновых и, тем более, сасаки-эйнштейновых, левоинвариантных римановых структур на группах Ли размерности ≥ 5 . Однако в псевдоримановом случае такие структуры существуют и могут быть получены в явном виде. В размерности 5 следующие разрешимые алгебры Ли допускают левоинвариантные псевдоримановы эйнштейновы K -контактные структуры Сасаки: разложимые $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{d}_{4,\lambda} \times \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$, $\mathfrak{d}'_{4,\delta}$, $\delta \neq 0$; неразложимая $\mathfrak{g}_{5,22}$. Напомним, что $\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_2$ – прямое произведение алгебр Ли $aff(\mathbb{R}) \times aff(\mathbb{R})$, где $aff(\mathbb{R})$ – алгебра Ли группы Ли аффинных преобразований $\mathbb{R}$; $\mathfrak{r}'_2$ – алгебра Ли $aff(\mathbb{C})$, рассматриваемая как вещественная алгебра Ли [5]; а $\mathfrak{g}_{5,22}$ – 22-я алгебра Ли классификационного списка А. Диатты разрешимых и неразложимых алгебр Ли [4]. Подробно рассмотрим одну из них.

Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}$. Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2$ есть овеществление комплексной аффинной алгебры $aff(\mathbb{C})$. Она имеет базис e_1, e_2, e_3, e_4 , в котором скобки Ли задаются следующим образом: $[e_1, e_3] = e_3$, $[e_1, e_4] = e_4$, $[e_2, e_3] = e_4$, $[e_2, e_4] = -e_3$. Алгебра является разрешимой, но не нильпотентной. Первый производный идеал $D^1\mathfrak{r}'_2$ двумерен, центр – нулевой. Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{A}_{4,12}$ из [5]. Она является прямой суммой двух небелевых алгебр $\mathfrak{r}'_{2,1} \times \mathfrak{r}'_{2,2}$, алгебра Ли $\mathfrak{r}'_{2,1}$ имеет базис $-e_1 - ie_2, e_3 + ie_4$, а алгебра Ли $\mathfrak{r}'_{2,2}$ имеет базис $-e_1 + ie_2, e_3 - ie_4$. Группу Ли, соответствующую данной алгебре Ли $\mathfrak{r}'_2$, будем обозначать символом R'_2 . Алгебра Ли $\mathfrak{r}'_2$ является точной симплектической, и симплектические формы ω имеют вид:

$$\omega_1 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4, \quad \omega = d\alpha, \quad \alpha = -e^3,$$

$$\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3, \quad \omega = d\alpha, \quad \alpha = -e^4.$$

Рассмотрим контактное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}e_5$ алгебры Ли $\mathfrak{r}'_2$ с симплектической формой $\omega_1 = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$, тогда контактная форма имеет вид $\eta = -e^3 + e^5$. Легко видеть, что $d\eta = e^1 \wedge e^3 - e^2 \wedge e^4$. Поле Рибба ξ имеет вид $\xi = e_5$. Контактное распределение D – это левоинвариантное распределение, заданное следующим подпространством в алгебре Ли. Если $(x_1, \dots, x_5)$ – координаты на $\mathfrak{g}$, соответствующие выбранному базису e_i , то $D \subset \mathfrak{g}$ задается уравнением: $-x_3 + x_5 = 0$.

Для построения и компьютерного исследования ассоциированной контактной метрической структуры (η, ξ, φ, g) мы находим вычислительные формулы основных тензоров контактной метрической структуры и проводим следующие начальные этапы:

- определяем контактную форму η , поле Рибба ξ и форму $d\eta$ в символьном виде;

- загружаем массивы структурных констант алгебр Ли $\mathfrak{t}'_2$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}'_2 \times \mathbb{R}e_5$;
- задаем массив аффинора φ в общем виде, как символьную матрицу и находим условия на его элементы для выполнения свойств 1 и 3 контактной метрической структуры.

Далее для решения вопроса о существовании ассоциированных K -контактных структур и структур Сасаки мы выполняем следующие этапы:

- составляем программу пересчета структурных констант с учетом выбора нового базиса;
- находим вид аффинора φ из условия: $d\eta(\varphi X, \varphi Y) = d\eta(X, Y)$, решая в Maple систему алгебраических уравнений, вытекающую из условия: $\varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$;
- вычисляем ассоциированную метрику g , определенную при фиксированных η и ξ аффинором φ по следующей формуле: $g_{ij} = d\eta_{ik}\varphi_j^k + \eta_i\eta_j$;
- составляем программы и вычисляем основные геометрические характеристики построенной метрики: компоненты связности, тензор кривизны и его норму, секционные кривизны, тензор Риччи и его норму, оператор Риччи, главные кривизны Риччи, скалярную кривизну;
- составляем программу для решения вопроса об эйнштейновости и η -эйнштейновости;
- используя символьные вычисления, находим основные тензоры контактной метрической структуры;
- составляем программу для решения вопроса о K -контактности структуры;

- составляем программу для проверки различными критериями выполнения свойств K -контактности, сасакиевости.

Продемонстрируем эти этапы на примере решения данной задачи на прямом произведении $\mathfrak{t}'_2 \times \mathbb{R}$. Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) задается контактной формой $\eta = -e^3 + e^5$; полем Рива $\xi = e_5$; аффинором

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & -\psi_{14} & \psi_{24} & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & -\psi_{11} & \psi_{21} & 0 \\ -\psi_{32} & \psi_{42} & \psi_{12} & -\psi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где параметры ψ_{ij} удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} \psi_{11}^2 + \psi_{12}\psi_{21} + \psi_{13}\psi_{31} - \psi_{14}\psi_{32} = -1 \\ \psi_{12}(\psi_{11} + \psi_{22}) + \psi_{13}\psi_{32} + \psi_{14}\psi_{42} = 0 \\ \psi_{12}\psi_{24} + \psi_{13}\psi_{21} + \psi_{14}(\psi_{11} - \psi_{22}) = 0 \\ \psi_{14}\psi_{31} - \psi_{21}(\psi_{11} + \psi_{22}) + \psi_{24}\psi_{32} = 0 \\ \psi_{12}\psi_{31} + \psi_{21}\psi_{42} - \psi_{32}(\psi_{11} - \psi_{22}) = 0 \\ \psi_{22}^2 + \psi_{12}\psi_{21} - \psi_{14}\psi_{32} + \psi_{24}\psi_{42} = -1 \end{cases},$$

ассоциированной метрикой g , относительно которой базис $E_1 = e_1, E_2 = e_2, E_3 = e_3 + e_5, E_4 = e_4, E_5 = \xi = e_5$ является ортонормированным.

Составляем программы на м-языке Maple для выполнения поставленных выше этапов (см. пример листинга ниже). В результате компьютерного исследования структуры (η, ξ, φ, g) получается следующий теоретический результат.

Теорема 1. *Контактная метрическая структура (η, ξ, φ, g) на группе $R'_2 \times \mathbb{R}$ является K -контактной при всех значениях параметров. Контактная метрическая структура на группе $R'_2 \times \mathbb{R}$ является структурой Сасаки при следующих аффинорах φ_1, φ_2 и соответствующих метриках g_1, g_2 :*

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & 0 \\ -\psi_{12} & \psi_{11} & -\psi_{14} & \psi_{13} & 0 \\ \frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2 - \psi_{11}^2 - 1) - 2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & \frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2 - \psi_{12}^2 + 1) - 2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & -\psi_{11} & -\psi_{12} & 0 \\ -\frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2 - \psi_{12}^2 + 1) - 2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & \frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2 - \psi_{11}^2 - 1) - 2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & \psi_{12} & -\psi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \psi_{13}^2 + \psi_{14}^2 \neq 0,$$

$$g_1 = \begin{pmatrix} \frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2 - \psi_{11}^2 - 1) - 2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & \frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2 - \psi_{12}^2 + 1) - 2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & -\psi_{11} & -\psi_{12} & 0 \\ \frac{\psi_{14}(\psi_{11}^2 - \psi_{12}^2 + 1) - 2\psi_{11}\psi_{13}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & -\frac{\psi_{13}(\psi_{12}^2 - \psi_{11}^2 - 1) - 2\psi_{11}\psi_{14}\psi_{12}}{\psi_{13}^2 + \psi_{14}^2} & -\psi_{12} & \psi_{11} & 0 \\ -\psi_{11} & -\psi_{12} & -\psi_{13} & -\psi_{14} & 0 \\ -\psi_{12} & \psi_{11} & -\psi_{14} & \psi_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \psi_{13}^2 + \psi_{14}^2 \neq 0,$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & 0 & \mp 1 & 0 \\ -\psi_{32} & \psi_{31} & \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} & 0 & \mp 1 & 0 \\ \psi_{32} & -\psi_{31} & \mp 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mp 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для метрики g_1 квадраты норм тензора Римана и Риччи имеют выражения: $\|Riem_1\|^2 = -16\psi_{13}^2 - 16\psi_{14}^2 - 8\psi_{13} + 2$, $\|Ric_1\|^2 = 2$. Скалярная кривизна выражается формулой: $S = 8\psi_{13} - 1$. Матрица RIC_1 оператора Риччи имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & -2\psi_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 2\psi_{14} & 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & -2\psi_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 2\psi_{14} & 2\psi_{13} - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Метрика Сасаки является псевдоримановой эйнштейновой при $\psi_{13} = 3/4$, $\psi_{14} = 0$. Секционные кривизны принимают следующие значения: $K_{1,3} = K_{2,4} = -\frac{(4\psi_{13}-3)(\psi_{13}^2+\psi_{14}^2)}{4((\psi_{12}\psi_{13}-\psi_{11}\psi_{14})^2-\psi_{13}^2)}$, $K_{1,2} = 0$, $K_{3,4} = 0$, $K_{1,4} = K_{2,3} = \frac{\psi_{13}(\psi_{13}^2+\psi_{14}^2)}{(\psi_{11}\psi_{13}+\psi_{12}\psi_{14})^2+\psi_{13}^2}$, $K_{1,5} = \frac{1}{4}$, $K_{2,5} = \frac{1}{4}$, $K_{3,5} = \frac{1}{4}$, $K_{4,5} = \frac{1}{4}$.

Для метрики g_2 квадраты норм тензора Римана и Риччи имеют выражения: $\|Riem_2\|^2 = \frac{17}{2}$, $\|Ric_2\|^2 = 2$. Скалярная кривизна выражается формулой: $S = -1$.

Матрица оператора Риччи имеет следующий вид: $RIC_2 = \text{diag}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$. Метрика Сасаки является псевдоримановой эйнштейновой при любых параметрах. Секционные кривизны в направлениях базисных площадок $\langle E_i, E_j \rangle$ принимают следующие значения: $K_{1,2} = 0$, $K_{1,4} = 0$, $K_{2,3} = 0$, $K_{1,5} = \frac{1}{4}$, $K_{2,5} = \frac{1}{4}$.

Аналогичным образом рассматривается контактное расширение $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}'_2 \times \mathbb{R}e_5$ с симплектической формой $\omega_2 = e^1 \wedge e^4 + e^2 \wedge e^3$.

Опишем Maple-процедуру для определения свойства K -контактности одним из способов. Компоненты тензора $N^{(3)}$ вычисляются по формуле:

$$N^{(3)}_i{}^k = \varphi_i^s C_{2n+1,s}^k - C_{2n+1,i}^s \varphi_s^k.$$

Введем обозначения: $\mathbf{C}$ – массив структурных констант на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $\mathbf{f}$ – аффинор на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, $\mathbf{N3}$ – тензор $N^{(3)}$, $\mathbf{YY}$ – количество ненулевых компонент тензора $N^{(3)}$. Входными параметрами данной процедуры являются массивы структурных констант $\mathbf{C}$ и массив элементов аффинора φ , $m = 2n + 1$ – размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Выходным параметром является количество ненулевых компонент тензора $N^{(3)}$ и вывод их на печать.

Kkont:=proc(C,f,m)

Описываем локальные переменные:

local i,k,s,N3,YY;

Тело процедуры:

Определяем массив компонент тензора $N^{(3)}$ и выводим на печать его нетривиальные компоненты с указанием их количества:

N3:=array(1..m,1..m):

YY:=0:

for i to m do

for k to m do

N3[k,i]:=sum(f[s,i]*C[m,s,k]-
C[m,i,s]*f[k,s], 's'=1..m);

if N3[k,i] <> 0 then YY :=
YY+1

fi

od od;

print('Kolichestvo<>0'=YY);

for i to m do

for k to m do

if N3[k,i] <> 0 then print((k,i)=
simplify(evalm(N3[k,i])))

fi

od od;

end:

Вызов процедуры производится следующей командой:

Kkont(C,f,m).

Литература

[1] Дьяконов, В. *Maple 9 в математике, физике и образовании* / В. Дьяконов. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004. – 688 с.

[2] Blair, D. E. *Contact Manifolds in Riemannian Geometry* / D. E. Blair // *Lecture Notes in Mathematics*. – Springer, Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976. – 145 p.

[3] Davidov, J. *Eta-Einstein condition on twistor spaces of odd-dimensional Riemannian manifolds* / J. Davidov // *Journal of Geometry* 86, 2006. – P. 42 – 53.

[4] Diatta, A. *Left invariant contact structures on Lie groups* / A. Diatta // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/math/0403555v2>, свободный.

[5] Ovando, G. *Four dimensional symplectic Lie algebras* / G. Ovando // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/math/0407501v1>, свободный.

[6] Ghanam, R. *Variationality of Four-Dimensional Lie Group Connection* / R. Ghanam, G. Thompson, E. Miller // *J. of the Lie Theory*. – 2004. – Vol. 14. – P. 395 – 425.