

битой почти комплексной структуры I_0 относительно действия группы $SO(3) \times SO(3)$ будет $SO(3) = SO(3) \times SO(3)/diag(SO(3))$. Используя формулы следствия 2, можно найти условия, при которых $J_{12} = J_{13} = J_{23} = J_{45} = J_{46} = J_{56} = 0$. Решением этой системы уравнений будет:

$$\begin{cases} \cos(\varphi_1) = 0, \\ \sin(\varphi_2) = 0, \\ \sin(\varphi_3) = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin(\varphi_1) = 0, \\ \cos(\varphi_2) = 0, \\ \cos(\varphi_3) = 0. \end{cases}$$

Оба решения определяют одну и ту же форму, поэтому достаточно рассмотреть одну систему условий. Введем обозначения M_+ и M_- для "максимально неинтегрируемых" структур, лежащих на меридианах сфер-ребер $\mathcal{E}_{03}$ и $\mathcal{E}_{12}$ соответственно. $M_+ = \{\sin \psi(e^{14} + e^{25}) + \cos \psi(e^{15} + e^{42}) + e^{36} : -\pi \leq \psi \leq \pi\}$, $M_- = \{\sin \theta(e^{14} - e^{25}) + \cos \theta(e^{15} - e^{42}) + e^{36} : -\pi \leq \theta \leq \pi\}$. Обозначим M_{p+p_-} половину большого круга меридиана обобщенной сферы-ребра $\mathcal{E}_{p-p_+}$, тогда множество всех "максимально неинтегрируемых" структур образует 3-мерное подмножество в $\mathbb{C}P^3$:

$$\bigcup_{\substack{p_- \in M_- \\ p_+ \in M_+}} M_{p-p_+}$$

Литература

- [1] Бухштабер, В. М. *Торические действия в топологии и комбинаторике* / В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. – М.: МЦНМО, 2004. – 272 с.
- [2] Даурцева, Н. А. *О пространстве почти комплексных структур на многообразии* / Н. А. Даурцева, Н. К. Смоленцев // Вестник КемГУ. – 7(2001). – С. 176 – 186.
- [3] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2.
- [4] Abbena, E. *Almost Hermitian geometry on six dimensional nilmanifolds* / E. Abbena, S. Garbiero, S. Salamon // Ann. Scuola Norm. Sup. – Pisa: Cl. Sci. – 30 (2001). – P. 147 – 170.
- [5] Calabi, E. *A class of compact complex manifolds which are not algebraic.* / E. Calabi, B. Eckmann // Ann. Math. – 58(1935). – P. 494 – 500.
- [6] Daurtseva, N.A. *Invariant complex structures on $S^3 \times S^3$* / N.A. Daurtseva // Electronic Journ. "Investigated in Russia". – 2004. – P. 888 – 893; (<http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2004/081e.pdf>).
- [7] Daurtseva, N.A. *Left-invariant almost nearly Kähler structures on $SU(2) \times SU(2)$ in the tetrahedron visualization for $\mathbb{C}P^3$* / N. A. Daurtseva // arXiv:0608704[math.DG](2006). 12 p.
- [8] Ivashkovich, S. *Complex curves in almost-complex manifolds and meromorphic hulls* / S. Ivashkovich, V. Shevchishin // Bochum: Ruhr-Univ. – Bochum, 1999. – VI. – 186 p.
- [9] Magnin, L. *Left invariant complex structures on $U(2)$ and $SU(2) \times SU(2)$ revisited* / L. Magnin // Preprint, arXiv: 0809.1182 [math.RA] (2008). 25 p.

УДК 517.54: 517.862

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ

В. Б. Ким

ABOUT A CLASS OF SMOOTHING SPLINE CUBIC CURVES

V.B.Kim

В работе рассмотрен новый класс сглаживающих кубических сплайновых кривых. Эти кривые не являются ни β -сплайновыми кривыми, ни кривыми Безье. Найдены параметрические уравнения этих кривых и определены их некоторые геометрические свойства.

A new class of smoothing spline cubic curves is considered in the article. These curves are neither β -spline curves not Bezier curves. The parametric equations of the curves are obtained and some geometric properties of this curves are studied.

Ключевые слова: сплайновые кубические кривые, β -сплайновые кривые, кривые Безье.

keywords: spline curves, β -spline curves, Bezier curves

Составные сплайновые кривые традиционно строятся по заданному массиву точек (опорному массиву). При этом различают два типа задач. Первый, когда искомая кривая должна проходить через заданные точки (задача аппроксимации), и

второй, когда искомая кривая проходит не через сами точки, а вблизи них, удовлетворяя некоторому вариационному условию (задача сглаживания). Соответственно различают два типа сплайновых кривых — аппроксимирующие и сглаживающие.

Для аппроксимирующих кривых опорный массив не может быть произвольным — требуется, например, чтобы абсциссы его точек возрастали вместе с ростом нумерации точек. При построении же сглаживающих сплайновых кривых никакие дополнительные условия на точки массива не накладываются. Эти точки могут быть заданы как на плоскости, так и в пространстве, их взаимное расположение может быть произвольным, часть из них может совпадать и т. д.

Если количество вершин в опорном массиве достаточно велико, то найти функциональные коэффициенты $b(t)$ бывает довольно затруднительно. Поэтому опорный массив разбивают на элементарные массивы, каждый из которых определяет элементарный фрагмент искомой составной кривой. Сама же кривая является объединением соответствующих элементарных кривых. Как правило, для кубических сплайновых кривых число точек в элементарном массиве равно четырем. Особенностью сглаживающих кубических сплайновых кривых является то, что каждый элементарный фрагмент можно задать с помощью одного и того же набора коэффициентов, не зависящих от точек опорного массива.

Эти коэффициенты можно найти как решения некоторой краевой задачи, выражающей в аналитической форме геометрические свойства, которыми должна обладать искомая кривая.

Пусть $\mathbf{P} = \{P_0, P_1, \dots, P_m\}$ ($m \geq 3$) — массив точек, определяющий составную сплайновую кубическую кривую Γ . Кривая Γ является объединением элементарных кривых Γ_i . Здесь и далее индекс i пробегает значения $1, 2, 3, \dots, m-3$, а индексы λ, μ значения $0, 1, 2, 3$. Каждая элементарная кривая Γ_i определяется с помощью векторного уравнения:

$$\mathbf{R}_i(t) = b_0(t)\mathbf{P}_{i-1} + b_1(t)\mathbf{P}_i + b_2(t)\mathbf{P}_{i+1} + b_3(t)\mathbf{P}_{i+2}. \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{P}_i$ — радиус-вектор точки P_i ,

$$b_\lambda(t) = m_{\lambda 0} + m_{\lambda 1}t + m_{\lambda 2}t^2 + m_{\lambda 3}t^3, \quad (2)$$

$t \in [0, 1]$.

Пусть Γ_i и Γ_{i+1} — две смежные элементарные кривые, определяемые соответственно массивами точек $\{P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}\}$ и $\{P_i, P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}\}$. Потребуем, чтобы составная сплайновая кривая Γ была не только непрерывной, но и имела бы непрерывный касательный вектор и непрерывный вектор кривизны. Получим следующую систему векторных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{i+1}(0) &= \mathbf{R}_i(1), \\ \mathbf{R}'_{i+1}(0) &= \beta_1 \mathbf{R}'_i(1), \\ \mathbf{R}''_{i+1}(0) &= \beta_1^2 \mathbf{R}''_i(1) + \beta_2 \mathbf{R}'_i(1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\beta_1 > 0$, $\beta_2 \geq 0$. Переходя к координатной записи, получаем систему линейных уравнений от-

носительно неизвестных коэффициентов $m_{\lambda\mu}$:

$$\begin{aligned} m_{00} + m_{01} + m_{02} + m_{03} &= 0, \\ m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} &= m_{00}, \\ m_{20} + m_{21} + m_{22} + m_{23} &= m_{10}, \\ m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} &= m_{20}, \\ m_{30} &= 0, \\ \beta_1(m_{01} + 2m_{02} + 3m_{03}) &= 0, \\ \beta_1(m_{11} + 2m_{12} + 3m_{13}) &= m_{01}, \\ \beta_1(m_{21} + 2m_{22} + 3m_{23}) &= m_{11}, \\ \beta_1(m_{31} + 2m_{32} + 3m_{33}) &= m_{21}, \\ m_{31} &= 0, \\ \beta_1^2(2m_{02} + 6m_{03}) + \beta_2(m_{01} + 2m_{02} + 3m_{03}) &= 0, \\ \beta_1^2(2m_{12} + 6m_{13}) + \beta_2(m_{11} + 2m_{12} + 3m_{13}) &= 2m_{02}, \\ \beta_1^2(2m_{22} + 6m_{23}) + \beta_2(m_{21} + 2m_{22} + 3m_{23}) &= 2m_{12}, \\ \beta_1^2(2m_{32} + 6m_{33}) + \beta_2(m_{31} + 2m_{32} + 3m_{33}) &= 2m_{22}, \\ 2m_{32} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Эта система содержит 15 уравнений на 16 неизвестных $m_{\lambda\mu}$. Не умаляя общности, можно считать, что $m_{33} \neq 0$. Тогда остальные коэффициенты выразятся через m_{33} следующим образом:

$$\begin{aligned} m_{00} &= p^3 m_{33}, \\ m_{01} &= -3p^3 m_{33}, \\ m_{02} &= 3p^3 m_{33}, \\ m_{03} &= -p^3 m_{33}, \\ m_{10} &= (2p^2 + 2p + q)m_{33}, \\ m_{11} &= (3p^3 - 3p)m_{33}, \\ m_{12} &= -(3p^3 + 3p^2 + 3q)m_{33}, \\ m_{13} &= (p^3 + p^2 + p + q)m_{33}, \\ m_{20} &= m_{33}, \\ m_{21} &= 3pm_{33}, \\ m_{22} &= 3(p^2 + q)m_{33}, \\ m_{23} &= -(p^2 + p + 2q + 1)m_{33}, \\ m_{30} &= m_{31} = m_{32} = 0, \\ p &= \beta_1, \quad 2q = \beta_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Легко проверяются соотношения

$$\begin{aligned} m_{00} + m_{10} + m_{20} + m_{30} &= \\ &= (p^3 + 2p^2 + 2p + q + 1)m_{33}, \\ m_{01} + m_{11} + m_{21} + m_{31} &= 0, \\ m_{02} + m_{12} + m_{22} + m_{23} &= 0, \\ m_{03} + m_{13} + m_{23} + m_{33} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Добавим к рассмотренной системе условие нормировки

$$\sum_{\alpha=0}^3 b_\alpha(t) = 1. \quad (7)$$

Геометрически это условие означает, что каждая элементарная кривая лежит в выпуклой оболочке точек своего опорного массива. В силу соотношений (6), условие нормировки равносильно условию

$$m_{33} = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + q + 1}. \quad (8)$$

Введем обозначение $\delta = p^3 + 2p^2 + 2p + q + 1$. Очевидно, что $\delta \neq 0$. Тогда получаем, что коэффициенты найденной кривой имеют следующий вид (9):

$$\begin{aligned}
b_0(t) &= \frac{p^3 - 3p^3t + 3p^3t^2 - p^3t^3}{\delta}, \\
b_1(t) &= \frac{(2p^2 + 2p + q) + (3p^3 - 3p)t - (3p^3 + 3p + 3q)t^2 + (p^3 + p^2 + p + 2q)t^3}{\delta}, \\
b_2(t) &= \frac{1 + 3pt + 3(p + q)t^2 - (p^2 + p + 2q + 1)t^3}{\delta}, \\
b_3(t) &= \frac{t^3}{\delta}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Кривые, коэффициенты в векторном уравнении которых определяются по формулам (9), называются β -сплайновыми кривыми [1]. В частном случае при $\beta_1 = 0, \beta_2 = 0$ мы получаем хорошо известные В-сплайновые кривые [1].

Заметим, что в рассмотренном случае опорные массивы двух смежных кривых имели три общих точки: P_i, P_{i+1}, P_{i+2} . Случай одной общей точки хорошо изучен — мы получаем кривые Безье. Какие кривые получаются, если смежные элементарные массивы имеют две общие точки? Какая краевая задача соответствует такому случаю?

Рассмотрим этот случай подробнее. Сохраним для удобства обозначения, использованные в предыдущем пункте. Будем считать, что две смежные элементарные кривые Γ_i и Γ_{i+1} определяются соответственно векторными уравнениями:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_i(t) &= b_0(t)\mathbf{P}_{i-1} + b_1(t)\mathbf{P}_i + b_2(t)\mathbf{P}_{i+1} + \\
&+ b_3(t)\mathbf{P}_{i+2};
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{i+1}(t) &= b_0(t)\mathbf{P}_{i+1} + b_1(t)\mathbf{P}_{i+2} + b_2(t)\mathbf{P}_{i+3} + \\
&+ b_3(t)\mathbf{P}_{i+4}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Коэффициенты $b_\alpha(t)$ имеют по-прежнему вид (2). Повторяя проведенные выше рассуждения, получим, что в рассматриваемом случае краевая задача (3) имеет лишь тривиальные нулевые решения ($b_\alpha(t) = 0$).

Изменим краевую задачу, оставив лишь условие непрерывности кривой и условие непрерывности касательного вектора, т. е.

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_{i+1}(0) &= \mathbf{R}_i(1), \\
\mathbf{R}'_{i+1}(0) &= \beta \mathbf{R}'_i(1).
\end{aligned} \tag{12}$$

Как и выше получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned}
m_{00} + m_{01} + m_{02} + m_{03} &= 0, \\
m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} &= 0, \\
m_{20} + m_{21} + m_{22} + m_{23} &= m_{00}, \\
m_{30} + m_{31} + m_{32} + m_{33} &= m_{10}, \\
m_{20} &= 0, \\
m_{30} &= 0, \\
m_{01} + 2m_{02} + 3m_{03} &= 0, \\
m_{11} + 2m_{12} + 3m_{13} &= 0, \\
\beta(m_{21} + 2m_{22} + 3m_{23}) &= m_{01}, \\
\beta(m_{31} + 2m_{32} + 3m_{33}) &= m_{11}, \\
m_{21} &= 0, \\
m_{31} &= 0, \\
\beta &> 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Система содержит 12 уравнений на 16 неизвестных $m_{\lambda\mu}$. Нетрудно заметить, что её можно разбить на четыре подсистемы, каждая из которых состоит из уравнений, содержащих $m_{\lambda\mu}$, где λ — фиксировано. Пользуясь этим, выразим часть неизвестных через $m_{00}, m_{01}, m_{10}, m_{11}$:

$$\begin{aligned}
m_{02} &= -3m_{00} - 2m_{01}, \\
m_{03} &= 2m_{00} + m_{01}, \\
m_{12} &= -3m_{10} - 2m_{11}, \\
m_{13} &= -2m_{10} + m_{11}, \\
m_{22} &= 3m_{00} - rm_{01}, \\
m_{23} &= rm_{01} - 2m_{00}, \\
m_{32} &= 3m_{10} - rm_{11}, \\
m_{33} &= rm_{11} - 2m_{10}, \\
m_{20} &= m_{21} = m_{30} = m_{31} = 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Здесь $r = \beta^{-1}$.

Добавим к рассмотренной системе условие нормировки, которое дает еще четыре соотношения:

$$\begin{aligned}
m_{00} + m_{10} + m_{20} + m_{30} &= 1, \\
m_{01} + m_{11} + m_{21} + m_{31} &= 0, \\
m_{02} + m_{12} + m_{22} + m_{32} &= 0, \\
m_{03} + m_{13} + m_{23} + m_{33} &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Подставим в систему (15) найденные значения $m_{\lambda\mu}$ и получим соотношения:

$$\begin{aligned}
m_{00} + m_{10} &= 1, \\
m_{01} + m_{11} &= 0, \\
-(2 + r)(m_{01} + m_{11}) &= 0, \\
(1 + r)(m_{01} + m_{11}) &= 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Нетрудно заметить, что система (16) содержит лишь два независимых соотношения:

$$\begin{aligned}
m_{00} + m_{10} &= 1, \\
m_{01} + m_{11} &= 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

Введем обозначения $m_{00} = a, m_{01} = b$. Тогда $m_{10} = 1 - a, m_{11} = -b$. Окончательно функциональные коэффициенты $b_\lambda(t)$ принимают вид:

$$\begin{aligned}
b_0(t) &= a + bt - (3a + 2b)t^2 + (2a + b)t^3, \\
b_1(t) &= (1 - a) - bt - (3 - 3a - 2b)t^2 + (2 - 2a - b)t^3, \\
b_2(t) &= (3a - rb)t^2 + (rb - 2a)t^3, \\
b_3(t) &= (3 - 3a + rb)t^2 - (rb - 2a + 2)t^3.
\end{aligned} \tag{18}$$

Таким образом, решением краевой задачи (12) являются кривые Γ , у которых функциональные

коэффициенты зависят от параметров a и b . Заметим, что при $t = 0$ получаем :

$$b_0(0) = a, b_1(0) = 1 - a, b_2(0) = b_3(0) = 0.$$

При $t = 1$ аналогично имеем :

$$b_0(1) = b_1(1) = 0, b_2(1) = a, b_3(1) = 1 - a.$$

Следовательно, каждая элементарная кривая Γ_i начинается в точке

$$\mathbf{R}_i(0) = a\mathbf{P}_{i-1} + (1-a)\mathbf{P}_i,$$

лежащей на ребре $P_{i-1}P_i$ опорного многоугольника, а кончается в точке

$$\mathbf{R}_i(1) = a\mathbf{P}_{i+1} + (1-a)\mathbf{P}_{i+2},$$

лежащей на ребре $P_{i+1}P_{i+2}$ опорного многоугольника. Нетрудно также проверить, что в своей начальной точке кривая Γ_i касается ребра $P_{i-1}P_i$,

а в конечной — ребра $P_{i+1}P_{i+2}$. Однако в общем случае построенная кривая не проходит через вершины опорного массива.

Можно сказать, что рассматриваемые составные кривые являются более гладкими, чем кривые Безье, но не обладают свойством непрерывности вектора кривизны. Наличие в функциональных коэффициентах $m_{\lambda\mu}$ параметров a и b позволяет менять форму кривой Γ , не меняя точек массива. Это свойство сближает их с β -сплайновыми кривыми. Представляет интерес дальнейшее изучение геометрических свойств построенных кривых.

Литература [1] Шикин, Е. В. *Кривые и поверхности на экране компьютера* / Е. В. Шикин, А. И. Плис. — М.: Диалог-МИФИ, 1996. — 240 с

УДК 514.76.2

ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИВОДИМЫЕ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫЕ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Е. С. Корнев

INVARIANT REDUCED ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON HOMOGENEOUS SPACES

E. S. Kornev

В работе вводится специальный класс почти комплексных структур, для которых существует разложение касательного пространства в прямую сумму подпространств, на которых эти структуры действуют инвариантно. Приводятся некоторые понятия и результаты для таких почти комплексных структур на однородных пространствах.

This work introduces the special class of almost complex structures which provide the tangent space decomposition into direct sum of the vector subspaces, and invariant act on these subspaces. Some concepts and results are provided for such almost complex structures on the homogeneous spaces.

Ключевые слова: почти комплексные структуры, однородные пространства, кэлеровы структуры.

Keywords: almost complex structures, homogeneous spaces, kähler structures.

1. Инвариантные почти комплексные структуры на однородных пространствах

Пусть M — однородное риманово пространство размерности $2n$, G — связная группа Ли, действующая на M транзитивно, H — подгруппа изотропии фиксированного элемента $o \in M$, и g — Ad_H -инвариантная риманова метрика на G . Тогда $M \cong G/H$ и $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму векторных пространств $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли подгруппы изотропии H , а $\mathfrak{p}$ — ее ортогональное дополнение относительно метрики g . Подпространство $\mathfrak{p}$ раскладывается в прямую сумму Ad_H -инвариантных неприводимых векторных подпространств. Касательное пространство T_oM и подпространство $\mathfrak{p}$ изоморфны как векторные про-

странства. Если подгруппа H является нормальной, а распределение $\mathfrak{p}$ инволютивным, то M диффеоморфно группе $K = G/H$, а $\mathfrak{p}$ является алгеброй Ли группы K .

Почти комплексной структурой на вещественном четномерном многообразии M называется непрерывное поле вещественных линейных операторов $J_x : T_xM \mapsto T_xM : J_x \circ J_x = -Id$ для всех $x \in M$. Пусть R_g — представление группы G в группе собственных дифференцируемых преобразований однородного пространства M , ядро которого совпадает с H . Почти комплексная структура J на M называется G -инвариантной, если для любых $g \in G$ и $x = R_g(o) \in M$, $J_x = dR_g \circ J_o \circ dR_{g^{-1}}$. Любая G -инвариантная почти комплексная структура на однородном пространстве полностью определяется своим значением в начальной точке o .