УДК 514.765

ИНВАРИАНТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПОЛЯ НА ГРУППАХ ЛИ МАЛОЙ РАЗМЕРНОСТИ

О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский

INVARIANT TENSOR FIELDS ON LOW DIMENSIONAL LIE GROUPS

O. P. Gladunova, E. D. Rodionov, V. V. Slavsky

Данная работа посвящена одному из разделов современной римановой геометрии — теории инвариантных тензорных полей на группах Ли. Предполагается дать краткий обзор некоторых результатов данной теории, наиболее близких к исследованиям авторов.

This paper is devoted to the theory of the invariant tensor fields on Lie groups which is one of the sections of modern Riemannian geometry. It is proposed to give a short survey of some results this theory which is similar to the other studies conducted by the authors.

Ключевые слова: инвариантные тензорные поля, группы Ли, алгебры Ли.

Keywords: invariant tensor fields, Lie groups, Lie algebras.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№10-01-90000-Бел_а), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457).

Введение

Данная работа посвящена одному из разделов современной римановой геометрии — теории инвариантных тензорных полей на группах Ли. Предполагается дать краткий обзор некоторых результатов данной теории по следующим темам, наиболее близким к исследованиям авторов.

1. Группы и алгебры Ли. Определения. Структура множества инвариантных метрик. Классификации групп Ли малых размерностей. Инвариантные тензорные поля на группах Ли.

2. Кривизны левоинвариантных метрик на группах Ли. Кривизна Риччи и одномерная кривизна 3-мерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками. Оценки кривизн различного типа, сигнатуры операторов Риччи и одномерной кривизны. Существование метрик знакоопределенной кривизны Риччи и одномерной кривизны на 3-мерных группах Ли. Сигнатура оператора Риччи левоинвариантных римановых метрик на группах Ли малой размерности.

3. Тензорные поля Вейля и Схоутена-Вейля на группах Ли малых размерностей. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с изотропным тензором Схоутена-Вейля. Левоинвариантные (псевдо)римановы метрики на 3-мерных группах Ли с почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля. Гармоничность формы Схоутена-Вейля по направлению на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой. Гармоничность тензора Вейля на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой. О разложении оператора кривизны в слоях пространства расслоения бивекторов над четырехмерной группой Ли.

Надеемся, что представленные здесь сравнительно недавние результаты и их приложения найдут своего заинтересованного читателя, а ценные замечания будут с признательностью приняты.

I. Группы и алгебры Ли

1.1. Определения и конструкции

Данный раздел содержит сведения общего характера, которые хорошо известны и могут быть найдены в [17, 27, 29, 32].

Определение 1.1.1. *Пусть G — дифференцируемое многообразие, τ — дифференцируемая структура на G, " $\cdot$ " — групповая структура на G. Тройка $\{G, \cdot, \tau\}$ называется группой Ли, если дифференцируемая и групповая структуры согласованы, т. е. отображение $(x, y) \mapsto x \cdot y^{-1}$ прямого произведения $G \times G$ в G дифференцируемо.*

Группа Ли называется компактной (связной), если многообразие G компактно (связно). Если группа Ли рассматривается над полем C (соответственно R), то группу Ли называют комплексной (соответственно вещественной) группой Ли.

Пусть G — группа Ли. С каждым элементом $y \in G$ связан диффеоморфизм $\ell(y) : G \to G$, который определяется равенством $\ell(y)x = y \cdot x$ и называется левым сдвигом. Векторное поле X на G называется левоинвариантным, если оно инвариантно относительно всех левых сдвигов, т. е. $d\ell(y)X_p = X_{y \cdot p}$ для всех $p, y \in G$. Здесь X_p — касательный вектор в точке $p \in G$. Левоинвариантные векторные поля на G образуют векторное пространство. Обозначим его через $L(G)$.

Определение 1.1.2. *Векторное пространство V над полем K ($K = C$ или $K = R$) с операцией умножения $V \times V \to V$, обозначаемой $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ и называемой скобкой (или коммутатором) элементов X и Y, называется алгеброй Ли над полем K, если выполняются следующие аксиомы:*

1) *операция коммутирования билинейна;*
2) *операция коммутирования кососимметрична;*
3) *справедливо тождество Якоби:* $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0,$ *для всех* $X,Y,Z\in V$.

Замечание. Если $X,Y \in L(G)$, то скобка Пуассона $[X,Y]=X\circ Y-Y\circ X$ векторных полей X,Y также будет левоинвариантным векторным полем, и это задает в $L(G)$ билинейную операцию, относительно которой $L(G)$ является алгеброй Ли.

Замечание. Алгебра Ли $L(G)$ левоинвариантных векторных полей на G естественно отождествляется с касательным пространством T_eG в единице $e\in G$. Если $X_e\in T_eG$, то соответствие $X_e\longmapsto X\in L(G)$ определяет искомый изоморфизмом пространств $L(G)$ и T_eG. Положим $[X_e,Y_e]= [X,Y]_e$. Тогда векторное пространство T_eG с операцией $[X_e,Y_e]$ образует алгебру Ли и называется алгеброй Ли группы G. Всюду далее алгебру Ли группы G будем обозначать через $\mathfrak{g}$. Алгебры Ли $L(G)$ и T_eG изоморфны.

Для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определена форма Картана-Киллинга

$$B(X,Y)=-\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X)\circ\mathrm{ad}(Y)),$$

где оператор $\mathrm{ad}(X)$ на $\mathfrak{g}$ имеет вид:

$$\mathrm{ad}(X):Z\longmapsto[X,Z],\ \ \forall Z\in\mathfrak{g}.$$

Замечание. Отметим, что форма B инвариантна относительно любого автоморфизма алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Определение 1.1.3. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *называется полупростой, если форма Картана-Киллинга алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *невырождена. Подпространство* $\mathfrak{a}$ *в алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *называется подалгеброй (соответственно идеалом), если* $[\mathfrak{a},\mathfrak{a}]\subset\mathfrak{a}$ *(соответственно* $[\mathfrak{a},\mathfrak{g}]\subset\mathfrak{a}$*). Полупростую алгебру Ли называют простой, если она не имеет идеалов, отличных от* 0 *и* $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим две последовательности идеалов: производный ряд $\mathfrak{g}\supseteq\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\supseteq\mathfrak{g}''=[\mathfrak{g}',\mathfrak{g}']\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}^{(k)}=[\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}]\cdots$ и нижний центральный ряд $\mathfrak{g}_{(1)}=\mathfrak{g}\supseteq\mathfrak{g}_{(2)}=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\supseteq\mathfrak{g}_{(3)}=[\mathfrak{g}_{(2)},\mathfrak{g}]\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{g}_{(k)}=[\mathfrak{g}_{(k-1)},\mathfrak{g}]\cdots$.

Определение 1.1.4. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *называется разрешимой (нильпотентной), если* $\mathfrak{g}^{(k)}=0$ *(*$\mathfrak{g}_{(k)}=0$*) для некоторого* k.

Определение 1.1.5. *Группа Ли* G *называется полупростой (соответственно простой, разрешимой, нильпотентной), если ее алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *полупроста (соответственно проста, разрешима, нильпотентна).*

Определение 1.1.6. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *называется унимодулярной, если выполняется равенство* $\mathrm{tr}(\mathrm{ad}(X))=0$ *для всех* $X\in\mathfrak{g}$.

Заметим также еще один факт. Для этого рассмотрим группу $GL(V)$ невырожденных линейных преобразований n-мерного вещественного пространства V.

Определение 1.1.7. *Гомоморфизм групп Ли* $\alpha: G\to GL(V)$ *называется линейным представлением группы* G *в конечномерном векторном пространстве* V.

Пусть $I(a)x=axa^{-1}$ — внутренний автоморфизм группы G. Переходя к дифференциалу, получим следующий автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$Ad(a)=dI(a)_e:T_eG\to T_eG,$$

где $a\in G$, $e\in G$ — единица группы G. Тогда отображение $Ad: a\to Ad(a)$ есть гомоморфизм группы G в $GL(\mathfrak{g})$, называемый присоединенным представлением группы G.

Определение 1.1.8. *Группа* G *называется унимодулярой, если* $|\det Ad(x)|=1$ *для всех* $x\in G$ *[29,36].*

Замечание. Отметим, что для связной группы Ли G ее унимодулярность эквивалентна унимодулярности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим также, что унимодулярными являются все компактные, все полупростые, все связные нильпотентные группы Ли [29].

1.2. Структура множества инвариантных метрик

Определение 1.2.1. *Псевдоримановой метрикой сигнатуры* (p,q) *на дифференцируемом многообразии* M *размерности* $n=p+q$ *называется такая гладкая симметричная дифференциальная 2-форма* g *на* M*, что для любой точки* $x\in M$ *форма* g_x *на* T_xM *невырождена и имеет сигнатуру* (p,q)*. Пара* (M,g) *называется псевдоримановым многообразием.*

Если $q=0$ *(т. е. форма* g_x *положительно определена), форма* g *называется римановой метрикой, а пара* (M,g) *— римановым многообразием.*

Если $p=1$ *и* $q>0$*, форма* g *называется лоренцевой метрикой, а пара* (M,g) *— лоренцивым многообразием.*

Определение 1.2.2. *(Псевдо)метрика на* G *называется левоинвариантной, если левые сдвиги группы* G *являются изометриями.*

Опишем алгоритм построения левоинвариантной римановой метрики на группе Ли G с помощью левых сдвигов.

Пусть $(X_e,Y_e)_e$ — некоторое (положительно определенное) скалярное произведение в точке

$e \in G$, где $X_e, Y_e \in T_eG$. Тогда, полагая $(X_p, Y_p)_p \stackrel{\text{def}}{=} (d\ell(p^{-1})X_p, d\ell(p^{-1})Y_p)_e$, получим тензорное поле типа $(2,0)$, или риманову метрику на группе Ли G в каждой точке $p \in G$. По построению эта метрика левоинвариантна.

Замечание. Нетрудно проверить, что если $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – две произвольные левоинвариантные римановы метрики, то существует самосопряженный линейный оператор $A : T_eG \to T_eG$, такой, что $\langle\cdot,\cdot\rangle = (A\cdot,\cdot)$. Таким образом, любое скалярное произведение в алгебре Ли $\mathfrak{g} = T_eG$ задается с помощью фиксированного скалярного произведения и некоторого самосопряженного линейного оператора, действующего в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ [4].

Напомним также, что метрической алгеброй Ли называется пара $(\mathfrak{g}, Q)$, где $\mathfrak{g}$ — вещественная алгебра Ли, а Q — некоторое скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Произвольная левоинвариантная риманова метрика g на группе Ли G определяет скалярное произведение Q на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G и, наоборот, каждое скалярное произведение Q на $\mathfrak{g}$ индуцирует левоинвариантную метрику g на группе G.

Теперь рассмотрим вопрос построения биинвариантной метрики, т. е. инвариантной относительно и правых сдвигов.

Лемма 1.2.1. [40] *Левоинвариантная метрика на G является также правоинвариантной, если и только если для любого элемента $a \in G$ линейное отображение*

$$\mathrm{Ad}(a) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

является изометрией относительно индуцированной метрики на алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Рассмотрим оператор $U : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, определяемый равенством $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$\langle U(X,Y), Z\rangle = \frac{1}{2}\left\{\langle [Z,X], Y\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle\right\} \qquad (1)$$

В данных обозначениях, выполняются (см. [40])

Лемма 1.2.2. *Левоинвариантная риманова метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на группе Ли G является биинвариантной в том и только том случае, если оператор $U : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, определяемый равенством (1) тривиален.*

Лемма 1.2.3. *В случае связной группы Ли G, левоинвариантная метрика является биинвариантной, если и только если линейное преобразование* $\mathrm{ad}(X)$ *кососимметрично для любого элемента $X \in \mathfrak{g}$ [40].*

Наконец, заметим, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ полупроста и компактна, то билинейная форма Картана-Киллинга $B(X,Y)$ невырождена в $\mathfrak{g} = T_eG$. Тогда биинвариантную (псевдо)риманову метрику можно задать на левоинвариантных векторных полях, положив

$$\langle X_p, Y_p\rangle = B(X_e, Y_e),$$

где $X_e, Y_e \in T_eG$, а $X_p = d\ell(p)X_e, Y_p = d\ell(p)Y_e$.

1.3. Классификации групп Ли малых размерностей

В данном разделе приведены сведения о классификации групп Ли и соответствующих им алгебр Ли малых размерностей с римановой метрикой, а также 3-мерных групп Ли с лоренцевой метрикой, которые потребуются для решения задач настоящей статьи.

Итак, пусть G — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. В размерности 3 соответствующая классификация групп Ли получена многими авторами (см., например, [40]).

Если G — трехмерная унимодулярная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G, то в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что (см. [40]):

$$[e_1, e_2] = \lambda_3 e_3, \quad [e_2, e_3] = \lambda_1 e_1, \quad [e_3, e_1] = \lambda_2 e_2.$$

Здесь $\lambda_i \in \mathbb{R}$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $i = 1,2,3$.

Имеется ровно шесть неизоморфных трехмерных унимодулярных алгебр Ли [40].

Пусть теперь G — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — произвольное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$, соответствующее некоторой левоинвариантной римановой метрике на группе Ли G. Тогда в $\mathfrak{g}$ существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$, такой, что (см. [40]):

$$[e_1, e_2] = \alpha e_2 + \beta e_3, \quad [e_1, e_3] = \gamma e_2 + \delta e_3, \quad [e_2, e_3] = 0,$$

где матрица $C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ имеет след $\alpha + \delta \neq 0$ и $\alpha\gamma + \beta\delta = 0$. Здесь $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Замечание. В случае $\alpha + \delta = 2$ инвариант

$$D = \alpha\delta - \gamma\beta \qquad (2)$$

определяет алгебру $\mathfrak{g}$ с точностью до изоморфизма (см. подробнее [40]).

Одна из классификаций соответствующих четырехмерных алгебр Ли дана Г. М. Мубаракзяновым в [25]. Придерживаясь системы обозначений [25], для изложения результатов будем предполагать, что фиксирован базис работ А. Г. Кремлева и Ю. Г. Никонорова [20, 21] в унимодулярном и неунимодулярном случаях соответственно. Классификация пятимерных алгебр Ли может быть найдена, например в [23, 24].

Наконец, если G — 3-мерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, то соответствующий классификационный результат получен в [28]. Будем придерживаться системы обозначений работы [28].

1.4. Об инвариантных тензорных полях на группах Ли

Изложение данного раздела опирается на работы [4, 19, 26].

Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n. Обозначим через ∇ связность Леви-Чивита и через $R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$ тензор кривизны Римана. Тензор Риччи r и скалярную кривизну s определим соответственно как $r = \mathrm{tr}(V \mapsto R(X,V)Y)$ и $s = \mathrm{tr}(r)$.

Определение 1.4.1. *Произведением Кулкарни-Номидзу двух симметрических 2-тензоров H, P называется 4-тензор $H \owedge P$, задаваемый формулой:*

$$\begin{gathered}(H \owedge P)(X,Y,Z,V) = \\ = H(X,Z)P(Y,V) + H(Y,V)P(X,Z) - \\ -H(X,V)P(Y,Z) - H(Y,Z)P(X,T),\end{gathered}$$

где X, Y, Z, $V \in T_xM$.

Разделим тензор кривизны на метрический тензор, в смысле произведения Кулкарни-Номидзу [4]:

$$R = W + A \owedge g. \tag{3}$$

Целая часть A от деления R на g называется тензором одномерной кривизны (или тензором Схоутена), а остаток от деления W — тензором Вейля (или тензором конформной кривизны).

Также нам потребуются кривизна Риччи и одномерная кривизна, определяемые с помощью соответствующих квадратичных форм:

$$r(X) = \frac{r_{ij} X^i X^j}{g_{ij} X^i X^j}, \quad A(X) = \frac{A_{ij} X^i X^j}{g_{ij} X^i X^j},$$

где X^i — координаты вектора $X \in T_xM$.

Пусть далее G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — левоинвариантная риманова метрика на G.

Фиксируем в $\mathfrak{g}$ ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Положим

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, \quad \nabla_{e_i} e_j = \Gamma_{ij}^k e_k, \quad \langle e_i, e_j \rangle = g_{ij},$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор.

Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}), \quad \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks},$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица обратная к $\|g_{ks}\|$.

Формулу для вычисления тензора Римана можно представить в виде:

$$R_{ijkt} = c_{ij}^s \Gamma_{sk,t} - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is,t} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js,t}.$$

Тензор Риччи и скалярную кривизну соответственно можно найти по формулам:

$$r_{ik} = R_{ijkt} g^{jt}, \quad s = r_{ik} g^{ik},$$

тензор одномерной кривизны равен:

$$A_{ik} = \frac{1}{n-2}\left(r_{ik} - \frac{s g_{ik}}{2(n-1)}\right), \tag{4}$$

а его ковариантные производные есть

$$A_{ij;k} = A_{lj}\Gamma_{ki}^l + A_{il}\Gamma_{kj}^l.$$

Тензор Вейля вычисляется по формуле:

$$\begin{gathered}W_{ijkt} = R_{ijkt} - \\ -\frac{1}{n-2}\left(r_{ik}g_{jt} - r_{it}g_{jk} + r_{jt}g_{ik} - r_{jk}g_{it}\right) - \\ -\frac{\rho}{(n-1)(n-2)}\left(g_{it}g_{jk} - g_{ik}g_{jt}\right).\end{gathered} \tag{5}$$

Дивергенцию тензора Вейля будем определять как в [46]:

$$\mathrm{div} W_{jkt} = g^{ip} W_{ijkt,p}, \tag{6}$$

где $W_{ijkt,p}$ — ковариантные производные тензора Вейля, и

$$W_{ijkt,p} = \Gamma_{pi}^l W_{ljkt} + \Gamma_{pj}^l W_{ilkt} + \Gamma_{pk}^l W_{ijlt} + \Gamma_{pt}^l W_{ijkl}.$$

Замечание. Дивергенция тензора Вейля кососимметрична относительно второго и третьего индексов, т. е. $\mathrm{div} W_{ijk} = -\mathrm{div} W_{ikj}$.

В размерности не выше 3 тензор Вейля тривиален, а роль его аналога играет тензор Схоутена-Вейля (или тензор Коттона), определяемый как

$$S_{ijk} = A_{ij;k} - A_{ik;j}. \tag{7}$$

Будем отождествлять ковариантные и контравариантные компоненты тензора S и определять квадрат его длины формулой

$$||S||^2 = S_{ijk} S^{ijk}. \tag{8}$$

Дивергенцию тензора Схоутена-Вейля зададим с помощью ковариантного дифференцирования с последующей сверткой с тензором g^{ij}. Возможны три варианта такой свертки, компоненты дивергенции при этом имеют вид:

$$g^{it} S_{ijk;t}, \quad g^{jt} S_{ijk;t}, \quad g^{kt} S_{ijk;t}.$$

Подчеркнем, что тензор S_{ijk} кососимметричен по индексам j и k, т. е. $g^{jt} S_{ijk;t} = -g^{jt} S_{ikj;t}$. Поэтому определим дивергенцию типа I и II тензора Схоутена-Вейля S_{ijk} соответственно формулами:

$$\mathrm{div}_1(S) = g^{it} S_{ijk;t}, \tag{9}$$

и

$$\mathrm{div}_2(S) = g^{jt} S_{ijk;t}. \quad (10)$$

Замечание. В силу косой симметрии тензора S_{ijk} по индексам j и k в размерности три можно корректно определить также дивергенцию типа III

$$\mathrm{div}_3(S) = S_{i12;3} + S_{i23;1} + S_{i31;2}, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

образующую псевдотензор валентности 1.

Будем определять ротор тензора Схоутена-Вейля равенствами

$$\mathrm{rot}(S_{ijk}) = S_{ijk;p} - S_{pjk;i} - S_{ipk;j} - S_{ijp;k}, \quad (11)$$

где $S_{ijk;t}$ — его ковариантные производные,

$$S_{ijk;t} = S_{ljk}\Gamma^l_{ti} + S_{ilk}\Gamma^l_{tj} + S_{ijl}\Gamma^l_{tk}.$$

Замечание. Вышеприведенные формулы показывают, что данные тензоры суть функции структурных констант c^k_{ij} алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент метрического тензора g_{ij}.

II. Кривизны левоинвариантных метрик на группах Ли

Известно, что ограничения различного типа на кривизну риманова многообразия позволяют получить информацию о его геометрическом и топологическом строении. Яркими примерами этого являются теоремы Майерса [41] и Бохнера [36]. Исследованию таких выжных характеристик кривизны, как кривизна Риччи и одномерной кривизны посвящены работы многих математиков [3, 4]. В случае однородных пространств, отличных от групп Ли, стоит отметить работы [35, 37, 38, 43] по изучению сигнатур кривизны Риччи. В настоящем разделе приведены результаты относительно главных кривизн Риччи и одномерной кривизны групп Ли малых размерностей.

Напомним, что под сигнатурой симметрического оператора B, действующего на n-мерном евклидовом пространстве, понимается упорядоченный набор $(\mathrm{sgn}(\tau_1), \mathrm{sgn}(\tau_2), \ldots, \mathrm{sgn}(\tau_n))$, где $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_n$ – собственные значения оператора B, и $\mathrm{sgn}(x)$ означает знак (вещественного) числа x.

Кроме того, приведем следующие критерии.

Критерий 1 *[40] Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной кривизны Риччи в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является биинвариантная риманова метрика.*

Критерий 2 *[44] Связная группа Ли G допускает левоинвариантную риманову метрику положительной одномерной кривизны в том и только том случае, если G компактна и ее фундаментальная группа $\pi_1(G)$ конечна. В таком случае искомой метрикой является стандартная риманова метрика.*

Заметим также, что положительность одномерной кривизны риманова многообразия влечет положительность кривизны Риччи. Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. существуют римановы метрики положительной кривизны Риччи и осциллирующей (принимающей значения разных знаков) одномерной кривизны (см. [44]).

2.1. Кривизна Риччи 3-мерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками

Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли. Тогда, в ортобазисе работы [40], главные значения кривизны Риччи и скалярная имеют вид (см. подробнее [40]):

$$r_1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3\right)\left(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3\right),$$
$$r_2 = \frac{1}{2}\left(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\right)\left(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3\right),$$
$$r_3 = \frac{1}{2}\left(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3\right)\left(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3\right),$$
$$s = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

Полагая

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i, \text{ где } i = 1, 2, 3,$$

получаем следующие результаты Дж. Милнора [40].

Теорема 2.1.1. *В ортобазисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ трехмерной унимодулярной группы Ли G квадратичная форма Риччи диагонализируема, и формулы для вычисления главных кривизн Риччи и скалярной кривизны, указанные выше, преобразуются к виду:*

$$r_1 = 2\mu_2\mu_3, \quad r_2 = 2\mu_1\mu_3, \quad r_3 = 2\mu_1\mu_2,$$
$$s = 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_2).$$

Следствие. *1) В зависимости от выбора левоинвариантной римановой метрики квадратичная форма Риччи группы $SU(2)$ может иметь одну из следующих сигнатур: $(+, +, +)$, $(+, 0, 0)$, $(+, -, -)$; а скалярная кривизна быть положительной, отрицательной или нулевой. 2) Для любой левоинвариантной метрики на 3-мерной группе Гейзенберга квадратичная форма Риччи имеет сигнатуру $(+, -, -)$ и строго отрицательную скалярную кривизну s. Кроме того, для частных кривизн Риччи выполняется*

$$|r_1| = |r_2| = |r_3| = |s|.$$

3) Пусть G есть одна из групп Ли $SL(2, \mathbb{R})$ или $E(1, 1)$. Тогда, в зависимости от выбора левоинвариантной метрики, квадратичная форма

Риччи группы G может иметь либо сигнатуру $(+,-,-)$, либо $(0,0,-)$. При этом скалярная кривизна строго отрицательна.

Следствие. *На трехмерной унимодулярной группе Ли определитель $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$ квадратичной формы Риччи всегда неотрицателен. Если определитель равен нулю, то не менее двух из главных кривизн Риччи равны нулю.*

Заметим, что позднее О. Ковальски и С. Ничкевич получили более общий результат [38].

Теорема 2.1.2. [38] *Унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными кривизнами Риччи r_1, r_2, r_3 существует, если и только если $r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 > 0$ или если не менее двух r_i, $i = 1,2,3$ равны нулю.*

Из формул, приведенных в начале раздела, нетрудно заметить, что выполняются равенства:

$$\begin{aligned} r_1 - r_2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3), \\ r_2 - r_3 &= (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_1), \\ r_3 - r_1 &= (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 + \lambda_1 - \lambda_2). \end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы Куранта-Фишера [30], а также результатов Дж. Милнора в унимодулярном случае следует

Теорема 2.1.3. [44] *Пусть $r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_1 \to \mathbb{R}$ — кривизна Риччи риманова многообразия $(G,(\cdot,\cdot))$. Тогда справедливы оценки таблицы 1.*

Таблица 1

Знаки $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$	Алгебра Ли	Кривизна Риччи
$+,+,+$	$su(2)$	$r_1 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_3, \quad r_1 \leq r_2 \leq r_3, r_3 > 0, r_1 \geq 0$ если $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2$. $r_2 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_3, \quad r_2 \leq r_1 \leq r_3, r_3 > 0, r_2 \leq 0$ если $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda_3$.
$+,+,-$	$sl(2,R)$	$r_1 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_3, \quad r_1 = r_2 < r_3, r_1 < 0, r_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. $r_1 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_3, \quad r_1 < r_2 \leq r_3, r_1 < 0, r_3 \geq 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1 + \lvert\lambda_3\rvert$. $r_1 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_2, \quad r_1 < r_3 \leq r_2, r_1 < 0, r_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_1 + \lvert\lambda_3\rvert < \lambda_2$.
$+,+,0$	$e(2)$	$r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0$, если $0 < \lambda_1 = \lambda_2$. $r_1 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_2, \quad r_1 < r_3 < r_2, r_1 < 0, r_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
$+,-,0$	$e(1,1)$	$r_3 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_1, \quad r_1 = r_2 = 0, r_3 < 0$ если $0 < \lambda_1 = \lvert\lambda_2\rvert$. $r_3 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_2, \quad r_3 < r_1 < r_2, r_3 < 0, r_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lvert\lambda_2\rvert$. $r_3 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_1, \quad r_3 < r_2 < r_1, r_3 < 0, r_1 > 0$ если $0 = \lvert\lambda_2\rvert < \lambda_1$.
$+,0,0$	h	$r_2 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq r_1, \quad r_2 = r_3 = -\frac{1}{2}\lambda_1^2 < 0, \ r_1 \frac{1}{2}\lambda_1^2 < 0.$
$0,0,0$	R^3	$r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0.$

Следствие. *Пусть $(G,(\cdot,\cdot))$ — 3-мерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой положительной кривизны Риччи. Тогда алгебра Ли группы G изоморфна $su(2)$, и множество левоинвариантных римановых метрик с $r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) > 0$ определяется системой неравенств:*

$$\begin{aligned} &0 < r_1, \\ &0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Кроме того, $d = (\min_{G_1} r_{(\cdot,\cdot)}(\pi))(\max_{G_1} r_{(\cdot,\cdot)}(\pi))^{-1} \in (0,1]$, и $d = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Замечание. Утверждение теоремы 2.1.3 для ограничений на кривизну Риччи в неунимодулярном случае аналогично унимодулярному случаю [44].

Рассмотрим подробнее неунимодулярный случай. Во-первых, заметим, что

Теорема 2.1.4. [38] *Неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и главными кривизнами Риччи r_1, r_2, r_3 существует, если и только если или $r_1 = r_2 = r_3 < 0$, или если с точностью до перестановки индексов выполняются:*

$$2r_1 < r_2 + r_3 < 0,$$
$$r_1(r_2 + r_3) \leq r_2^2 + r_3^2,$$
$$r_1 - r_2 = k(r_2 - r_3)$$

для некоторого постоянного k.

Пусть далее G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и D — инвариант, определяемый равенством (2) отличный от 1.

Следуя [40], положим: $\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = -(1 - \xi)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, где $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$. Тогда квадратичная форма Риччи диагонализируема в этом базисе, и ее главные кривизны и след вычисляются по формулам:

$$r_1 = -2 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0,$$
$$r_2 = -2 - 2\xi - 2\xi\eta^2 < 0,$$
$$r_3 = -2 + 2\xi + 2\xi\eta^2,$$
$$s = -6 - 2\xi^2 - 2\xi^2\eta^2 < 0, \ (\xi \geq 0, \ \eta \geq 0),$$

а условие $D \neq 1$ переписывается в виде $\xi \cdot \eta \neq 0$.

Это позволяет заметить истинность

Теорема 2.1.5. [40] *Если инвариант D отрицателен, то для любой левонвариантной метрики на неунимодулярной группе Ли G сигнатура кривизны Риччи имеет вид $(+, -, -)$. Если $D \geq 0$, то возможна также сигнатура $(0, -, -)$, и если $D > 0$ также возможна сигнатура $(-, -, -)$. Другими словами, для $D > 0$ существует левоинвариантная метрика строго отрицательной секционной кривизны и для $D > 1$ существует левоинвариантная метрика постоянной отрицательной кривизны. Во всех случаях скалярная кривизна строго отрицательна.*

В заключение приведем

Теорема 2.1.6. [9] *Пусть $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда кривизна Риччи группы $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакоопределена в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 2.*

Таблица 2

Алгебра Ли	Кривизна Риччи	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма, набором структурных констант	Отрицательна	$\alpha = 1 + \xi$, $\beta = (1 + \xi)\eta$, $\gamma = (\xi - 1)\eta$, $\delta = 1 - \xi$, $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$, $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$.

Замечание. Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик вещественных 4-мерных групп Ли изучалась А.Г. Кремлевым, Ю.Г. Никоноровым, 5-мерных нильпотентных групп Ли — А.Г. Кремлевым и М.С. Чебарыковым. Полученные результаты о наличии возможных сигнатур приведены в работах [20, 21] и [22, 31] соответственно.

2.2. Одномерная кривизна 3-мерных групп Ли с левоинвариантными римановыми метриками

Заметим, что в ортобазисе работы Дж. Милнора [40] одномерная кривизна диагонализируема, и ее главные значения равны (см. [44]):

$$a_1 = \frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 + 6\lambda_2\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2),$$
$$a_2 = \frac{1}{8}(-3\lambda_1^2 + 5\lambda_2^2 - 3\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_2\lambda_3),$$
$$a_3 = \frac{1}{8}(-3\lambda_1^2 - 3\lambda_2^2 + 5\lambda_3^2 + 6\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3).$$

Аналогично, в неунимодулярном случае имеем (см. [44]):

$$a_1 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\eta^2\xi^2 < 0,$$
$$a_2 = -\frac{1}{2} - 2\xi - 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2\eta^2 + \frac{1}{2}\xi^2,$$
$$a_3 = -\frac{1}{2} + 2\xi + 2\eta^2\xi + \frac{1}{2}\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2\xi^2.$$

На основании исследования вышеприведенных функций в унимодулярном случае имеет место

Теорема 2.2.1. [44] *Пусть $A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) : G_1 \to R$ — одномерная кривизна риманова многообразия $(G, (\cdot,\cdot))$. Тогда справедливы оценки таблицы 3.*

Таблица 3

Знаки $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$	Алгебра Ли	Кривизна Риччи
$+,+,+$	$su(2)$	$a_1 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_3,$ $a_1 \leq a_2 \leq a_3, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \lambda_1 + \lambda_2.$ $a_2 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_3,$ $a_2 \leq a_1 < a_3, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \leq \lambda_3.$
$+,+,-$	$sl(2,R)$	$a_1 = a_2 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_3,$ $a_1 < 0, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 = \lambda_2.$ $a_1 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_3,$ $a_1 < a_2 \leq a_3, a_1 < 0, a_3 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_1 + \|\lambda_3\|.$ $a_1 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_2,$ $a_1 < a_3 < a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_1 + \|\lambda_3\| < \lambda_2.$
$+,+,0$	$e(2)$	$A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0$, если $0 < \lambda_1 = \lambda_2.$ $a_1 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_2,$ $a_1 < a_3 < a_2, a_1 < 0, a_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 < \lambda_2.$
$+,-,0$	$e(1,1)$	$a_3 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_2,$ $a_3 < a_1 \leq a_2, a_3 < 0, a_2 > 0$ если $0 < \lambda_1 = \|\lambda_2\|.$ $a_3 \leq A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_1,$ $a_3 < a_2 \leq a_1, a_3 < 0, a_1 > 0$ если $0 = \|\lambda_2\| < \lambda_1.$
$+,0,0$	h	$a_2 \leq r_{(\cdot,\cdot)}(\pi) \leq a_1, \quad a_2 = a_3 < a_1, a_2 < 0, a_1 > 0.$
$0,0,0$	R^3	$A_{(\cdot,\cdot)}(\pi) = 0.$

Таблица 4

№	1	2	3	4	5
Сигнатура	$(-,-,-)$	$(-,-,0)$	$(-,-,+)$	$(-,0,0)$	$(-,0,+)$
№	6	7	8	9	10
Сигнатура	$(-,+,+)$	$(0,0,0)$	$(0,0,+)$	$(0,+,+)$	$(+,+,+)$

Занумеруем все возможные сигнатуры для трехмерного случая так, как это указано в таблице 4.

Последовательное изучение всех унимодулярных и неунимодулярных трехмерных алгебр Ли в базисах работы Дж. Милнора [40] позволяет сформулировать

Теорема 2.2.2. [6] *Пусть G – унимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли группы G, s – произвольная сигнатура из таблицы 4. Тогда s реализуется в качестве сигнатуры оператора одномерной кривизны для некоторого скалярного произведения на $\mathfrak{g}$ в том и только том случае, если в таблице 5 на пересечении строки, соответствующей алгебре Ли $\mathfrak{g}$, и столбца, соответствующего сигнатуре s, находится знак "+".*

Таблица 5

	№ сигнатуры									
Алгебра Ли	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$su(2)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
$sl(2,R)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
$e(2)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$
$e(1,1)$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
h	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
R^3	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$

Таблица 6

Алгебра Ли	Одномерная кривизна	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	$\frac{1}{8}(5\lambda_1^2 - 3(\lambda_2-\lambda_3)^2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_1\lambda_2) > 0$, $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма набором структурных констант	Отрицательна	$\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$, $\xi < -2+\sqrt{4+\frac{1}{1+\eta^2}}$.

Теорема 2.2.3. [6] *Пусть G — неунимодулярная трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G. Тогда в качестве сигнатур оператора одномерной кривизны на $\mathfrak{g}$ реализуемы только сигнатуры $(-,-,-)$, $(-,-,0)$, $(-,-,+)$, $(-,0,+)$, $(-,+,+)$, т. е. сигнатуры 1, 2, 3, 5 и 6 таблицы 4.*

Теорема 2.2.4. [9] *Пусть $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда одномерная кривизна группы $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакоопределена в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 6.*

Изучим теперь случай, когда кривизна Риччи знакоопределена, а одномерная кривизна осциллирует, т. е. принимает значения разных знаков. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 2.2.5. [9, 44] *Пусть $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой знакоопределенной кривизны Риччи. Тогда одномерная кривизна группы $(G,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ знакопеременна в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в таблице 7.*

Таблица 7

Алгебра Ли	Кривизна Риччи	Одномерная кривизна	Структурные константы
Унимодулярна, изоморфна $su(2)$	Положительна	Осциллирует	$0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 < \lambda_1 + \lambda_2$
Неунимодулярна, определяется с точностью до изоморфизма, набором структурных констант	Отрицательна	Осциллирует	$\alpha = 1+\xi$, $\beta = (1+\xi)\eta$, $\gamma = -(1-\xi)\eta$, $\delta = 1-\xi$, $\xi \ge 0$, $\eta \ge 0$, $\xi < \frac{1}{1+\eta^2}$.

III. Тензорные поля Вейля и Схоутена-Вейля на группах Ли малых размерностей

3.1. Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с изотропным тензором Схоутена-Вейля

Данный раздел посвящен решению задачи о существовании левоинвариантных метрик на 3-мерных группах Ли, для которых квадрат длины $||S||^2 = S_{ijk}S^{ijk}$ тензора Схоутена-Вейля тривиален, а некоторые его компоненты отличны от нуля.

Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис, удовлетворяющий теореме 7.2.1 работы [3], тогда, применяя формулы раздела 1.4 в построенном базисе, получим компоненты тензора Схоутена-Вейля и квадрата его длины (см. подробнее [3, 28]). Исследование данных компонент позволяет сформулировать

Теорема 3.1.1. [28] *Пусть G — связная трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвари-*

антной лоренцевой метрикой имеющей нетривиальный тензор Схоутена-Вейля со свойством $||S||^2 = 0$, тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G изоморфна либо $e(1,1)$, либо $sl(2,R)$.

Последовательным выбором базиса теорем 7.3.1 – 7.3.3 работы [3] и рассуждениями, аналогичными унимодулярному случаю, рассматривается неунимодулярный случай (см. [3, 28]).

3.2. Левоинвариантные (псевдо)римановы метрики на 3-мерных группах Ли с почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля

В данном разделе исследуются трехмерные группы Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля. Напомним, что

Определение 3.2.1. *Тензор $T_{i_1\ldots i_p}$ строения $(p,0)$ (см. [33]) называется гармоническим, если выполняются следующие три условия:*

(1) $T_{i_1\cdots i_p}$ *— кососимметрический,*

(2) $\mathrm{rot}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = 0$ *или* $T_{i_1 i_2\cdots i_p;t} = T_{t i_2\cdots i_p;i_1} + T_{i_1 t\cdots i_p;i_2} + \cdots + T_{i_1 i_2\cdots t;i_p}$,

(3) $\mathrm{div}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1\ldots i_p;t} = 0$,

и почти гармоническим, если выполняются следующие два условия:

(1) $\mathrm{rot}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = 0$,

(2) $\mathrm{div}(T_{i_1 i_2\cdots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1\ldots i_p;t} = 0$.

Понятие почти гармонического тензора вводится потому, что кососимметрическая часть $S_{[ijk]}$ и симметрическая часть $S_{(ijk)}$ тензора Схоутена-Вейля равны нулю. Таким образом, для тензора Схоутена-Вейля не выполняется первое условие из данного определения гармонического тензора.

Первоначально приведем несколько фактов, не зависящих от размерности. Их доказательство может быть найдено, например, в [3].

Теорема 3.2.1. *Пусть M — риманово многообразие, тогда*

$$S_{ijk;t} + S_{ikt;j} + S_{itj;k} = \\ = \frac{1}{n-2}(R_{tki}{}^{p} r_{pj} + R_{kji}{}^{p} r_{pt} + R_{jti}{}^{p} r_{pk}).$$

Отметим, что если в условиях теоремы $n = 3$, то

$$S_{ijk;t} + S_{ikt;j} + S_{itj;k} = 0, \quad \forall i \in \{1,2,3\}.$$

Теорема 3.2.2. *Пусть M — риманово многообразие, тогда справедливы равенства*

$$\mathrm{div}_1(S) = 0;$$

$$\mathrm{div}_2(S) = \frac{1}{n-2}\left(s_{;ik} + r_k{}^{p} r_{ip} + \right. \\ \left. + g^{jt}\left(R_{tki}{}^{p} r_{pj} - r_{ik;jt} - \frac{s_{;kt} g_{ij} - s_{;jt} g_{ik}}{2(n-1)}\right)\right).$$

Следствие. *Пусть $M = G$ — группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой, тогда справедливо равенство*

$$\mathrm{div}_2(S) = \frac{1}{n-2}\left(g^{jt}\left(R_{tki}{}^{p} r_{pj} - r_{ki;jt}\right) + r_k{}^{p} r_{ip}\right).$$

Для дальнейшего исследования левоинвариантных римановых метрик 3-мерных групп Ли с почти гармоническим тензором Вейля рассмотрим базис работы Дж. Милнора [40]. Применяя формулы раздела 1.4 и приведенные выше теоремы данного раздела, определяем компоненты ротора и дивергенции тензора Схоутена-Вейля. Отсюда следуют теоремы (см. подробнее [3, 12]).

Теорема 3.2.3. [12] *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathrm{div}_1(S) = 0$. *Тензор Схоутена-Вейля является почти гармоническим в том и только том случае, если алгебра Ли группы G имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3, левоинвариантная риманова метрика гомотетична стандартной (т. е. структурные константы алгебры Ли равны между собой), а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

(2) $\mathrm{div}_2(S) = 0$ *тогда и только тогда, когда алгебра Ли группы G имеет один из следующих типов: либо $su(2)$, либо $e(2)$, либо R^3, левоинвариантная риманова метрика гомотетична стандартной, а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

Теорема 3.2.4. [12] *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\mathrm{div}_1(S) = 0$. *Тензор Схоутена-Вейля является почти гармоническим в том и только том случае, если матрица структурных констант алгебры Ли группы G имеет вид:*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2-\delta & \pm\sqrt{2\delta-\delta^2} \\ \pm\sqrt{2\delta-\delta^2} & \delta \end{pmatrix},$$

где $\delta \in [0,2]$, а тензор Схоутена-Вейля тривиален.

(2) $\mathrm{div}_2(S) = 0$ *тогда и только тогда, когда матрица структурных констант алгебры Ли группы G имеет вид такой же, как в (1), а тензор Схоутена-Вейля тривиален.*

Аналогичными рассуждениями в базисе работы [28] с привлечением результатов предыдущего раздела, получаем 3-мерные группы Ли с левоинвариантными лоренцевыми метриками и почти гармоническим тензором Схоутена- Вейля (см. подробнее [8, 11]).

3.3. Гармоничность формы Схоутена-Вейля по направлению на 3-мерных группах Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой

Пусть $V = V^i E_i$ — левоинвариантное векторное поле. Отождествим V с вектором $\{V^k\} \in T_eG$ и определим кососимметрический тензор $w = \|w_{ij}\|$ по направлению вектора $\{V^k\}$ формулой

$$w_{ij} = V^k S_{kij}. \quad (12)$$

В силу косой симметрии тензора Схоутена-Вейля S_{kij} по индексам i и j тензор w_{ij} — кососимметрический. Ковариантные производные этого тензора равны

$$w_{ij;k} = w_{lj}\Gamma^l_{ki} + w_{il}\Gamma^l_{kj}.$$

Ротор и дивергенция тензора w_{ij} вычисляются соответственно по формулам:

$$\mathrm{rot}(w) = w_{ij;t} - w_{tj;i} - w_{it;j},$$
$$\mathrm{div}(w) = g^{it} w_{ij;t}.$$

Наряду с произвольными векторами будем рассматривать и гармонические векторы.

Определение 3.3.1. *Вектор $\{V^i\}$ называется гармоническим, если выполняются следующие условия:*

(1) $\mathrm{rot}(V) = V^i_{\ ;j} - V^j_{\ ;i} = 0$,

(2) $\mathrm{div}(V) = V^i_{\ ;i} = 0,$

где $V^i_{\ ;j} = -V^l\Gamma^i_{lk}$ — ковариантные производные вектора $\{V^i\}$.

Применяя данную конструкцию можно классифицировать 3-мерные группы и алгебры Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой и гармонической формой w_{ij} по направлению произвольного или гармонического вектора (см. подробнее [2, 3, 12]).

3.4. Гармоничность тензора Вейля на 4-мерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой

Данный раздел посвящен исследованию вопроса гармоничности тензора Вейля W.

Определение 3.4.1. [4, 39] *(Псевдо)риманово многообразие (M, g) размерности $n \geq 4$ называется C-пространством или пространством с гармоническим тензором Вейля, если* $\mathrm{div}W = 0$.

Фиксируя на каждой четырехмерной вещественной алгебре Ли ортонормированный базис работ [20, 21] и применяя формулы раздела 1.4, находим компоненты дивергенции тензора Вейля, исследование которых позволяет сформулировать теоремы (см. подробнее [5, 7, 15, 16]).

Теорема 3.4.1. [15] *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}W = 0$ *в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в 8.*

Таблица 8

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы c^k_{ij}	Ограничения на c^k_{ij}
$4\mathbb{A}_1$	Алгебра коммутативная, т. е. все $c^k_{ij} = 0$	
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = B,\ c^1_{2,3} = B$	$B > 0$
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = C,\ c^2_{1,3} = -C$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,6} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{2,3} = C,\ c^2_{1,3} = -C$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = c^1_{2,3} = CL^2 + C,\ c^2_{1,3} = -C,\ c^4_{1,3} = CL$	$C > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = -c^2_{1,3} = BK^2 + B,\ c^1_{2,3} = B,\ c^4_{2,3} = -BK$	$B > 0$
$\mathbb{A}_{3,9} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^3_{1,2} = H,\ c^4_{1,2} = -HM,\ c^1_{2,3} = -c^2_{1,3} = HM^2 + H$	$H > 0$

Теорема 3.4.2. [15] *Пусть G — вещественная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли. Тогда G не является C-пространством.*

Теорема 3.4.3. [7] *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и разложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}W = 0$ *в том и только том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 9.*

Таблица 9

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы c^k_{ij}	Ограничения на c^k_{ij}
$\mathbb{A}_2 \bigoplus 2\mathbb{A}_1$	$c^2_{1,2} = H$	H>0
$2\mathbb{A}_2$	$c^2_{1,2} = H,\ c^4_{3,4} = G$	H>0, G>0
$\mathbb{A}_{3,3} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = H$	$H > 0$
$\mathbb{A}^{\alpha}_{3,7} \bigoplus \mathbb{A}_1$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = \alpha L, -c^2_{1,3} = c^1_{2,3} = L$	$L > 0$

Теорема 3.4.4. [3] *Пусть G — вещественная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой и неразложимой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда* $\mathrm{div}W = 0$ *в том и только в том случае, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и ее структурные константы содержатся в таблице 10.*

Таблица 10

Алгебра Ли	Нетривиальные структурные константы c^k_{ij}	Ограничения на c^k_{ij}
$\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,5}$	$c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = L$	L>0
$\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,6}$	$c^1_{1,4} = \alpha L, c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -L$	$\alpha \neq 0, L > 0$
$\mathbb{A}^{\alpha,\beta}_{4,6}$	$c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = \beta L, c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = -L$	$\beta > 0, L > 0$
$\mathbb{A}^{\beta}_{4,9}$	$c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H, c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H$	$H > 0$
$\mathbb{A}^{\alpha}_{4,11}$	$c^1_{1,4} = c^1_{2,3} = 2H\alpha, c^2_{2,4} = c^3_{3,4} = H\alpha, c^3_{2,4} = -c^2_{3,4} = H$	$H > 0, \alpha > 0$
$\mathbb{A}_{4,12}$	$c^1_{1,3} = c^2_{2,3} = H, c^1_{1,4} = c^2_{2,4} = B, c^2_{1,4} = -c^1_{2,4} = -D$	$H > 0, D > 0$

3.5. О разложении оператора кривизны в слоях пространства расслоения бивекторов над четырехмерной группой Ли

В настоящем разделе исследуются 4-мерные римановы многообразия с теми или иными ограничениями на целую часть разложения тензора кривизны в прямую сумму произведения Кулкарни-Номидзу тензора одномерной кривизны с метрическим тензором и тензора Вейля W. Изучаются 4-мерные римановы многообразия, для которых автодуальная или антиавтодуальная составляющая тензора Вейля W равна нулю (см., например, [4]). Такие многообразия называются конформно полуплоскими [4, 34], в отличие от конформно плоских ($W = 0$). Конформно плоские римановы метрики исследовались в [3, 42]. Однородные конформно плоские римановы многообразия классифицированы Д.В. Алексеевским и Б.Н. Кимельфельдом в [1]. Вопрос о классификации конформно полуплоских однородных римановых многообразий в общем случае остается открытым. В настоящем разделе дана классификация вещественных четырехмерных алгебр Ли конформно полуплоских групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

Сначала рассмотрим римановы многообразия с условием равенства нулю целой части: $A \owedge g = 0$, и приведем несколько общих фактов, с доказательством которых можно ознакомиться в [14].

Теорема 3.5.1. [14] *Пусть (M, g) — риманово многообразие размерности n. Тогда $A \owedge g = 0$ в том и только том случае, если кривизна Риччи многообразия (M, g) равна нулю, или (M, g) является эйнштейновым многообразием с тривиальной константой Эйнштейна.*

Прямым следствием данной теоремы и теоремы Алексеевского-Кимельфельда является

Следствие. *Однородное риманово многообразие (M, g) с условием $A \owedge g = 0$ изометрично прямому риманову произведению евклидова пространства и плоского тора.*

Далее будем считать, что $\dim M = 4$. Тогда риманова метрика g индуцирует скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в слоях пространства расслоения $\Lambda^2 M$ по правилу:

$$\langle X_1 \wedge X_2, Y_1 \wedge Y_2 \rangle_x = \det(g_x(X_i, Y_j)).$$

Оператор Ходжа $* : \Lambda^2_x M \to \Lambda^2_x M$, задаваемый соотношением

$$\langle *\alpha, \beta \rangle \,\mathrm{vol} = \alpha \wedge \beta$$

для любых $\alpha, \beta \in \Lambda^2_x M$, $x \in M$), где vol — форма объема на M, обладает тем свойством, что$*^2 = \mathrm{Id}$. Отсюда

$$\Lambda^2_x M = \Lambda^+_x \oplus \Lambda^-_x, \qquad (13)$$

где Λ^+_x и Λ^-_x обозначают соответственно собственные пространства, отвечающие собственным значениям $+1$ и -1 оператора $*$.

Риманову тензору кривизны в любой точке многообразия M можно поставить в соответствие оператор $\mathcal{R} : \Lambda_x^2 M \to \Lambda_x^2 M$, определяемый равенством

$$\langle X \wedge Y, \mathcal{R}(T \wedge V)\rangle_x = R_x(X, Y, T, V),$$

где $R_x(X, Y, T, V) = g_x(R(X, Y)T, V)$.

Матрицу оператора кривизны $\mathcal{R}$ относительно разложения (13) можно представить в блочном виде [45]:

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} W^+ + \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & W^- + \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array}\right),$$

где W^+ и W^- — матрицы *автодуальной* и *антиавтодуальной* составляющих тензора Вейля W.

Согласно (3), можем записать

$$\mathcal{R} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{s}{12}\mathrm{Id} & Z \\ \hline Z^t & \frac{s}{12}\mathrm{Id} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} W^+ & 0 \\ \hline 0 & W^- \end{array}\right), \quad (14)$$

где первая матрица соответствует произведению $A \owedge g$, а вторая — тензору Вейля W.

Любой ортонормированный базис e_1, e_2, e_3, e_4 пространства T_xM определяет ортонормированный базис

$$\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_2 \pm e_3 \wedge e_4), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_3 \pm e_4 \wedge e_2), \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 \wedge e_4 \pm e_2 \wedge e_3) \end{array} \quad (15)$$

пространства $\Lambda_x^{\pm} M$ (см., например, [4]).

Отметим, что матрицы W^+ и W^- являются симметричными и их компоненты в ортонормированном базисе (15) находятся по формулам:

$$W_{11}^+ = \frac{1}{2}(R_{1212} + 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12},$$
$$W_{22}^+ = \frac{1}{2}(R_{1313} - 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12},$$
$$W_{33}^+ = \frac{1}{2}(R_{1414} + 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12},$$
$$W_{12}^+ = \frac{1}{2}(R_{1213} + R_{1242} + R_{3413} + R_{3442}),$$
$$W_{13}^+ = \frac{1}{2}(R_{1214} + R_{1223} + R_{3414} + R_{3423}),$$
$$W_{23}^+ = \frac{1}{2}(R_{1314} + R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}),$$

и соответственно

$$W_{44}^- = \frac{1}{2}(R_{1212} - 2R_{1234} + R_{3434}) - \frac{s}{12},$$
$$W_{55}^- = \frac{1}{2}(R_{1313} + 2R_{1324} + R_{2424}) - \frac{s}{12},$$
$$W_{66}^- = \frac{1}{2}(R_{1414} - 2R_{1423} + R_{2323}) - \frac{s}{12},$$
$$W_{45}^- = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} - R_{3413} + R_{3442}),$$
$$W_{46}^- = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} - R_{3414} + R_{3423}),$$
$$W_{56}^- = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} - R_{4214} + R_{4223}),$$

а элементы блока Z в базисе (15) равны:

$$Z_{11} = \frac{1}{2}(R_{1212} - R_{3434}),$$
$$Z_{22} = \frac{1}{2}(R_{1313} - R_{2424}),$$
$$Z_{33} = \frac{1}{2}(R_{1414} - R_{2323}),$$
$$Z_{12} = \frac{1}{2}(R_{1213} - R_{1242} + R_{3413} - R_{3442}),$$
$$Z_{13} = \frac{1}{2}(R_{1214} - R_{1223} + R_{3414} - R_{3423}),$$
$$Z_{23} = \frac{1}{2}(R_{1314} - R_{1323} + R_{4214} + R_{4223}).$$

Пусть далее $M = G$ — группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Фиксируем в $\mathfrak{g}$ базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ работ [20, 21]. Применяя формулы раздела 1.4 и вышеприведенные формулы блоков $W^{\pm}$, Z, находим компоненты блоков матрицы (14). Исследование которых позволяет сформулировать (см. подробнее [10, 13])

Теорема 3.5.2. [13] *Пусть G — вещественная 4-мерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*
1) $W^+ = 0$ в том и только том случае, если $W = 0$;
2) $W^- = 0$ в том и только том случае, если выполняется одно из следующих условий: либо $W = 0$, либо алгебра Ли группы G есть одна из алгебр следующего списка: алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,9}^{\beta}$ $(-1 < \beta \le 1)$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = 2H$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$ или $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H > 0$, $\beta = 1$; алгебра Ли $\mathbb{A}_{4,11}^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ с набором структурных констант $c_{1,4}^1 = 2H\alpha$, $c_{2,3}^1 = c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -H$, $H > 0$ или $c_{1,4}^1 = c_{2,3}^1 = 2H\alpha$, $c_{2,4}^2 = c_{3,4}^3 = H\alpha$, $c_{2,4}^3 = -c_{3,4}^2 = -H$, $H > 0$.

Теорема 3.5.3. [10] *Пусть G — действительная четырехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда, если $A \owedge g = 0$, то алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна либо алгебре Ли $4\mathbb{A}_1$, либо $\mathbb{A}_{3,6} \oplus \mathbb{A}_1$.*

Теорема 3.5.4. [10] *Пусть G — действительная четырехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда $A \owedge g \neq 0$.*

Заключение

Приведем список задач, которые связаны с тематикой данной работы и остаются открытыми.

1. Обобщить результаты О. Ковальского и С. Ничкевич о возможных сигнатурах оператора Риччи (оператора одномерной кривизны) в размерности 4 (см. [38]).

2. Исследовать возможные сигнатуры оператора одномерной кривизны на 4-мерных группах Ли с левоинвариантными римановыми метриками.

3. Классифицировать конформно полуплоские 4-мерные однородные римановы многообразия.

4. Получить оценки различного типа кривизн для 4-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

5. Получить оценки различного типа кривизн для 4-мерных однородных римановых пространств.

6. Исследовать области знакоопределенной кривизны Риччи (одномерной кривизны) в случае 4-мерных групп Ли с левоинвариантной римановой метрикой.

7. Изучить области знакоопределенной кривизны Риччи (одномерной кривизны) в случае 4-мерных однородных римановых пространств.

8. Иследовать трехмерные и четырехмерные однородные (псевдо)римановы многообразия с (почти)гармоническим тензором Вейля, Схоутена-Вейля.

Литература

[1] Алексеевский, Д. В.*Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий* / Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24, № 1. – С. 103 – 110.

[2] Балащенко, В. В. *Левоинвариантные римановы метрики с гармонической сверткой тензора Схоутена-Вейля на трехмерных группах Ли* / В. В. Балащенко, О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник БГПУ, серия: естественные и точные науки. – 2007. – № 7. – С. 5 – 13.

[3] Балащенко, В. В. *Однородные пространства: теория и приложения* // В. В. Балащенко, Ю. Г. Никоноров, Е. Д. Родионов, В. В. Славский – Ханты-Мансийск, Югорск. гос. ун-т, 2008 – 280 с.

[4] Бессе, А. *Многообразия Эйнштейна* / А. Бессе. – М.: Мир, 1990. – 704 с.

[5] Воронов, Д. С. *Гармонический тензор Вейля на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / Д. С. Воронов, О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник АлтГПА: естественные и точные науки. – 2010. – № 2. – С. 5 – 24

[6] Воронов, Д. С. *Сигнатура оператора одномерной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / Д. С. Воронов, О. П. Гладунова // Известия АГУ: математика и механика. – 2010. – № 1. – Вып. 2 – С. 24 – 28.

[7] Воронов, Д. С. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных неунимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* / Д. С. Воронов, Е. Д. Родионов // ДАН. – 2010. – Т. 432. – № 3. – С. 301 – 303.

[8] Гладунова, О. П. *Левоинвариантные лоренцевы метрики с почти гармоническим тензором Схоутена-Вейля* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник БГПУ: естественные и точные науки. – 2006. – № 6. – С. 10 – 26.

[9] Гладунова, О. П. *Области знакоопределенной кривизны на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Вестник АлтГПА: естественные и точные науки. – 2011. – № 3.

[10] Гладунова, О. П. *Об операторе кривизны на четырехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Известия АГУ: математика и механика. – 2010. – № 1. – Вып. 2. – С.29 – 33.

[11] Гладунова, О. П. *О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // ДАН. – 2009. – Т. 428. – № 6. – С. 733 – 736.

[12] Гладунова, О. П. *О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // ДАН. – 2008. – Т. 419. – № 6. – С. 735 – 738.

[13] Гладунова, О. П. *О конформно полуплоских 4-мерных группах Ли* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Владикавказский математический журнал. – 2011. – Т. 13. – Вып. 3. – С. 3 – 16.

[14] Гладунова, О. П. *Римановы многообразия с тривиальной целой частью в разложении тензора кривизны* / О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский // Известия АГУ: математика и механика. – 2011. – № 2. – Вып. 2.

[15] Гладунова, О. П., Славский В.В. *Левоинвариантные римановы метрики на четырехмерных унимодулярных группах Ли с нулевой дивергенцией тензора Вейля* / О. П. Гладунова, В. В. Славский // ДАН. – 2010. – Т. 431. – № 6. – С. 736 – 738.

[16] Гладунова, О. П. *О гармоничности тензора Вейля левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных унимодулярных группах Ли* / О. П. Гладунова, В. В. Славский // Мат. труды. – 2011. – Т. 14. – № 1. – С. 1 – 20.

[17] Джекобсон, Н. *Алгебры Ли*/ Н. Джекобсон. – М.: Мир, 1964. – 357 с.

[18] Дубровин, Б. А. *Современная геометрия. Методы и приложения*/ Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. – М.: Наука, 1986. – 760 с.

[19] Кобаяси, Ш. *Основы дифференциальной геометрии.* / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981.

[20] Кремлев, А. Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай* / А. Г. Кремлев, Ю. Г. Никоноров // Мат. труды – 2008. – Т. 11, № 2. – С. 115 – 147.

[21] Кремлев, А. Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай* / А. Г. Кремлев, Ю. Г. Никоноров // Мат. труды – 2009. – Т. 12, № 1. – С. 40 – 116.

[22] Кремлев, А. Г. *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на пятимерных нильпотентных группах Ли* / А. Г. Кремлев // Сибирские электронные известия – 2009. – Т. 6. – С. 326 – 339.

[23] Морозов, В. В. *Классификация нильпотентных алгебр Ли 6-го порядка* / В. В. Морозов // Изв. вузов. Серия: математика. – 1958. – Т. 5, № 4. – С. 161 – 174.

[24] Мубаракзянов, Г. М. *Классификация вещественных структур алгебр Ли 5-го порядка*/ Г. М. Мубаракзянов // Изв. вузов. Серия: математика – 1963. – Т. 34, № 3. – С. 99 – 106.

[25] Мубаракзянов, Г.М. *О разрешимых алгебрах Ли*/ Г. М. Мубаракзянов // Изв. вузов. серия: математика – 1963. – Т. 32, № 1. – С. 144 – 123.

[26] Новиков, С. П. *Современные геометрические структуры и поля*/ С. П. Новиков, И. А. Тайманов. – М.: МЦНМО, 2005. – 584 с.

[27] Понтрягин, Л. С. *Непрерывные группы*/ Л. С. Понтрягин. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 520 с.

[28] Родионов, Е. Д. *Левоинвариантные лоренцевы метрики на группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена-Вейля* / Е. Д. Родионов, В. В. Славский, Л. Н. Чибрикова // Вестник БГПУ. Серия: естественные и точные науки. – Вып. 4. – 2004.

[29] Хелгасон, С. *Дифференциальная геометрия и симметрические пространства* /С. Хелгасон. – М.: Мир, 1964. – 608 с.

[30] Хорн, Р. *Матричный анализ*/ Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

[31] Чебарыков, М. С. *О кривизне Риччи неунимодулярных разрешимых метрических алгебр Ли*/ М. С. Чебарыков // Мат. труды. – 2010. – Т. 13, № 1. – С. 186 – 211.

[32] Шевалле, К. *Теория групп Ли. Т. 1.* / К. Шевалле. – М.: ИЛ, 1948. – 274 с.

[33] Яно, К. *Кривизна и числа Бетти*/ К. Яно, С. Бохнер. – М.: ИЛ, 1957. – 154 с.

[34] Atiyah M. F. *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry* / M. F. Atiyah, N. J. Hitchin,I. M. Singer // Proc. Roy. Soc. London Ser.A – 1978. – V. 362, no. 1711. – P. 425 – 461.

[35] Berard-Bergery L. *Les espaces homogenes Riemanniens de dimension 4* / L. Berard-Bergery // Semin. Arthur Besse. – Paris, 1978/79, (1981). – P. 40 – 60.

[36] Bochner,S. *Vectors fields and Ricci curvature*/ S. Bochner // Bull. Ann. Math. Soc. – 1946. – Vol. 52. – P. 776 – 797.

[37] Ishihara, S. *Homogeneous Riemannian spaces of four dimensions* / S. Ishihara // J. Math. Soc. Japan. – 1955. – Vol. 7. – P. 345 – 370.

[38] Kowalski, O. *On Ricci eigenvalues of locally homogeneous Riemann 3-manifolds*/ O. Kowalski, S. Nikcevic. // Geom. Dedicata. – 1996. – no. 1. – P. 65 – 72.

[39] Listing, M. *Conformal Einstein spaces in N-dimensions*/ M. Listing // Ann. Global Anal. Geom. – 2001. – Vol. 20. – P. 183 — 197.

[40] Milnor, J. *Curvature of left invariant metric on Lie groups*/ J. Milnor // Advances in mathematics. – 1976. – Vol. 21. – P. 293 – 329.

[41] Myers, S. B. *Riemannian manifolds with positive mean curvature* / S. B. Myers // Duke Math. J. – 1941. – Vol. 8. – P. 401 – 404.

[42] Nikonorov, Yu. G. *Geometry of homogeneous Riemannian manifolds*/Yu. G. Nikonorov, E. D. Rodionov, V. V. Slavsky // Journal of Mathematical Sciences. – 2007. – Vol. 146, no. 6. – P. 6313 – 6390.

[43] Patrangenaru, V. *Classifying 3 and 4 dimensional homogeneous Riemannian manifolds by Cartan triple*/ V. Patrangenaru // Pacific J. Math. – 1996. – V. 173, no. 1. – P. 511 – 532.

[44] Rodionov, E. D. *Curvature estimations of left invariant Riemannian metrics on three dimensional Lie groups*/ E. D. Rodionov, V. V. Slavsky // Differential Geometry and Application. Proceeding of the 7^{th} International Conference. – Brno, 1999. – P. 111 – 126.

[45] Singer, I. M. *The curvature of 4-dimensional Einstein spaces* / I. M. Singer, J. A. Thorpe // Global Analisis, Papers in Honour of K. Kodarira, Univ. Tokyo Press. – 1969. – P. 355 – 365.

[46] Yano, K. *Differential geometry on complex and almost complex spaces* / K. Yano. – Pergamon press, 1965. – 325 p.