коэффициенты зависят от параметров a и b. Заметим, что при $t = 0$ получаем :

$$b_0(0) = a, b_1(0) = 1 - a, b_2(0) = b_3(0) = 0.$$

При $t = 1$ аналогично имеем :

$$b_0(1) = b_1(1) = 0, b_2(1) = a, b_3(1) = 1 - a.$$

Следовательно, каждая элементарная кривая Γ_i начинается в точке

$$\mathbf{R_i(0)} = a\mathbf{P_{i-1}} + (1 - a)\mathbf{P_i},$$

лежащей на ребре $P_{i-1}P_i$ опорного многоугольника, а кончается в точке

$$\mathbf{R_i(1)} = a\mathbf{P_{i+1}} + (1 - a)\mathbf{P_{i+2}},$$

лежащей на ребре $P_{i+1}P_{i+2}$ опорного многоугольника. Нетрудно также проверить , что в своей начальной точке кривая Γ_i касается ребра $P_{i-1}P_i$, а в конечной — ребра $P_{i+1}P_{i+2}$ Однако в общем случае построенная кривая не проходит через вершины опорного массива.

Можно сказать, что рассматриваемые составные кривые являются более гладкими, чем кривые Безье, но не обладают свойством непрерывности вектора кривизны. Наличие в функциональных коэффициентах $m_{\lambda\mu}$ параметров a и b позволяет менять форму кривой Γ, не меняя точек массива. Это свойство сближает их с β-сплайновыми кривыми. Представляет интерес дальнейшее изучение геометрических свойств построенных кривых.

Литература [1] Шикин , Е. В.*Кривые и поверхности на экране компьютера* / Е. В. Шикин, А. И. Плис. – М.: Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с

УДК 514.76.2

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИВОДИМЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. С. Корнев

INVARIANT REDUCED ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON HOMOGENEOUS SPACES

E. S. Kornev

В работе вводится специальный класс почти комплексных структур, для которых существует разложение касательного пространства в прямую сумму подпространств, на которых эти структуры действуют инвариантно. Приводятся некоторые понятия и результаты для таких почти комплексных структур на однородных пространствах.

This work introduces the special class of almost complex structures which provide the tangent space decomposition into direct sum of the vector subspaces, and invariant act on these subspaces. Some concepts and results are provided For such almost complex structures on the homogeneous spaces.

Ключевые слова: почти комплексные структуры, однородные пространства, кэлеровы структуры.

Keywords: almost complex structures, homogeneous spaces, kähler structures.

1. Инвариантные почти комплексные структуры на однородных пространствах

Пусть M – однородное риманово пространство размерности $2n$, G – связная группа Ли, действующая на M транзитивно, H – подгруппа изотропии фиксированного элемента $o \in M$, и g – Ad_H-инвариантная риманова метрика на G. Тогда $M \cong G/H$ и $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{h}$ – алгебра Ли подгруппы изотропии H, а $\mathfrak{p}$ – ее ортогональное дополнение относительно метрики g. Подпространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму Ad_H-инвариантных неприводимых векторных подпространств. Касательное пространство T_oM и подпространство $\mathfrak{p}$ изоморфны как векторные пространства. Если подгруппа H является нормальной, а распределение $\mathfrak{p}$ инволютивным, то M диффеоморфно группе $K = G/H$, а $\mathfrak{p}$ является алгеброй Ли группы K.

Почти комплексной структурой на вещественном четномерном многообразии M называется непрерывное поле вещественных линейных операторов $J_x : T_xM \mapsto T_xM : J_x \circ J_x = -Id$ для всех $x \in M$. Пусть R_g – представление группы G в группе собственных дифференцируемых преобразований однородного пространства M, ядро которого совпадает с H. Почти комплексная структура J на M называется G-инвариантной, если для любых $g \in G$ и $x = R_g(o) \in M, J_x = dR_g \circ J_o \circ dR_{g^{-1}}$. Любая G-инвариантная почти комплексная структура на однородном пространстве полностью определяется своим значением в начальной точке o.

Линейный изоморфизм пространств T_oM и $\mathfrak{p}$ индуцирует взаимно-однозначное соответствие между множеством G-инвариантных почти комплексных структур на M и множеством $A(\mathfrak{p})$, где $A(\mathfrak{p})$ – множество всех левоинвариантных полей линейных операторов на группе G, обладающих следующими свойствами: $\Phi \in A(\mathfrak{p})$, если для любого $X \in \mathfrak{p}, \Phi X \in \mathfrak{p}, (\Phi \circ \Phi)X = -X$, а для любого $Y \in \mathfrak{h}, \Phi Y = Y$. Такие линейные операторы называются аффинорами. Ограничение любого аффинора на подпространство $\mathfrak{p}$ есть левоинвариантная почти комплексная структура на K, а ограничение на подалгебру $\mathfrak{h}$ есть тождественный оператор. В дальнейшем будем отождествлять G-инвариантную почти комплексную структуру на однородном пространстве M и соответствующий ей аффинор на группе G.

Если подгруппа изотропии H имеет четную размерность, то любая левоинвариантная почти комплексная структура на группе G, инвариантно действующая на $\mathfrak{p}$, индуцирует G-инвариантную почти комплексную структуру на M.

2. Приводимые почти комплексные структуры и их индекс

Определение 1. *Почти комплексная структура J на многообразии M называется приводимой, если в каждой точке многообразия касательное пространство содержит нетривиальное собственное подпространство, инвариантное относительно действия J, распределение таких подпространств непрерывно зависит от точки и для любого нетривиального подпространства инвариантного относительно действия структуры J существует дополнительное подпространство, также инвариантное относительно действия J.*

Понятие приводимой почти комплексной структуры естественно возникает при рассмотрении расслоений (см. [2]) и однородных четномерных пространств с четномерной подгруппой изотропии. Для расслоений в качестве инвариантных относительно действия почти комплексной структуры подпространств можно рассматривать распределение касательное к слоям расслоения и горизонтальное распределение (связность), а для однородных пространств подпространства $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$.

Теорема 1. *Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура на четномерном вещественном однородном пространстве $M \cong G/H$, тогда векторное пространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму неприводимых подпространств инвариантных относительно действия почти комплексной структуры J. А матрица структуры J в фиксированном базисе пространства $\mathfrak{p}$ принимает блочно-диагональный вид:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

где A_k – квадратная матрица четного порядка.

Доказательство. Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура на M и V_1 – инвариантное относительно ее действия векторное подпространство в $\mathfrak{p}$. По определению 1 в $\mathfrak{p}$ существует дополнительное к V_1 подпространство V_2 также инвариантное относительно действия J. Ограничение структуры J на V_1 есть почти комплексная структура J_1 на V_1, а ограничение J на V_2 есть почти комплексная структура J_2 на V_2. Повторяя это разложение для подпространств V_1 и V_2, на некотором конечном шаге получим разложение пространства $\mathfrak{p}$ в прямую сумму векторных подпространств $W_1, \dots, W_k$ и набор почти комплексных структур $J_1, \dots, J_k$, каждая из которых действует неприводимо на соответствующем подпространстве $W_l, 1 \le l \le k$. Выбор базиса в каждом из неприводимых векторных подпространств W_l дает представление исходной приводимой почти комплексной структуры J в виде блочно-диагональной матрицы.

Замечание. Из доказательства теоремы 1 следует, что любую приводимую почти комплексную структуру можно задать набором пар $\{V_1, J_1\}, \dots, \{V_k, J_k\}$, где V_l – четномерное векторное подпространство, J_l – неприводимая почти комплексная структура на V_l. Это сразу дает целый класс примеров однородных пространств с приводимыми почти комплексными структурами. В качестве исходного пространства можно взять однородное пространство, которое раскладывается в прямое произведение четномерных однородных пространств, на каждом из которых задана собственная почти комплексная структура.

Определение 2. *Индексом приводимой почти комплексной структуры J называется число i_J инвариантных относительно действия J неприводимых векторных подпространств.*

Из теоремы 1 следует, что если $\dim(M) = 2n \ge 4$, то $2 \le i_J \le n$. Для приводимых почти комплексных структур индекса n размерность любого неприводимого инвариантного подпространства равна 2. Для вещественных четырехмерных многообразий могут существовать только приводимые почти комплексные структуры индекса 2. Все левоинвариантные приводимые почти комплексные структуры в размерности 4 классифицированы и изучены в [1].

Почти комплексная структура J на вещественном многообразии размерности $2n$ называется интегрируемой (комплексной), если для любой точки

$x \in M$ существует окрестность U и локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ в этой окрестности, согласованные с действием этой структуры. Т. е. во всех точках из $U, \partial/\partial y_k = J\partial/\partial x_k$, для $k = 1, 2, \ldots, n$. Тензором Нейенхейса почти комплексной структуры J называется тензор N, такой, что для любых векторных полей X и Y

$$N(X,Y)=2\,([JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY]-[X,Y]).$$

Почти комплексная структура интегрируема тогда, и только тогда, когда ее тензор Нейенхейса тождественно равен 0. Подробнее см. [3], т. 2, глава 9.

Теорема 2. *Если вещественное однородное пространство M, размерности $2n$, раскладывается в прямое произведение двумерных однородных пространств, то на M всегда существует интегрируемая приводимая почти комплексная структура индекса n.*

Доказательство сразу следует из того, что тензор Нейенхейса на прямом произведении многообразий равен сумме тензоров Нейенхейса на каждом из сомножителей и простого факта, что тензор Нейенхейса на любом двумерном многообразии тождественно равен нулю.

Теорема 3. *Пусть J – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура индекса 2 на однородном пространстве $M \cong G/H$, группа G имеет нетривиальный центр, A и B – подпространства в $\mathfrak{p}$ инвариантные относительно действия структуры J. Причем A лежит в центре алгебры Ли группы G, а тензор Нейенхейса структуры J равен 0 на B. Тогда структура J интегрируема.*

Доказательство. Пусть N – тензор Нейенхейса почти комплексной структуры J. Тогда, для любых X и $Y \in \mathfrak{p}, X = U_1 + V_1, Y = U_2 + V_2$, где U_1 и U_2 лежат в A, а V_1 и V_2 лежат в B. Поскольку U_1, U_2, JU_1, JU_2 лежат в центре алгебры Ли группы G, а на B $N \equiv 0$, получаем: $N(X, Y) =$
$= N(U_1, U_2)+N(U_1, V_2)+N(V_1, U_2)+N(V_1, V_2) = 0$. Таким образом, тензор Нейенхейса N равен нулю на всем подпространстве $\mathfrak{p}$ и структура J интегрируема на M.

3. Ортогональные и приводимые почти комплексные структуры

Почти комплексная структура J называется ортогональной относительно метрики g, если для любых векторных полей X и $Y, g(JX, JY) = g(X, Y)$, т. е. J является ортогональным оператором. Ad_H-инвариантная метрика g на группе G индуцирует метрику на однородном пространстве $M \cong G/H$. Будем считать, что метрика g также является левоинвариантной. Тогда она индуцирует G-инвариантную метрику на M. Из свойств аффиноров следует, что аффинор, соответствующий ортогональной почти комплексной структуре на M, является ортогональным относительно метрики g оператором на группе G. Поэтому множество ортогональных почти комплексных структур на M можно отождествлять со множеством ортогональных аффиноров на группе G.

Пересечение классов ортогональных и приводимых почти комплексных структур на однородных римановых пространствах описывает следующая теорема:

Теорема 4. *G-инвариантная ортогональная почти комплексная структура J на римановом однородном пространстве $M \cong G/h$ является приводимой тогда, и только тогда, когда ортогональное дополнение алгебры Ли подгруппы изотропии H содержит нетривиальное векторное подпространство инвариантное относительно действия структуры J.*

Доказательство. Существование для ортогональной приводимой почти комплексной структуры нетривиального векторного подпространства, инвариантного относительно действия этой структуры, следует из определения 1.

Пусть теперь J – G-инвариантная ортогональная почти комплексная структура на M и V – нетривиальное подпространство в $\mathfrak{p}$, на котором J действует инвариантно. Обозначим через $V^{\perp}$ ортогональное дополнение подпространства V в $\mathfrak{p}$. Для любых $X \in V$ и $Y \in V^{\perp}$ имеем:

$$g(X, JY) = g(JX, J \circ JY) = -g(JX, Y) = 0.$$

Т. е. $JY \in V^{\perp}$ и подпространство $V^{\perp}$ инвариантно относительно действия J. Таким образом, определение 1 полностью выполнено и почти комплексная структура J является приводимой.

4. Правильные и неправильные однородные пространства

Для описания связи между подпространствами, инвариантными относительно действия почти комплексной структуры и Ad_H-инвариантными подпространствами, необходимо ввести два специальных класса однородных пространств.

Определение 3. *Однородное риманово пространство $M \cong G/H$ называется правильным, если для любого Ad_H-инвариантного неприводимого подпространства существует ортогональное ему Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство той же размерности. И называется неправильным, если пространство $\mathfrak{p} = \mathfrak{h}^{\perp}$ содержит хотя бы одно Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство, для которого не существует ортогонального Ad_H-инвариантного неприводимого подпространства той же размерности. Неправильное однородное риманово про-*

странство называется строго неправильным, если все Ad_H-инвариантные неприводимые подпространства имеют разную размерность.

Из определения 3 следует, что не существует правильных однородных римановых пространств размерности ≤ 3, и неправильных однородных римановых пространств размерности ≤ 4.

Левоинвариантное поле линейных операторов Φ на группе Ли G называется изотропно-приводимым, если любое нетривиальное инвариантное относительно действия Φ подпространство также является инвариантным относительно действия подгруппы изотропии, т. е. Ad_H-инвариантным. При этом не требуется обязательного существования для любого инвариантного относительно действия Φ подпространства дополнительного подпространства также инвариантного относительно действия Φ.

Теорема 5. *Пусть $M \cong G/H$ – неправильное однородное пространство с Ad_H-инвариантной римановой метрикой. Причем, любое Ad_H-инвариантное подпространство в ортогональном дополнении $\mathfrak{p}$ алгебры Ли подгруппы изотропии H имеет четную размерность. Тогда любой левоинвариантный аффинор на группе G, сохраняющий разложение подпространства $\mathfrak{p}$ в ортогональную сумму Ad_H-инвариантных неприводимых подпространств, определяет G-инвариантную приводимую почти комплексную структуру на M. Причем, Ad_H-инвариантные неприводимые подпространства являются инвариантными относительно действия этой почти комплексной структуры. Если, кроме того, M является строго неправильным однородным пространством, а аффинор является изотропно-приводимым, то инвариантные относительно действия почти комплексной структуры неприводимые подпространства совпадают с Ad_H-инвариантными неприводимыми подпространствами, и индекс приводимой почти комплексной структуры равен числу Ad_H-неприводимых подпространств.*

Доказательство. Будем обозначать левоинвариантный ортогональный аффинор на группе G и соответствующую ему почти комплексную структуру на M одной буквой J. Пусть V_1 – Ad_H-инвариантное неприводимое подпространство в $\mathfrak{p}$, для которого в $\mathfrak{p}$ не существует ортогонального Ad_H-неприводимого подпространства той же размерности. Поскольку J сохраняет разложение $\mathfrak{p}$ в ортогональную сумму Ad_H-неприводимых подпространств, то подпространство JV_1 либо лежит в ортогональном дополнении подпространства V_1, либо совпадает с V_1. Из условия $\dim(JV_1) = \dim(V_1)$ получаем, что JV_1 может только совпадать с V_1, т. е. является инвариантным относительно действия J. Обозначим через V_2 ортогональное дополнение подпространства V_1 в $\mathfrak{p}$. Если V_2 содержит Ad_H-неприводимое подпространство, для которого в V_2 не существует ортогонального Ad_H-неприводимого подпространства, то повторяем предыдущие рассуждения. Если же для любого Ad_Hнеприводимого подпространства в $_V2$ найдется ортогональное Ad_H-неприводимое подпространство такой же размерности, то возможны два случая:

(1) все Ad_H-неприводимые подпространства являются инвариантными относительно действия J, и мы получаем разложение V_2 в ортогональную сумму инвариантных относительно действия J (не обязательно неприводимых) подпространств;

(2) почти комплексная структура J попарно переставляет Ad_H-неприводимые подпространства одинаковой размерности, и V_2 является неприводимым относительно действия J инвариантным подпространством.

В обоих случаях получаем, что подпространство V_2 является инвариантным относительно действия J подпространством и почти комплексная структура J является приводимой индекса не меньше 2. Однако в любом из рассмотренных случаев может оказаться, что какое-либо из Ad_H-неприводимых подпространств раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно действия J неприводимых подпространств. В случае, когда M является строго неправильным, а почти комплексная структура J изотропно-приводимой, случай (2) не возможен и любое Ad_H-неприводимое подпространство является инвариантным относительно действия J. А существование разложения какого-либо из Ad_H-неприводимых подпространств в прямую сумму неприводимых относительно действия J подпространств противоречит Ad_H-неприводимости такого подпространства. Более того, из того, что структура J является изотропно-приводимой, следует, что любое неприводимое относительно действия J подпространство V, лежащее в Ad_H-неприводимом подпространстве W, может только совпадать с W. Таким образом, Ad_H-неприводимые и неприводимые относительно действия J подпространства совпадают.

Замечание. Из доказательства теоремы 5 видно, что на правильном римановом однородном пространстве, для которого все Ad_H-инвариантные подпространства имеют четную размерность, можно построить почти комплексную структуру, которая не является приводимой.

5. Построение ассоциированной метрики на симплектическом однородном пространстве

Пусть Ω – G-инвариантная симплектическая форма на однородном многообразии M размерности $2n$. По теореме Дарбу, на M можно выбрать G-

инвариантный базис 1-форм $\theta_1, \ldots, \theta_{2n}$, в котором форма Ω принимает вид:

$$\Omega = \theta_1 \wedge \theta_2 + \cdots + \theta_{2n-1} \wedge \theta_{2n}.$$

Пусть $e_1, \ldots, e_{2n}$ – базис расслоения TM дуальный этому базису 1-форм. Из теоремы 1 следует, что любая G-инвариантная приводимая почти комплексная структура максимального индекса n на M с инвариантными подпространствами $\{e_1, e_2\}, \ldots, \{e_n, e_{2n}$ в таком базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

где A_k – блок вида:

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ C_k & d_k \end{pmatrix}.$$

Из условия $A_k^2 = -Id$ находим, что $d_k = -a_k, a_k^2 + +b_k c_k = -1$. Из условия $b_k c_k = -a_k^2 - 1$ следует, что параметры b_k и c_k не обращаются в 0 и имеют разные знаки при любых k. Будем считать, что для всех $k, b_k < 0, c_k > 0$. Таким образом, множество всех G-инвариантных приводимых почти комплексных структур максимального индекса параметризуется областью в пространстве $\mathbb{C}^n$ образованной элементами вида:

$$z = (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n), \quad b_k < 0$$

для всех $k = 1, 2, \ldots, n$. Это является обобщением параметризации П. Годушона для четырехмерного расслоения Хопфа из [2].

Пусть J_z – G-инвариантная приводимая почти комплексная структура индекса n. Тогда, из дуальности базисов и формул $J_z e_{2k-1} = a_k\, e_{2k-1} + +c_k\, e_{2k}$, $J_z e_{2k} = b_k\, e_{2k-1} - a_k\, e_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем: $J_z \theta_{2k-1} = a_k\, \theta_{2k-1} + b_k\, \theta_{2k}$, $J_z \theta_{2k} = = c_k\, \theta_{2k-1} - a_k\, \theta_{2k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Используя эти равенства и условие $a_k^2 + b_k c_k = -1$, получаем:

$$\Omega \circ J_z = \Omega.$$

Таким образом, любая приводимая почти комплексная структура J_z сохраняет симплектическую форму Ω.

Обозначим через g_z однопараметрическое семейство G-инвариантных невырожденных симметричных 2-форм на M, таких, что для любых $X, Y \in \mathfrak{p}, g_z(X, Y) = \Omega(X, J_z Y)$. Пользуясь формулой $\theta_{2k-1} \wedge \theta_{2k}(X, Y) = x_{2k-1} y_{2k} - x_{2k} y_{2k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и условием $a_k^2 + = -b_k c_k - 1$ для всех k, получаем:

$$g_z(X, X = \sum_{k=1}^{n} (c_k x_{2k-1}^2 - 2\, a_k x_{2k-1} x_{2k} - b_k x_{2k}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (c_k\, (x_{2k-1} - \frac{a_k}{c_k}\, x_{2k})^2 - \frac{a_k^2}{c_k}\, x_{2k}^2 - b_k x_{2k}^2) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (c_k\, (x_{2k-1} - \frac{a_k}{c_k}\, x_{2k})^2 + \frac{1}{c_k}\, x_{2k}^2) \geq 0.$$

Таким образом, получаем однопараметрическое семейство G-инвариантных римановых метрик ассоциированных с симплектической формой Ω и однопараметрическим семейством приводимых почти комплексных структур J_z. Если множество допустимых значений параметра z содержит непустое подмножество Σ, такое, что для любого $z \in \Sigma$ приводимая почти комплексная структура J_z интегрируема, то множество пар $(g_z, J_z)|z \in \Sigma$ образует семейство G-инвариантных кэлеровых структур на M. Множество Σ может быть дискретным или состоять из нескольких связных компонент. Левоинвариантные ассоциированные метрики и кэлеровы структуры на группах Ли размерности 4 полностью описаны в [1].

Пусть ∇_z – связность Леви-Чивитты ассоциированной g_z. Известно, что интегрируемость почти комплексной структуры J, сохраняющей замкнутую внешнюю 2-форму, эквивалентна условию $\nabla J \equiv 0$. Последнее Условие можно также записать в виде $\|\nabla J\| \equiv 0$. Для приводимых почти комплексных структур J_z получаем, что множество Σ есть множество нулей функции $f(z) = \|\nabla_z J_z\|$ на $\mathbb{C}^n$ в пересечении с областью допустимых значений параметра z. Таким образом, задача поиска кэлеровых структур, ассоциированных с G-инвариантными приводимыми комплексными структурами максимального индекса на симплектическом однородном пространстве, сводится к поиску нулей функции f.

Литература

[1] Корнев, Е. С. *Почти комплексные структуры и метрики на группах Ли размерности 4* / Е. С. Корнев. – Германия: Саарбрюкен: Lambert Academic Publishing, 2010. – 148 с.

[2] Годушон, П. *Поверхности Хопфа – квазикомплексные многообразия размерности 4* / П. Годушон // доклад VII, в кн. "Четырехмерная риманова геометрия: семинар Артура Бессе 1978/79 г." – Москва: Мир, 1985 – С. 120 – 138.

[3] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* в 2 т. / Ш. Кобаяси, К. Намидзу. – Москва: Наука, 1981.