УДК 514.76.2

ПРОСТРАНСТВО ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНЫХ СТРУКТУР НА 6-МЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ

Н. А. Даурцева

THE SPACE OF LEFTINVARIANT ORTHOGONAL ALMOST COMPLEX STRUCTURES ON 6-DIMENSIONAL LIE GROUPS

N. A. Daurtseva

В статье изучается пространство $\mathcal{Z}$ левоинвариантных ортогональных почти комплексных структур на 6-мерной группе Ли. Для явного описания элементов этого пространства используется изоморфизм $\mathcal{Z}$ и $\mathbb{C}P^3$, а также тот факт, что $\mathbb{C}P^3/T^3$ есть 3-мерный тетраэдр. Получены явные формулы для описания почти комплексной структуры как композиции поворотов.

The space $\mathcal{Z}$ of leftinvariant orthogonal almost complex structures on 6-dimensional Lie groups is researched. For the explicit view of this space elements the isomorphism of $\mathcal{Z}$ and $\mathbb{C}P^3$ is used. Representation of $\mathbb{C}P^3/T^3$ as 3-dimensional tetrahedron is used too. The explicit formula for almost complex structure as composition of rotations is found.

Ключевые слова: почти комплексные структуры, группы Ли.

Keywords: almost complex structures, Lie groups.

1. Введение

Пусть G – 6-мерная группа Ли. Всякую левоинвариантную почти комплексную структуру можно отождествить с эндоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ этой группы, квадрат которого равен минус единице. Если на группе Ли зафиксирована некоторая левоинвариантная метрика, то это позволяет выделить в множестве всех почти комплексных структур подмножество ортогональных, т. е. сохраняющих данную метрику. Пространство таких почти комплексных структур, дополнительно сохраняющих ориентацию, есть однородное пространство $\mathcal{Z} = SO(6)/U(3)$ изоморфное $\mathbb{C}P^3$. В различных задачах, возникающих для почти эрмитовых структур на многообразиях и, в частности, группах Ли, возникает необходимость в явных формулах, задающих почти комплексную структуру вместо неявного условия $I^2 = -1$. В двумерном случае существует ровно одна почти комплексная структура, ортогональная относительно некоторой метрики. В 4-мерном случае такие структуры образуют двупараметрическое семейство, параметризуемое точками на сфере S^2 (см., например, [8]). В 6-мерном случае ортогональные структуры образуют 6-параметрическое семейство и явное описание таких структур в литературе отсутствует.

Основным результатом данной статьи является явное описание структур из $\mathcal{Z}$, через однородные координаты в $\mathbb{C}P^3$, а также описание этих структур как композиции поворотов в некотором базисе алгебры Ли.

2. Определения и обозначения

Пусть (M^{2n}, g) – риманово многообразие класса C^∞.

Определение 1. *Почти комплексной структурой на M называется поле эндоморфизмов $J_x : T_xM \longrightarrow T_xM$, гладко зависящее от $x \in M$ и удовлетворяющее условию $J_x^2 = -Id_x$, где Id_x – тождественный эндоморфизм T_xM, $\forall x \in M$. Если почти комплексная структура оставляет метрику g инвариантной:*

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \Xi(M),$$

то J называется ортогональной относительно метрики g, а пару (g, J) на M^{2n} называют почти эрмитовой структурой. Многообразие, наделенное почти эрмитовой структурой, называется почти эрмитовым.

Определение 2. *Будем говорить, что почти комплексная структура J на M ассоциирована с кососимметрической 2-формой ω, если*

$$\omega(JX, JY) = \omega(X, Y), \qquad \forall X, Y \in \Xi(M).$$

Если (g, J) почти эрмитова структура на M, то такая 2-форма ω определяется по формуле

$$\omega(X, Y) = g(JX, Y)$$

и называется фундаментальной 2-формой.

Замечание 1. Мы будем отождествлять почти комплексную структуру с ее фундаментальной формой, когда это будет удобно.

Замечание 2. Каждая почти комплексная структура на многообразии определяет на нем некоторую ориентацию [3].

Пусть теперь $M = G$ – 6-мерная группа Ли, g – некоторая левоинвариантная метрика на G. Левоинвариантная почти комплексная структура I на G однозначно определяется своим значением на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, линейным эндоморфизмом:

$$I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \qquad I^2 = -1. \qquad (1)$$

С другой стороны, линейный эндоморфизм (1) определяет левоинвариантную почти комплексную структуру на группе Ли G. В случае, когда речь идет о левоинвариантных структурах на группе Ли, их ограничение на алгебру Ли мы будем обозначать также как и структуру на всей группе. Таким образом, множество всех g-ортогональных левоинвариантых почти комплексных структур на группе Ли G есть множество всех линейных эндоморфизмов:

$$I:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g},\qquad I^2=-1,$$
$$g(IX,IY)=g(X,Y),\qquad \forall X,Y\in\mathfrak{g}.$$

Множество $\mathcal{Z}$ всех таких почти комплексных структур, сохраняющих ориентацию, есть однородное пространство $SO(6)/U(3)$. Действительно [3], зафиксируем некоторый ортонормированный базис $(e)=(e_1,\dots,e_6)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Пусть I_0 – почти комплексная структура, такая что $I_0e_1=-e_4$, $I_0e_2=-e_5$, $I_0e_3=-e_6$, тогда любая другая левоинвариантная ортогональная почти комплексная структура I может быть получена из I_0 как $I=SI_0S^{-1}$, для некоторого $S\in SO(6)$, т. е. группа $SO(6)$ действует на $\mathcal{Z}$ транзитивно. Подгруппа изотропии элемента I_0 состоит из ортогональных, коммутирующих с I_0 матриц, то есть совпадает с $U(3)$. Следовательно, $\mathcal{Z}=SO(6)/U(3)$.

3. Диффеоморфизм $\mathcal{Z}$ в $\mathbb{C}P^3$

Известно [4], что $SO(6)/U(3)$ диффеоморфно $\mathbb{C}P^3$. Построим этот диффеоморфизм в явном виде. Пусть (v^0,v^1,v^2,v^3) – унитарный базис $V=\mathbb{C}^4$. Тогда $\Lambda^2\mathbb{C}^4$ можно отождествить с $\mathfrak{g}^*$:

$$\begin{array}{ll} 2v^0\wedge v^1=e^1+ie^4, & 2v^2\wedge v^3=e^1-ie^4,\\ 2v^0\wedge v^2=e^2+ie^5, & 2v^3\wedge v^1=e^2-ie^5,\\ 2v^0\wedge v^3=e^3+ie^6, & 2v^1\wedge v^2=e^3-ie^6,\end{array}\qquad(2)$$

здесь e^i обозначает ковектор, дуальный к e_i. Почти комплексная структура I на $\mathfrak{g}$ стандартным образом – $(Ie^i)(X)=e^i(IX)$ определяет почти комплексную структуру на $\mathfrak{g}^*$, которую мы будем обозначать так же. Каждая почти комплексная структура определяет разложение комплексификации $\mathfrak{g}^{*\mathbb{C}}$ в прямую сумму собственных подпространств:

$$\mathfrak{g}^{*1,0}=\{\alpha\in\mathfrak{g}^{*\mathbb{C}}:I\alpha=i\alpha\}=\{\varphi-iI\varphi:\varphi\in\mathfrak{g}^*\},$$
$$\mathfrak{g}^{*0,1}=\{\alpha\in\mathfrak{g}^{*\mathbb{C}}:I\alpha=-i\alpha\}=\{\varphi+iI\varphi:\varphi\in\mathfrak{g}^*\}.$$

Обратно, каждая почти комплексная структура однозначно определяется через $\mathfrak{g}^{*1,0}$.

Для стандартной структуры $I=I_0$ собственное подпространство, соответствующее i, есть $\mathfrak{g}^{*1,0}=\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e^1+ie^4,e^2+ie^5,e^3+ie^6\}$, а значит, согласно формулам (2) $\mathfrak{g}^{*1,0}$, отождествляется с $V_{v^0}=\{v^0\wedge v,\ v\in V\}\subset\Lambda^2V$.

Произвольная почти комплексная структура I ведет себя так же, как I_0 в другом базисе $(e')=(e)S$, где $S\in SO(6)$. Так как $SU(4)\longrightarrow SO(6)$ образует двойное накрытие, то для произвольной почти комплексной структуры подпространство в Λ^2V, соответствующее $\mathfrak{g}^{*1,0}$, имеет аналогичный вид:

$$V_u=\{u\wedge v: v\in V\}\subset\Lambda^2V.$$

Таким образом, каждая структура из $\mathcal{Z}$ может быть отождествлена с точкой из $\mathbb{C}P^3$ следующим образом:

$$I\in\mathcal{Z}\longrightarrow\mathfrak{g}^{*1,0}\longrightarrow V_u\longrightarrow[u]\in\mathbb{C}P^3.$$

Кроме стандартной структуры I_0, определим еще три почти комплексные структуры, которые на векторах базиса действуют следующим образом:

$$I_0e^1=-e^4, I_0e^2=-e^5, I_0e^3=-e^6;$$
$$I_1e^1=-e^4, I_1e^2=e^5, I_1e^3=e^6;$$
$$I_2e^1=e^4, I_2e^2=-e^5, I_2e^3=e^6;$$
$$I_3e^1=e^4, I_3e^2=e^5, I_3e^3=-e^6.$$

Все они задают одну и ту же ориентацию, сохраняют метрику g, лежат в $\mathcal{Z}$ и соответствуют точкам $[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]\in\mathbb{C}P^3$. Фундаментальные 2-формы, соответствующие этим структурам, имеют вид:

$$\omega_0=e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^6;$$
$$\omega_1=e^1\wedge e^4-e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^6;$$
$$\omega_2=-e^1\wedge e^4+e^2\wedge e^5-e^3\wedge e^6;$$
$$\omega_3=-e^1\wedge e^4-e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^6.$$

Пусть $z=[z^0,z^1,z^2,z^3]$ и $u=[u^0,u^1,u^2,u^3]$ произвольные точки в $\mathbb{C}P^3$. Эти две точки могут быть соединены 'ребром', состоящим из точек $\alpha z+\beta u$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{C},\quad|\alpha|+|\beta|\neq0$, будем обозначать его $\mathcal{E}_{zu}$ Не сложно показать, что 'ребро' $\mathcal{E}_{zu}=\{[\alpha,\beta]:\alpha,\beta\in\mathbb{C},\quad|\alpha|+|\beta|\neq0\}=\mathbb{C}P^1=S^2$. Аналогично три произвольные точки, не лежащие на одном 'ребре', определяют грань $\mathcal{F}=\mathbb{C}P^2$.

Таким образом, проективное пространство $\mathbb{C}P^3$ можно визуализировать как заполненный тетраэдр с вершинами $\omega_0=[1,0,0,0]$, $\omega_1=[0,1,0,0]$, $\omega_2=[0,0,1,0]$, $\omega_3=[0,0,0,1]$, 'ребрами' $\mathcal{E}_{ij}\cong\mathbb{C}P^1$ и 'гранями' $\mathcal{F}_i\cong\mathbb{C}P^2$ (ребро $\mathcal{E}_{ij}$ соединяет формы ω_i и ω_j, грань $\mathcal{F}_i$ является 'противолежащей' к вершине ω_i).

Лемма 1. *Фундаментальная 2-форма $\omega\in\mathcal{E}_{01}$ имеет вид:*

$$\omega=e^1\wedge e^4+r(e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^6)+$$
$$+u(e^2\wedge e^3+e^6\wedge e^5)+x(e^2\wedge e^6+e^5\wedge e^3),\quad(3)$$

где $r^2+u^2+x^2=1$.

Доказательство. Для произвольной формы $\omega\in E_{01}$ найдутся такие числа $s,c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $s^2+c_1^2+c_2^2=1$, что соответствующая почти комплексная структура $I=sI_0+(c_1+ic_2)I_1$.

$$s[1,0,0,0]+(c_1+ic_2)[0,1,0,0]=[s,c_1+ic_2,0,0].$$

Пространство

$$V_{[s,c_1+ic_2,0,0]} = \{sv^0 + (c_1 + ic_2)v^1 \wedge u, u \in V\}.$$

Поскольку $(sv^0 + (c_1 + ic_2)v^1) \wedge v^0 = (c_1 + ic_2)v^1 \wedge v^0 = -\frac{1}{2}(c_1 + ic_2)(e^1 + ie^4) = \frac{1}{2}(-c_1e^1 + c_2e^4 + +i(-c_2e^1 - c_1e^4))$, то для почти комплексной структуры $I \in \mathcal{E}_{01}$:

$$I(-c_1e^1 + c_2e^4) = c_2e^1 + c_1e^4.$$

Аналогично, равенства

$$(sv^0 + (c_1 + ic_2)v^1) \wedge v^1 = \frac{1}{2}(se^1 + ise^4);$$

$$(sv^0 + (c_1 + ic_2)v^1) \wedge v^2 = sv^0 \wedge v^2 + (c_1 + ic_2)v^1 \wedge v^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(s(e^2 + ie^5) + (c_1 + ic_2)(e^3 - ie^6)) =$$

$$= \frac{1}{2}(se^2 + c_1e^3 + c_2e^6 + i(se^5 + c_2e^3 - c_1e^6));$$

$$(sv^0 + (c_1 + ic_2)v^1) \wedge v^3 = sv^0 \wedge v^3 + (c_1 + ic_2)v^1 \wedge v^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(s(e^3 + ie^6) + (c_1 + ic_2)(-e^2 + ie^5)) =$$

$$= \frac{1}{2}(se^3 - c_1e^2 - c_2e^5 + i(se^6 - c_2e^2 + c_1e^5))$$

дают:

$$I(se^1) = -se^4,$$

$$I(se^2 + c_1e^3 + c_2e^6) = -(se^5 + c_2e^3 - c_1e^6),$$

$$I(se^3 - c_1e^2 - c_2e^5) = -(se^6 - c_2e^2 + c_1e^5).$$

Тогда $\omega \in \mathcal{E}_{01}$, соответствующая I, имеет вид:

$$\begin{gathered}\omega = (-c_1e^1 + c^2e^4) \wedge (-c_2e^1 - c^1e^4) + se^1 \wedge se^4 + (se^2 + c_1e^3 + c_2e^6) \wedge (se^5 + c_2e^3 - c_1e^6) + \\ +(se^3 - c_1e^2 - c_2e^5) \wedge (se^6 - c_2e^2 + c_1e^5) = e^1 \wedge e^4 + (s^2 - c_1^2 - c_2^2)e^2 \wedge e^5 + 2sc_2e^2 \wedge e^3 - \\ -2sc_1e^2 \wedge e^6 - 2sc_1e^5 \wedge e^3 - 2sc_2e^5 \wedge e^6 + (s^2 - c_1^2 - c_2^2)e^3 \wedge e^6.\end{gathered}$$

Полагая $r = s^2 - c_1^2 - c_2^2 = 2s^2 - 1$, $u = 2sc_2$, $x = -2sc_1$, можно привести форму ω к виду (3).

$\square$

Теорема 1. *Пусть $[1, a, b, c] \in \mathbb{C}P^3$ – произвольная точка, не принадлежащая грани $\mathcal{F}_0$. Левоинвариантная почти комплексная структура $I \in \mathcal{Z}$, соответствующая этой точке, лежит в окрестности $U(I_0) = \{I \in \mathcal{Z} : 1 - II_0 - обратим\}$ структуры I_0 и в базисе (e) задается матрицей:*

$$\frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 2\Im(\overline{a}b + c) & 2\Im(\overline{a}c - b) & x - 2|b|^2 - 2|c|^2 & 2\Re(\overline{a}b - c) & 2\Re(\overline{a}c + b) \\ -2\Im(\overline{a}b + c) & 0 & 2\Im(\overline{b}c + a) & 2\Re(\overline{a}b + c) & x - 2|a|^2 - 2|c|^2 & 2\Re(\overline{b}c - a) \\ -2\Im(\overline{a}c - b) & -2\Im(\overline{b}c + a) & 0 & 2\Re(\overline{a}c - b) & 2\Re(\overline{b}c + a) & x - 2|a|^2 - 2|b|^2 \\ 2|b|^2 + 2|c|^2 - x & -2\Re(\overline{a}b + c) & -2\Re(\overline{a}c - b) & 0 & 2\Im(\overline{a}b - c) & 2\Im(\overline{a}c + b) \\ -2\Re(\overline{a}b - c) & 2|a|^2 + 2|c|^2 - x & -2\Re(\overline{b}c + a) & -2\Im(\overline{a}b - c) & 0 & 2\Im(\overline{b}c - a) \\ -2\Re(\overline{a}c + b) & -2\Re(\overline{b}c - a) & 2|a|^2 + 2|b|^2 - x & -2\Im(\overline{a}c + b) & -2\Im(\overline{b}c - a) & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Пусть I – произвольная почти комплексная структура, лежащая в окрестности $U(I_0)$, $(I_{ij})_{i,j=1,..,6}$ – матрица этой структуры в базисе (e). Тогда координаты соответствующей точки $[1, a, b, c]$ из $\mathbb{C}P^3$ следующие:

$$\begin{aligned} a &= \tfrac{1}{1+I_{14}+I_{25}+I_{36}}((I_{35} - I_{26}) + i(I_{23} - I_{56})), \\ b &= \tfrac{1}{1+I_{14}+I_{25}+I_{36}}((I_{16} - I_{34}) + i(I_{46} - I_{13})), \\ c &= \tfrac{1}{1+I_{14}+I_{25}+I_{36}}((I_{24} - I_{15}) + i(I_{12} - I_{45})), \end{aligned} \quad (5)$$

где $x = 1 + |a|^2 + |b|^2 + |c|^2$.

Доказательство. Пусть $a, b, c \in \mathbb{C}$ и $[1, a, b, c]$ – некоторая точка из $\mathbb{C}P^3$, не принадлежащая грани $\mathcal{F}_0$. Тогда прямые вычисления, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 1, дают соответствующую форму ω и почти комплексную структуру вида (4).

Пусть теперь $I \in U(I_0) = \{I \in \mathcal{Z} : 1 - -II_0$ обратим$\}$. Для такой структуры [2] определен соответствующий кососимметрический оператор K, антикоммутирующий с I_0, такой, что:

$$I = (1 - K)I_0(1 - K)^{-1},$$
$$K = (1 - II_0)^{-1}(1 + II_0).$$

Пусть $K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$, где $A + iB = = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$, тогда I принимает вид (4).

Обратно, пусть $I = (I_{ij})$ $(I_{ij} = -I_{ji})$ – произвольная почти комплексная структура из $U(I_0)$, тогда формулы (5) могут быть выведены непосредственно из равенства матриц (4) и $(I_{ij})_{i,j=1,..,6}$.

Следствие 1. *Пусть $I = [1, a, b, c] \in \mathbb{C}P^3$, тогда оператор $K = (1 - II_0)^{-1}(1 + II_0)$ выражается через a, b, c: $K = \begin{pmatrix} A & B \\ B & -A \end{pmatrix}$, где $A + iB =$*

$$= \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание 3. Формула (4) дает явное описание ортогональных матриц, удовлетворяющих условию $I^2 = -1$.

Пространство $\mathcal{Z}$ есть 6-мерный тетраэдр, известно [1], что $\mathcal{Z}/T^3$ есть 3-мерный тетраэдр. Опишем классы 2-форм, лежащих в этом факторпространстве. Если формы p_+ и p_- принимают все возможные значения на ребрах $\mathcal{E}_{03}$ и $\mathcal{E}_{12}$ соответственно, то ребра $\mathcal{E}_{p_+p_-}$ заполняют весь 6-мерный тетраэдр $\mathbb{C}P^3$.

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{\substack{p_+\in\mathcal{E}_{03}\\ p_-\in\mathcal{E}_{12}}} \mathcal{E}_{p_+p_-}.$$

Зафиксируем 2-мерные площадки $\mathbb{D}_1=\langle e^1,e^4\rangle$, $\mathbb{D}_2=\langle e^2,e^5\rangle$, $\mathbb{D}_3=\langle e^3,e^6\rangle$. Тор T^3 действует в $\mathbb{R}^6$ вращениями внутри этих площадок. Таким образом, две почти комплексные структуры I и J будут принадлежать одному классу эквивалентности в $\mathcal{Z}/T^3$, если $I=OJO^{-1}$, где $O\in SO(6)$ – матрица вращения внутри данных площадок. То есть будем отождествлять почти комплексные структуры, которые отличаются друг от друга лишь на повороты внутри этих площадок. Так как $(\cos\alpha e+\sin\alpha f)\wedge(-\sin\alpha e+\cos\alpha f)=e\wedge f$, то вершины тетраэдра остаются инвариантными при таких поворотах. Воспользуемся явным описанием ребра $\mathcal{E}_{01}$ из леммы 1. Введем сферические координаты:

$$\begin{aligned} &r=\sin\psi; \\ &u=\cos\varphi\cos\psi; \quad -\pi/2\le\psi\le\pi/2 \\ &v=\sin\varphi\cos\psi; \quad 0\le\varphi\le 2\pi \end{aligned}$$

Тогда форма $\omega\in\mathcal{E}_{01}$ имеет вид:

$$\omega=e^1\wedge e^4+\sin\psi(e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^6)+\cos\varphi\cos\psi(e^2\wedge e^3+e^6\wedge e^5)+\sin\varphi\cos\psi(e^2\wedge e^6+e^5\wedge e^3)=$$
$$=e^1\wedge e^4+\sin\psi(e^2\wedge e^5+e^3\wedge e^6)+\cos\psi(\cos\varphi e^2\wedge e^3+\cos\varphi e^6\wedge e^5+\sin\varphi e^2\wedge e^6+\sin\varphi e^5\wedge e^3).$$

Пусть теперь

$$f^2=\cos\varphi e^2+\sin\varphi e^5; f^5=-\sin\varphi e^2+\cos\varphi e^5,$$

тогда $f^2\wedge e^3+e^6\wedge f^5=\cos\varphi f^2\wedge e^3+\cos\varphi e^6\wedge f^5+$ $+\sin\varphi f^2\wedge e^6+\sin\varphi f^5\wedge e^3$, а значит, форма $\omega\in\mathcal{E}_{01}/SO(2)$ имеет вид $e^1\wedge e^4+\sin\psi(e^2\wedge e^5+$ $+e^3\wedge e^6)+\cos\psi(e^2\wedge e^3+e^6\wedge e^5)$. Класс эквивалентности в этом случае составляют формы, лежащие на параллелях сферы-ребра $\mathcal{E}_{01}$.

Что происходит в общем случае для ребра $\mathcal{E}_{p_+p_-}$? В статье [4] предложено следующее описание произвольной формы $\omega\in\mathcal{Z}$. Пусть $J\in\mathcal{Z}$ – почти комплексная структура, соответствующая ω, и $\mathbb{D}=\langle e^1,e^2,e^4,e^5\rangle$. Зафиксируем e^3, тогда Je^3 ортогонален e^3, а значит, $Je^3=ae^6+bf^1$, где $f^1\in\mathbb{D}$, $\|f^1\|=1$ и $a^2+b^2=1$. Единичная 1-форма af^1-be^6 ортогональна и e^3 и Je^3, а значит, 2-форма $\omega\in\mathcal{Z}$ имеет вид:

$$\omega(P,a,b)=e^3\wedge(ae^6+bf^1)-f^4\wedge(af^1-be^6)+f^2\wedge f^5,$$

здесь $(f^1,f^2,f^4,f^5)=(e^1,e^2,e^4,e^5)S$, для некоторого $S\in SO(4)$. Известно, что для $\Lambda^2\mathbb{D}$ имеет место разложение: $\Lambda^2\mathbb{D}=\Lambda^2_+\mathbb{D}\oplus\Lambda^2_-\mathbb{D}$, где

$$\Lambda^2_+\mathbb{D}=\{e^{14}+e^{25},e^{12}+e^{54},e^{15}+e^{42}\},$$
$$\Lambda^2_-\mathbb{D}=\{e^{14}-e^{25},e^{12}-e^{54},e^{15}-e^{42}\}$$

– собственные подпространства оператора $*$ (e^{ij} обозначает 2-форму $e^i\wedge e^j$). Это разложение позволяет построить двойное накрытие $SO(4)\longrightarrow SO(3)\times SO(3)$. Таким образом, произвольная матрица $P\in SO(4)$ может быть представлена матрицей $\begin{pmatrix} P_+ & 0\\ 0 & P_-\end{pmatrix}\in SO(6)$, где $P_+,P_-\in SO(3)$. Для формы ω матрицы P_+ и P_- имеют определенный геометрический смысл, а именно – $p_+=\omega(P,1,0)\in\mathcal{E}_{03}$, $p_-=\omega(P,-1,0)\in\mathcal{E}_{12}$. При изменении P_+ форма p_+ перемещается по ребру $\mathcal{E}_{03}$, а при изменении P_- форма p_- перемещается по ребру $\mathcal{E}_{12}$. Таким образом, с точностью до поворотов внутри площадок $\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2,\mathbb{D}_3$:

$$\mathcal{E}_{03}/S^1=\{\sin\psi(e^{14}+e^{25})+\cos\psi(e^{12}+e^{54})+e^{36}:-\pi/2\le\psi\le\pi/2\},$$
$$\mathcal{E}_{12}/S^1=\{\sin\theta(e^{14}-e^{25})+\cos\theta(e^{12}-e^{54})-e^{36}:-\pi/2\le\theta\le\pi/2\}.$$

Нетрудно проверить, что паре матриц: (P_+,P_-), где $P_+=\begin{pmatrix}\sin\psi&0&0\\0&\cos\psi&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_-=\begin{pmatrix}\sin\theta&0&0\\0&\cos\theta&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ соответствует матрица

$$\begin{pmatrix}\sin\frac{\psi+\theta}{2}&0&0&-\cos\frac{\psi+\theta}{2}\\ 0&\cos\frac{\psi-\theta}{2}&-\sin\frac{\psi-\theta}{2}&0\\ 0&\sin\frac{\psi-\theta}{2}&\cos\frac{\psi-\theta}{2}&0\\ \cos\frac{\psi+\theta}{2}&0&0&\sin\frac{\psi+\theta}{2}\end{pmatrix}$$

из $SO(4)$. Полагая $a=\sin\varphi$, $b=\cos\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$, получаем:

Теорема 2. *Форма $\omega\in\mathcal{Z}/\mathbb{T}^3$ имеет вид:*

$$\begin{aligned}\omega=e^3\wedge(\sin\varphi e^6+\cos\varphi(\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}e^1+\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}e^5))+\\ +(\sin\varphi(\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}e^1+\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}e^5)-\cos\varphi e^6)\wedge\\ \wedge(-\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}e^2+\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}e^4)+(\cos\tfrac{\psi-\theta}{2}e^2+\\ +\sin\tfrac{\psi-\theta}{2}e^4)\wedge(-\cos\tfrac{\psi+\theta}{2}e^1+\sin\tfrac{\psi+\theta}{2}e^5),\end{aligned}$$

где $\phi,\psi,\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$.

Следствие 2. *Компоненты произвольной почти комплексной структуры $J\in\mathcal{Z}$ в базисе (e):*

$J_{12}=\sin\frac{\psi+\theta}{2}\sin\frac{\psi-\theta}{2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos\frac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi_1\sin\varphi_2-\sin\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2),$
$J_{13}=\cos\varphi(\cos\frac{\psi-\theta}{2}\cos\varphi_1\cos\varphi_3-\sin\frac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_1\sin\varphi_3),$
$J_{14}=\sin\varphi\sin\frac{\psi+\theta}{2}\cos\frac{\psi-\theta}{2}+\cos\frac{\psi+\theta}{2}\sin\frac{\psi-\theta}{2},$
$J_{15}=\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos\frac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)-\sin\frac{\psi+\theta}{2}\sin\frac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2),$
$J_{16}=-\cos\varphi(\sin\frac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_3+\cos\frac{\psi-\theta}{2}\cos\varphi_1\sin\varphi_3),$
$J_{23}=\cos\varphi(\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_2\sin\varphi_3+\sin\frac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_2\cos\varphi_3),$
$J_{24}=\sin\frac{\psi+\theta}{2}\sin\frac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi\cos\varphi_1\sin\varphi_2)-\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos\frac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2),$
$J_{25}=\sin\varphi\cos\frac{\psi+\theta}{2}\sin\frac{\psi-\theta}{2}+\cos\frac{\psi-\theta}{2}\sin\frac{\psi+\theta}{2},$
$J_{26}=\cos\varphi(\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_2\cos\varphi_3-\sin\frac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_2\sin\varphi_3),$
$J_{34}=\cos\varphi(\sin\frac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_1\sin\varphi_3+\cos\frac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_1\cos\varphi_3),$
$J_{35}=\cos\varphi(\cos\frac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_2\sin\varphi_3-\sin\frac{\psi-\theta}{2}cos\varphi_2\cos\varphi_3),$
$J_{36}=\sin\varphi,$
$J_{45}=\cos\frac{\psi+\theta}{2}\cos\frac{\psi-\theta}{2}(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi\sin\varphi_1\sin\varphi_2)-\sin\frac{\psi+\theta}{2}\sin\frac{\psi-\theta}{2}(\sin\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2),$
$J_{46}=\cos\varphi(\cos\frac{\psi-\theta}{2}\sin\varphi_1\sin\varphi_3-\sin\frac{\psi+\theta}{2}\cos\varphi_1\cos\varphi_3),$
$J_{56}=-\cos\varphi(\cos\frac{\psi+\theta}{2}\sin\varphi_2\cos\varphi_3+\sin\frac{\psi-\theta}{2}\cos\varphi_2\sin\varphi_3),$ *где* $\phi,\psi,\theta\in[-\pi/2,\pi/2],\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in[0,2\pi].$

Замечание 4. Следствие 2 дает явное описание произвольной, левоинвариантной ортогональной почти комплексной структуры на 6-мерной группе Ли. Поскольку каждая ортогональная почти комплексная структура в некотором ортонормированном базисе ведет себя как стандартная, то для ее описания достаточно указать способ построения нового базиса, в котором она будет вести себя стандартным образом. Введем обозначения: R_{φ_i} – поворот внутри площадки $\mathbb{D}_i$ на угол φ_i, R_α – поворот на угол α ($\alpha=\frac{\psi+\theta}{2}$) внутри площадки $\langle e_1,e_5\rangle$, R_β – поворот на угол β ($\beta=\frac{\psi-\theta}{2}$) внутри площадки $\langle e_2,e_4\rangle$, R_φ – поворот на угол φ внутри площадки $\langle e_1,e_6\rangle$. Тогда базис, в котором произвольная ортогональная почти комплексная структура будет вести себя как стандартная, может быть получен следующей последовательностью поворотов: $R_\varphi\circ R_\alpha\circ R_\beta\circ R_{\varphi_3}\circ R_{\varphi_2}\circ R_{\varphi_1}$.

4. Пример

Рассмотрим группу $G=SU(2)\times SU(2)$. На этой группе можно выделить два особых класса почти комплексных структур. Это, во-первых, комплексные структуры Калаби-Экмана на произведении трехмерных сфер и, во-вторых, ортогональные левоинвариантные структуры, для которых норма тензора Нейенхейса достигает своего максимального значения, в некотором смысле "максимально неинтегрируемые"структуры.

Конструкция, позволяющая получить интегрируемые структуры, широко известна и принадлежит Е. Калаби и Б. Экману [5]. Для ее построения используется конструкция расслоения Хопфа $S^3\longrightarrow^{S^1}\mathbb{C}P^1$, на произведении сфер она дает расслоение с комплексной базой и слоем

$$S^3\times S^3\longrightarrow^{S^1\times S^1}\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1.$$

Этот факт и наличие голоморфных функций перехода позволяет построить комплексную структуру на пространстве расслоения $S^3\times S^3$. Известно [6,9], что комплексные структуры Калаби-Экмана исчерпывают весь класс левоинвариантных комплексных структур на группе Ли $SU(2)\times SU(2)$. Зафиксируем стандартный базис $(e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6)$ алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)=\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, в этом базисе интегрируемая структура, определяющая ту же ориентацию, что и I_0,I_1,I_2,I_3, имеет вид $Ie_1=-e_4$, $Ie_2=-e_3$, $Ie_5=e_6$. Очевидно, что все остальные ортогональные левоинвариантные комплексные структуры будут принадлежать орбите структуры I действия группы $SO(3)\times SO(3)$. Стабилизатором такого действия будет группа $SO(2)\times SO(2)$, таким образом, множеству интегрируемых почти комплексных структур в нашей модели будет соответствовать четырехмерное подмножество $S^2\times S^2=SO(3)\times SO(3)/SO(2)\times SO(2)$. Мы не будем полностью описывать множество таких структур в данной модели, это описание будет технически сложным, опишем лишь некоторые комплексные структуры. Рассмотрим следующие формы, соответствующие некоторым интегрируемым почти комплексным структурам:

$$\begin{array}{ll} e^{14}\pm e^{23}\mp e^{56}\in\mathcal{E}_{01}, & -e^{14}\pm e^{23}\pm e^{56}\in\mathcal{E}_{23},\\ \pm e^{12}\mp e^{45}+e^{36}\in\mathcal{E}_{03}, & \pm e^{12}\pm e^{45}-e^{36}\in\mathcal{E}_{12},\\ e^{25}\pm e^{46}\mp e^{13}\in\mathcal{E}_{02}, & -e^{25}\pm e^{46}\pm e^{13}\in\mathcal{E}_{13}. \end{array}$$

Каждая пара таких форм представляет собой диаметрально противоположные точки на экваторе соответствующего ребра тетраэдра. Других интегрируемых почти комплексных структур, которые лежали бы на ребрах тетраэдра, нет. Ребра-сферы, соединяющие "середины" скрещивающихся ребер, полностью состоят из интегрируемых почти комплексных структур.

"Максимально неинтегрируемые" структуры на группе Ли $SU(2)\times SU(2)$ переводят касательные векторы к одной сфере в касательные к другой [7], например, структуры I_0, I_1, I_2, I_3 "максимально неинтегрируемы". На множестве таких структур транзитивно действует группа $SO(3)\times\times SO(3)$ с подгруппой изотропии $diag(SO(3))$, орбитой почти комплексной структуры I_0 относительно действия группы $SO(3) \times SO(3)$ будет $SO(3) = SO(3) \times SO(3)/diag(SO(3))$. Используя формулы следствия 2, можно найти условия, при которых $J_{12} = J_{13} = J_{23} = J_{45} = J_{46} = J_{56} = 0$. Решением этой системы уравнений будет:

$$\left\{\begin{array}{l}\cos(\varphi_1) = 0,\\ \sin(\varphi_2) = 0,\\ \sin(\varphi_3) = 0,\end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left\{\begin{array}{l}\sin(\varphi_1) = 0,\\ \cos(\varphi_2) = 0,\\ \cos(\varphi_3) = 0.\end{array}\right.$$

Оба решения определяют одну и ту же форму, поэтому достаточно рассмотреть одну систему условий. Введем обозначения M_+ и M_- для "максимально неинтегрируемых" структур, лежащих на меридианах сфер-ребер $\mathcal{E}_{03}$ и $\mathcal{E}_{12}$ соответственно. $M_+ = \{\sin\psi(e^{14} + e^{25}) + \cos\psi(e^{15} + e^{42}) + e^{36} : -\pi \le \psi \le \pi\}$, $M_- = \{\sin\theta(e^{14} - e^{25}) + \cos\theta(e^{15} - -e^{42}) + e^{36} : -\pi \le \theta \le \pi\}$. Обозначим $M_{p_+p_-}$ половину большого круга меридиана обобщенной сферы-ребра $\mathcal{E}_{p_-p_+}$, тогда множество всех "максимально неинтегрируемых" структур образует 3-мерное подмножество в $\mathbb{C}P^3$:

$$\bigcup_{\substack{p_- \in M_- \\ p_+ \in M_+}} M_{p_-p_+}$$

Литература

[1] Бухштабер, В. М. *Торические действия в топологии и комбинаторике* / В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов. – М.: МЦНМО, 2004. – 272 с.

[2] Даурцева, Н. А. *О пространстве почти комплексных структур на многообразии* / Н. А. Даурцева, Н. К. Смоленцев // Вестник КемГУ. – **7**(2001).– С. 176 – 186.

[3] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии* / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – Т. 2.

[4] Abbena, E. *Almost Hermitian geometry on six dimensional nilmanifolds* / E. Abbena, S. Garbiero, S. Salamon // Ann. Scuola Norm. Sup. – Pisa: Cl. Sci. – **30** (2001). – P. 147 -– 170.

[5] Calabi, E. *A class of compact complex manifolds which are not algebraic.* / E. Calabi, B. Eckmann // Ann.Math. – **58**(1935). – P. 494 – 500.

[6] Daurtseva, N.A. *Invariant complex structures on* $S^3 \times S^3$ / N.A. Daurtseva // Electronic Journ. “Investigated in Russia”. – 2004. – P. 888 – 893; (http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2004/081e.pdf).

[7] Daurtseva, N.A. *Left-invariant almost nearly Kähler structures on* $SU(2) \times SU(2)$ *in the tetrahedron visualization for* $\mathbb{C}P^3$ / N. A. Daurtseva // arXiv:0608704[math.DG](2006). 12 p.

[8] Ivashkovich, S. *Complex curves in almost-complex manifolds and meromorphic hulls* / S. Ivashkovich, V. Shevchishin // Bochum: Ruhr-Univ. – Bochum, 1999. – VI.– 186 p.

[9] Magnin, L. *Left invariant complex structures on* $U(2)$ *and* $SU(2) \times SU(2)$ *revisited* / L. Magnin // Preprint, arXiv: 0809.1182 [math.RA] (2008). 25 p.

УДК 517.54: 517.862

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВЫХ КРИВЫХ

В. Б. Ким

ABOUT A CLASS OF SMOOTHING SPLINE CUBIC CURVES

V.B.Kim

В работе рассмотрен новый класс сглаживающих кубических сплайновых кривых. Эти кривые не являются ни β -сплайновыми кривыми, ни кривыми Безье. Найдены параметрические уравнения этих кривых и определены их некоторые геометрические свойства.

A new class of smoothing spline cubic curves is considered in the article.These curves are neither β-spline curves not Bezier curves.The parametric equations of the curves are obtained and some geometric properties of this curves are studied.

Ключевые слова:сплайновые кубические кривые, β -сплайновые кривые, кривые Безье.

keywords:spline curves, β-spline curves, Bezier curves

Составные сплайновые кривые традиционно строятся по заданному массиву точек (опорному массиву). При этом различают два типа задач. Первый, когда искомая кривая должна проходить через заданные точки (задача аппроксимации), и второй, когда искомая кривая проходит не через сами точки, а вблизи них, удовлетворяя некоторому вариационному условию (задача сглаживания). Соответственно различают два типа сплайновых кривых— аппроксимирующие и сглаживающие.