УДК 511.1, 515.124.3

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДВОИЧНЫХ И ТРОИЧНЫХ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ

В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева

SOME APPLICATIONS OF BINARY AND TERNARY SYSTEMS OF NUMERATION

V. N. Berestovskii, I. A. Zubareva

Посредством двоичных и троичных систем счисления решаются две задачи: поиск конечных наборов гирь данного суммарного веса $m \in \mathbb{N}$ (кг), в том числе с наименьшим числом гирь, таких, что груз любого веса $n \in \mathbb{N} \cap [1, m]$ (кг) можно взвесить на весах, пользуясь односторонним или двусторонним расположением гирь; координатное описание салфетки и ковра Серпинского, губки Менгера. На основе решения второй задачи доказано, что ограничение евклидовой метрики на любое из этих трех множеств и индуцированная этим ограничением внутренняя метрика билипшицево эквивалентны. Дано прямое доказательство того факта, что размерность Хаусдорфа каждого из этих множеств совпадает с их фрактальной размерностью.

By means of binary and ternary number systems, the authors solve two problems: the search of finite collections of weights with any given total weight $m \in \mathbb{N}$ (kg), in particular with minimal number of weights, such that one can weigh a load of any weight $n \in \mathbb{N} \cap [1, m]$ (kg), using one-sided or two-sided placement of weights; a coordinate description of Sierpiński gasket and carpet, Menger sponge. On the ground of solution of the second problem, it is proved that restriction of the Euclidean metric to any of these three sets and inner metric, induced by this restriction, are bi-Lipschitz equivalent. It is given a direct proof of known fact that Hausdorff dimensions of all these sets coincide with their fractal dimensions.

Ключевые слова: задача о гирях, двоичная система счисления, троичная (симметричная) система счисления, салфетка Серпинского, ковер Серпинского, губка Менгера, внутренняя метрика, билипшицева эквивалентность, мера Хаусдорфа, размерность Хаусдорфа, фрактальная размерность.

Keywords: weights problem, binary number system, ternary (symmetric) number system, Sierpiński gasket, Sierpiński carpet, Menger sponge, inner metric, bi-Lipschitz equivalence, Hausdorff measure, Hausdorff dimension, fractal dimension.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 08-01-00067), а также поддержана проектом "Квазиконформный анализ и геометрические аспекты теории операторов" и Советом по ведущим научным школам Российской Федерации (код проекта НШ-6613.2010.1).

1. Введение. Основные результаты

Предположим, что в нашем распоряжении находятся рычажные или чашечные весы и конечный набор C гирь. Пусть каждая из этих гирь имеет в некоторой фиксированной единице измерения (скажем, кг) вес, равный некоторому натуральному числу. Естественно, возникают следующие вопросы:

1) Какие цельные тела (т. е. тела, которые нельзя разбить на части) можно взвесить, пользуясь данным набором C?

2) Как подобрать набор C α) наименьшего возможного суммарного веса, и β) с наименьшим числом гирь, чтобы можно было взвесить груз любого веса n (кг) из заданного отрезка $[1, m]$ натурального ряда чисел?

3) Если C — решение задачи 2), то как найти число возможных способов взвешивания груза данного веса n (кг), $n \in [1, m]$?

Заметим, что каждую гирю из множества C можно использовать только один раз. Естественно ожидать, что эти задачи имеют различные решения, если гири а) разрешено класть только на одну чашу весов, или же б) можно класть на обе чаши весов. Заметим, что задачи 2) и 3) являются задачами целочисленного программирования.

Естественно назвать сформулированную выше задачу 2) "задачей о выборе наилучшей системы гирь для взвешивания на рычажных (чашечных) весах", или, более коротко, "задачей о гирях". Интересна история этой задачи для $m = 40$ в случае б). Впервые ее постановка и решение появились в книге Фибоначчи "Liber Abaci" (1202 г.). Затем "задача о гирях" появилась в "Сборнике приятных и занимательных задач" (1612 г.) французского математика Баше де Мизириака. В 1902 – 1907 гг. ею по долгу службы интересовался Д. И. Менделеев, будучи в то время директором Главной палаты мер и весов России. Поэтому в русской историко-математической литературе она известна также как "задача Баше-Менделеева". Вот один из вариантов ее постановки.

Задача. *Продавец для взвешивания товара пользуется чашечными весами и четырьмя гирями общим весом 40 кг. Известно, что, используя различные комбинации гирь, можно взвесить любой груз, вес которого выражается целым числом килограммов (от 1 до 40 кг). Сколько весит каждая гиря?*

Применяя логические рассуждения и метод перебора, нетрудно понять, что эти гири имеют вес 1, 3, 9, 27 кг соответственно. Заметим, что число $40 = 1+3+9+27$ есть сумма четырех первых членов геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем 3.

В параграфах 2 и 3 решается общая задача о гирях для случаев а) и б) соответственно. Случай а) более прост и связан с двоичной системой счисления. Случай б) связан с так называемой симметричной троичной системой счисления. Интересные сведения об этой системе счисления можно найти в книге А. П. Стахова [9].

Замечание 1. В общем случае не решена задача 3) и не найдено число решений задачи 2). По мнению авторов, это трудные, но интересные комбинаторные задачи.

В параграфе 4, с использованием стандартных троичных (соответственно двоичных) систем счисления с отрицательными степенями, дано описание классических фракталов: ковра Серпинского C, губки Менгера M (соответственно салфетки Серпинского S) в декартовых прямоугольных (соответственно барицентрических) координатах.

В параграфе 6 на основе результатов параграфа 5 доказано (насколько известно авторам, впервые), что ограничение евклидовой метрики из объемлющей плоскости или пространства на любой из рассматриваемых классических фракталов и индуцированная этим ограничением внутренняя метрика билипшицево эквивалентны. В статье [6] доказан интересный факт: каждое из этих трех пространств с соответствующей внутренней метрикой изометрично пространству орбит одного и того же геодезически и метрически полного $\mathbb{R}$-дерева валентности континуум в каждой точке по соответствующей подгруппе изометрий, снабженному фактор-метрикой.

В параграфе 7 с использованием соответствующей меры Хаусдорфа дано прямое доказательство того известного факта, что размерность Хаусдорфа любого из рассматриваемых классических фракталов совпадает с их так называемой *фрактальной размерностью.* Отметим, что другой подход к этому вопросу в более общих ситуациях излагается в работе [7].

Следует заметить, что в литературе существуют не совпадающие в общем случае понятия фрактальной размерности. Основатель фрактальной геометрии Б. Мандельброт считает это понятие синонимом размерности Хаусдорфа [8], (а *фракталом* во многих случаях называет (сепарабельное) метрическое пространство, размерность Хаусдорфа которого больше его топологической размерности). Фактически же для каждого рассматриваемого им компактного самоподобного фрактального метрического пространства (X,d) он под этим понимает число $r(X) = \log N/\log k$, где $k \geq 2$ — наименьшее натуральное число, такое, что X допускает метрическое (само)подобие в себя с коэффициентом $1/k$, а N — (минимальное) число различных самопободобных копий пространства X с этим коэффициентом (покрывающих пространство X). При этом он нигде не доказывает, что число $r(X)$ совпадает с размерностью Хаусдорфа пространства X. Автор книги [4] под фрактальной размерностью вполне ограниченного метрического пространства понимает его *верхнюю емкость.* На самом деле это понятие эквивалентно понятию *грубой размерности*, см. например [3]. Хаусдорфова размерность метрического пространства всегда не больше его грубой размерности. В [3] приведены примеры компактных метрических пространств с внутренней метрикой, для которых грубая размерность строго больше размерности Хаусдорфа. Хаусдорфова и грубая размерности всех рассматриваемых в этой статье фракталов совпадают.

Под фрактальной размерностью в этой статье понимается число Мандельброта $r(X)$.

2. Обобщенная "задача о гирях" с односторонним расположением гирь и двоичная система счисления

В этом параграфе рассмотрим существенно более легкую задачу для случая, когда разрешается класть гири только на одну чашу весов.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть $\{m_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, s$ — конечная неубывающая последовательность натуральных чисел. Тогда любое натуральное число*

$$n, \quad n \leq m := \sum_{k=0}^{s} m_k \tag{1}$$

можно (может быть, не единственным образом) представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \quad a_k = 0, 1;\ k = 0, 1, \ldots, s \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда

$$m_0 = 1 \quad и \quad m_k \leq \sum_{l=0}^{k-1} m_l + 1, \quad \forall \quad k = 1, \ldots s. \tag{3}$$

Доказательство. Докажем достаточность индукцией по s. При $s = 0$ натуральное число n, удовлетворяющее условию (1), равно $1 = m_0$.

Предположим теперь, что для некоторого $s = l \in Z_+$ всякое натуральное число n, удовлетворяющее условию (1), можно представить в виде (2). Покажем, что это утверждение верно и для $s = l+1$. Заметим, что число 0 представимо в виде (2). Если $n \leq \sum_{j=0}^{s-1} m_j$, то по индукционному предположению существуют числа $a_j = 0, 1$; $j = 0, 1, \ldots, s-1$, $a_s = 0$, такие, что $n = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j$.

Пусть $\sum_{j=0}^{s-1} m_j + 1 \le n \le \sum_{j=0}^{s} m_j$. Тогда на основании (3)

$$0 \le \sum_{j=0}^{s-1} m_j + 1 - m_s \le n - m_s \le \sum_{j=0}^{s-1} m_j.$$

Поэтому по индукционному предположению $n - m_s$ можно представить в виде (2). Следовательно, существуют числа $a_j = 0, 1$; $j = 0, 1, \ldots, s-1$, $a_s = 1$, такие, что $n = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j$.

Докажем необходимость. Покажем сначала, что $m_0 = 1$. По условию

$$m - 1 = \sum_{k=0}^{s} m_k - 1 = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k,$$

где $a_k = 0, 1;\ k = 0, \ldots, s$ и хотя бы одно из чисел a_k должно быть равным 0. Это было бы невозможно в случае $m_0 \ne 1$, так как тогда $2 \le m_0 \le m_k$ для всех $k = 0, \ldots, s$, следовательно, $m-1 \le m-2$, противоречие.

Предположим теперь, что неравенство в (3) не выполнено для некоторого k, $1 \le k \le s$. Тогда

$$\sum_{l=0}^{k-1} m_l < m_k - 1 = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j,$$

где $a_j = 0, 1;\ j = 0, \ldots, s$. Следовательно, по меньшей мере один из коэффициентов a_j, $k \le j \le s-1$, равен 1; обозначим его через a_i. Но тогда $\sum_{j=0}^{s-1} a_j m_j \ge m_i > m_k - 1$, что невозможно.

Предложение 1. *Пусть*

$$m = \sum_{k=0}^{s} m_k = \sum_{l=0}^{j} 2^l = 2^{j+1} - 1, \tag{4}$$

где $m_0 \le \cdots \le m_s$ — натуральные числа, и любое натуральное число n, $n \le m$, можно представить в виде (2). Тогда $s \ge j$, причем из равенства $s = j$ следует, что $m_k = 2^k$; $k = 0, \ldots, s$. В последнем случае для каждого натурального числа n, $n \le m$, существует единственное представление в виде (2).

Доказательство. На основании теоремы 1 выполнены соотношения (3). Следовательно,

$$m_0 = 1, m_1 \le 2,\ m_2 \le 4, \ldots,\ m_s \le 2^s. \tag{5}$$

Тогда

$$2^{j+1} - 1 = m = \sum_{k=0}^{s} m_k \le \sum_{k=0}^{s} 2^k = 2^{s+1} - 1,$$

что равносильно $s \ge j$, причем из равенства $s = j$ вытекает, что $m_k = 2^k;\ k = 0, \ldots, s$. В последнем случае представление в виде (2) любого натурального числа n, $n \le m$, есть единственное представление n в двоичной системе счисления.

Замечание 2. Из предложения 1 следует, что при расположении гирь на одной чаше весов минимальная по количеству гирь и суммарному весу система для взвешивания грузов весом n кг, где n — любое натуральное число, не превосходящее $2^j - 1$, единственна и состоит из j гирь весом $1, 2, \ldots, 2^{j-1}$ кг.

Предложение 2. *Пусть m, j - натуральные числа, удовлетворяющие условию*

$$\sum_{l=0}^{j-1} 2^l < m < \sum_{l=0}^{j} 2^l. \tag{6}$$

Тогда любое натуральное число n, $n \le m$, можно представить в виде

$$n = \sum_{l=0}^{j-1} a_l 2^l + a_j p, \tag{7}$$

где

$$p = m - \sum_{l=0}^{j-1} 2^l, \quad a_l = 0, 1;\ l = 0, \ldots, j.$$

Такое представление не единственно тогда и только тогда, когда $p \le n \le 2^j - 1$, причем p не является степенью двойки с целым показателем или в разложении числа $n - p$ по степеням двойки присутствует p.

Доказательство. Из условия (6) вытекает, что $p \le 2^j - 1$. Следовательно, последовательность чисел $m_k = 2^k;\ k = 0, \ldots, j-1;\ m_j = p$, с точностью до возможной перестановки индексов, не убывает и удовлетворяет условиям (3). Тогда первое утверждение вытекает из теоремы 1.

Ясно, что соответствующее представление числа n единственно, если $n < p$ или $2^j - 1 < n$. Пусть $p \le n \le 2^j - 1$. Если p не является степенью двойки, то имеются два различных представления числа n: единственное представление вида (7) с $a_j = 0$ и единственное представление вида (7) с $a_j = 1$. Если p — степень двойки, то $p = 2^s$, $1 \le s \le j-1$, и эти два представления совпадают тогда и только тогда, когда в разложении числа $n - p$ по степеням двойки отсутствует p.

Предложение 3. *Пусть натуральное число m, удовлетворяющее условию (6), представлено в виде суммы $m = \sum_{k=0}^{s} m_k$ натуральных чисел, и каждое натуральное число n, $n \le m$, можно представить в виде (2). Тогда $s \ge j$. Если $s = j$, то с точностью до перестановки чисел*

$$m_k = 2^k;\ k = 0, \ldots, j-1;\ m_j = p, \tag{8}$$

где p определено формулой (7), тогда и только тогда, когда $p = 2^j - 1$ или $m = 4$.

Доказательство. Можно считать, что последовательность m_k; $k = 0, 1, \ldots, s$ не убывает. Тогда аналогично доказательству предложения 1 выполнены соотношения (5). Следовательно,

$$2^j - 1 = \sum_{l=0}^{j-1} 2^l < m = \sum_{k=0}^{s} m_k \leq \sum_{k=0}^{s} 2^k = 2^{s+1} - 1.$$

Поэтому $s \geq j$.

Рассмотрим случай $s = j$. Ясно, что $1 \leq p \leq 2^j - 1$. Если хотя бы одно из первых $j - 1 \geq 1$ неравенств в (5) строгое, то вследствие теоремы 1,

$$m_j \leq \sum_{k=0}^{j-1} 2^k = 2^j - 1,$$

$$m = \sum_{k=0}^{j} m_k \leq 2^{j+1} - 3,\ p \leq 2^j - 2.$$

Отсюда вытекает, что в случае $p = 2^j - 1,\ j \geq 2$, соблюдаются равенства (8). Ясно, что то же верно и в случае $j = 1,\ p = 2^j - 1 = 1$.

Предположим теперь, что $p \leq 2^j - 2$ (заметим сразу, что отсюда вытекает неравенство $j \geq 2$). Ясно тогда, что последовательность чисел $\{m_0 = 1, \ldots, m_{j-2} = 2^{j-2},\ m_{j-1} = 2^{j-1} - 1,\ m_j = p + 1 \leq 2^j - 1\}$, с точностью до перестановки индексов, не убывает, удовлетворяет (3) и на основании теоремы 1 удовлетворяет условию предложения 3. Очевидно, что если $p \neq 2^{j-1} - 1$ (тогда $m \neq 4$), то никакая перестановка этих чисел не совпадет с (8).

Пусть теперь $p = 2^{j-1} - 1$. Случай $j = 2$ соответствует равенствам $p = 1,\ m = 4$, когда, очевидно, существует единственный неупорядоченный набор чисел $\{m_0 = 1,\ m_1 = 2,\ m_2 = p = 1\}$, удовлетворяющий условию предложения 3. Если $j > 2$, то $p \geq 2$ и ясно тогда, что последовательность чисел $\{m_0 = 1, \ldots, m_{j-2} = 2^{j-2},\ m_{j-1} = p - 1 = 2^{j-1} - 2,\ m_j = 2^{j-1} + 1\}$ не убывает, удовлетворяет (3) и на основании теоремы 1 удовлетворяет условию предложения 3. Очевидно, что никакая перестановка этих чисел не совпадет с (8).

3. Обобщенная "задача о гирях" с двусторонним расположением гирь и симметричная троичная система счисления

В этом параграфе рассмотрим задачу для случая, когда разрешается класть гири на обе чаши весов.

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть $\{m_k\}, k = 0, 1, \ldots, s$ — конечная неубывающая последовательность натуральных чисел. Тогда любое натуральное число*

$$n, \quad n \leq m := \sum_{k=0}^{s} m_k, \tag{9}$$

можно (может быть, не единственным образом) представить в виде

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k, \quad a_k = 0, \pm 1;\ k = 0, 1, \ldots, s \tag{10}$$

тогда и только тогда, когда

$$m_0 = 1 \quad и \quad m_k \leq 2 \sum_{l=0}^{k-1} m_l + 1 \tag{11}$$

для каждого $k = 1, \ldots s$.

Доказательство. Докажем необходимость. Покажем сначала, что $m_0 = 1$. По условию

$$m - 1 = \sum_{k=0}^{s} m_k - 1 = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k,$$

где $a_k = 0, \pm 1;\ k = 0, \ldots, s$ и где хотя бы одно из чисел a_k должно быть равным 0 или -1. Это было бы невозможно в случае $m_0 \neq 1$, так как тогда $2 \leq m_0 \leq m_k$ для всех $k = 0, \ldots, s$, следовательно, $m - 1 \leq m - 2$ – противоречие.

Предположим теперь, что неравенство в (11) не выполнено для некоторого k, $1 \leq k \leq s$. Тогда

$$m - m_k < \sum_{j=k}^{s} m_j - \sum_{j=0}^{k-1} m_j - 1 = \sum_{j=0}^{s} a_j m_j, \tag{12}$$

где $a_j = 0, \pm 1;\ j = 0, \ldots, s$.

Пусть хотя бы один из коэффициентов a_j, $k \leq j \leq s$, отличен от 1; обозначим его a_i. Тогда

$$m - m_k < \sum_{j=0}^{s} a_j m_j \leq m - m_i \leq m - m_k$$

вследствие (12), что невозможно. Следовательно, $a_j = 1$; $j = k, \ldots, s$, и

$$\sum_{j=0}^{k-1} m_j + 1 = -\sum_{j=0}^{k-1} a_j m_j \leq \sum_{j=0}^{k-1} m_j$$

на основании (12) – противоречие.

Доказательство достаточности теоремы 2 (индукцией по s) совершенно аналогично доказательству достаточности теоремы 1.

Определение 1. *Симметричной (или уравновешенной) троичной системой счисления называется целочисленная позиционная система счисления с основанием 3, в которой для обозначения разрядов чисел используются цифры -1, 0, 1.*

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Предложение 4. *Пусть $m = \frac{3^{j+1} - 1}{2}$ для некоторого $j \in Z_+$. Тогда любое натуральное число n, $n \leq m$, можно единственным образом представить в виде*

$$n = \sum_{l=0}^{j} a_l 3^l, \quad a_l = 0, \pm 1;\ l = 0, \ldots, j. \tag{13}$$

Другими словами, число n единственным образом представимо в симметричной троичной системе счисления в виде $n = a_j a_{j-1} \dots a_0$, *где* $a_l = 0, \pm 1$; $l = 0, \dots, j$.

Предложение 5. *Пусть*

$$m = \sum_{k=0}^{s} m_k = \sum_{l=0}^{j} 3^l = \frac{3^{j+1}-1}{2}, \qquad (14)$$

где $m_0 \le m_1 \le \dots \le m_s$ *— натуральные числа, и любое натуральное число* n, $n \le m$, *можно представить в виде (10). Тогда* $s \ge j$, *причем из равенства* $s = j$ *следует, что* $m_k = 3^k; k = 0, \dots, s$.

Доказательство. Вследствие теоремы 2 выполнены соотношения (11). Поэтому

$$m_0 = 1,\ m_1 \le 3,\ m_2 \le 9, \dots,\ m_s \le 3^s. \qquad (15)$$

Тогда

$$\frac{3^{j+1}-1}{2} = m = \sum_{k=0}^{s} m_k \le \sum_{k=0}^{s} 3^k = \frac{3^{s+1}-1}{2},$$

что равносильно неравенству $s \ge j$, причем из равенства $s = j$ вытекает, что $m_k = 3^k$; $k = 0, \dots, s$.

Замечание 3. Из предложения 5 следует, что если разрешено класть гири на обе чаши весов, то минимальная по количеству гирь и суммарному весу система для взвешивания грузов весом n кг, где n — любое натуральное число, не превосходящее $\frac{3^j-1}{2}$, единственна и состоит из j гирь весом $1, 3, \dots, 3^{j-1}$ кг.

Предложение 6. *Пусть натуральное число* m, *удовлетворяющее условию*

$$\sum_{l=0}^{j-1} 3^l < m < \sum_{l=0}^{j} 3^l, \qquad (16)$$

представлено в виде суммы $m = \sum_{k=0}^{s} m_k$ *натуральных чисел, и каждое натуральное число* n, $n \le m$, *можно представить в виде (10). Тогда* $s \ge j$. *Если* $s = j$, *то с точностью до перестановки чисел*

$$m_k = 3^k;\ k = 0, \dots, j-1;\ m_j = p = m - \sum_{l=0}^{j-1} 3^l, \qquad (17)$$

тогда и только тогда, когда $p = 3^j - 1$ *или* $p = 3^j - 2$.

Доказательство. Можно считать, что последовательность $\{m_k\}, k = 0, 1, \dots, s$, не убывает. Тогда аналогично доказательству предложения 5 выполнены соотношения (15). Следовательно,

$$\frac{3^j-1}{2} = \sum_{l=0}^{j-1} 3^l < m = \sum_{k=0}^{s} m_k \le \sum_{k=0}^{s} 3^k = \frac{3^{s+1}-1}{2}.$$

Поэтому $s \ge j$.

Пусть $s = j$. Ясно, что $1 \le p \le 3^j - 1$. Если хотя бы одно из первых $j - 1 \ge 1$ неравенств в (11) строгое, то, вследствие теоремы 2,

$$m_{j-1} \le 2 \sum_{l=0}^{j-2} 3^l = 3^{j-1} - 1,$$

$$m_j \le 2 \left(\sum_{l=0}^{j-2} 3^l + m_{j-1} \right) + 1 = 3^j - 2.$$

Поэтому

$$m = \sum_{l=0}^{j} m_l \le \frac{3^{j+1}-1}{2} - 3,\ p \le 3^j - 3.$$

Отсюда вытекает, что если $j \ge 2$ и $p = 3^j - 2$ или $p = 3^j - 1$, то $m_k = 3^k$; $k = 0, \dots, j-1$, т.е. соблюдаются равенства (17). Ясно, что то же верно в случаях $j = 1$, $p = 3^j - 2 = 1$ и $j = 1$, $p = 3^j - 1 = 2$.

Предположим теперь, что $p \le 3^j - 3$ (заметим сразу, что отсюда вытекает неравенство $j \ge 2$). Ясно тогда, что последовательность чисел $\{m_0 = 1, \dots, m_{j-2} = 3^{j-2},\ m_{j-1} = 3^{j-1} - 1,\ m_j = p+1\}$, с точностью до перестановки индексов, не убывает, удовлетворяет условиям (10) и на основании теоремы 2 удовлетворяет условию предложения 6. Очевидно, что если $p \ne 3^{j-1} - 1$, то никакая перестановка этих чисел не совпадет с (17).

Пусть теперь $p = 3^{j-1} - 1$. Так как $j \ge 2$, то $p \ge 2$, и последовательность чисел $\{m_0 = 1, \dots, m_{j-2} = 3^{j-2},\ m_{j-1} = 3^{j-1} + 1,\ m_j = p - 1 = 3^{j-1} - 2\}$, с точностью до перестановки индексов, не убывает, удовлетворяет условиям (11) и на основании теоремы 2 удовлетворяет условию предложения 6. Очевидно, что никакая перестановка этих чисел не совпадет с (17).

4. Классические фракталы и системы счисления

Салфетку Серпинского S можно определить (см. стр. 207 книги [1]) как (единственное) подмножество равностороннего треугольника S_0 со сторонами единичной длины на координатной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся пересечением счетного семейства замкнутых множеств S_i, $i = 0, 1, 2, \dots$, где каждое множество S_i состоит из 3^i (замкнутых) равносторонних треугольников $S_{i,j}$, имеющих стороны длины $1/2^i$ и попарно непересекающиеся внутренности, причем каждое множество S_i, $i = 1, 2, \dots$, получается из S_{i-1} удалением из каждого треугольника $S_{i-1,j}$ внутренности (замкнутого) равностороннего треугольника со сторонами длины $1/2^i$, имеющего с каждой стороной треугольника $S_{i-1,j}$ единственную общую точку.

Будем понимать точки из $\mathbb{R}^2$ как векторы. Пусть A, B, C — вершины треугольника S_0. Напомним, что каждую точку $X \in S_0$ можно единственным образом представить в виде

$$X = aA + bB + cC, \tag{18}$$

где

$$a + b + c = 1;\ a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0;$$

и (a, b, c) — *барицентрические координаты* точки X в треугольнике S_0.

Теорема 3. *$X \in S$ тогда и только тогда, когда $X \in S_0$ и двоичные представления барицентрических координат (a, b, c) точки X обладают следующим свойством: для каждого натурального числа n,*

$$\max(a_n, b_n, c_n) = 1 \quad \text{или} \quad a_k = b_k = c_k = 0 \tag{19}$$

для всех $k \geq n$.

Доказательство. Легко видеть, что точка $X = aA + bB$, где $a + b = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$, принадлежит отрезку $[A, B]$ и разбивает его в отношении $b : a$. Отсюда легко вывести, что множество всех точек $X \in S_0$ с барицентрическими координатами (a, b, c), где $a = a_0$ постоянно, есть отрезок в S_0, параллельный стороне BC треугольника S_0, концы которого разбивают отрезки $[B, A]$ и $[C, A]$ в отношении $a_0 : (1 - a_0)$. Аналогичные утверждения верны для барицентрических координат b и c. Как следствие, каждое из уравнений $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ определяет в барицентрических координатах соответствующую сторону треугольника S_0, а каждое из уравнений $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ — соответствующую среднюю линию треугольника S_0.

Ясно, что условие $X \in S_0$ необходимо. Докажем индукцией по n необходимость условия (19) для барицентрических координат (a, b, c) точки X.

Предположим сначала, что $n = 1$ и $a_1 = b_1 = c_1 = 0$ для двоичной записи барицентрических координат (a, b, c) некоторой точки $X \in S$. Если бы $\max(a_0, b_0, c_0) = 0$, то $\max(a, b, c) < 1/2$, что означает, что точка X лежит внутри треугольника, ограниченного средними линиями $a = 1/2$, $b = 1/2$, $c = 1/2$ треугольника S_0, следовательно, $X \notin S_1$ и $X \notin S$. Поэтому $\max(a_0, b_0, c_0) = \max(a, b, c) = 1$, т. е. X есть одна из вершин A, B, C треугольника S_0. Пусть, например, это вершина A. Тогда $a = 1, b = 0, c = 0$. Следовательно, $a_k = b_k = c_k = 0$ для всех $k \geq 1$.

Предположим, что необходимость условия (19) доказана для всех $n \in N$, не превосходящих натурального числа l, и пусть $n = l + 1$. Если $\max(a_l, b_l, c_l) = 0$, то вследствие индукционного предположения $a_k = b_k = c_k = 0$ для всех $k \geq l$, в частности, для всех $k \geq l + 1$. Поэтому можно считать, что $\max(a_l, b_l, c_l) = 1$. Положим $\alpha = a_0, a_1 \dots a_l$, $\beta = b_0, b_1 \dots b_l$, $\gamma = c_0, c_1 \dots c_l$. Ясно, что

$$a \geq \alpha,\ b \geq \beta,\ c \geq \gamma, \tag{20}$$

причем можно считать, что хотя бы одно из этих неравенств строгое; иначе $a_k = b_k = c_k = 0$ для всех $k \geq l + 1$. Тогда неравенства (20) означают, что точка X с координатами (a, b, c) лежит в треугольнике, ограниченном прямыми с уравнениями $a = \alpha$, $b = \beta$, $c = \gamma$. Из условия $\max(a_l, b_l, c_l) = 1$ вытекает, что это треугольник вида S_{l,j_0}. Если $a_{l+1} = b_{l+1} = c_{l+1} = 0$, то $a < \alpha + 1/2^{l+1}$, $b < \beta + 1/2^{l+1}$, $c < \gamma + 1/2^{l+1}$, что эквивалентно тому, что точка X лежит внутри треугольника, ограниченного средними линиями треугольника S_{l,j_0}, следовательно, $X \notin S_{l+1}$ и $X \notin S$. Поэтому $\max(a_{l+1}, b_{l+1}, c_{l+1}) = 1$.

Предположим, что $X \in S_0$. Используя некоторые из проведенных здесь рассуждений, нетрудно заметить, что для данного $n \in N$ первое из альтернативных условий в (19) означает, что $X \notin (S_{n-1} \diagdown S_n)$, а второе влечет, что X – некоторая граничная точка множества S_{n-1} и, следовательно, $X \in S$. Отсюда непосредственно получаем достаточность сформулированных в теореме условий.

Следствие 1. *Все барицентрические координаты a, b, c точки $X \in S$ представимы конечными двоичными дробями тогда и только тогда, когда одна из этих координат равна 1 или существует натуральное число k, такое, что ровно два из чисел a_k, b_k, c_k равны 1. В первом случае точка x является одной из вершин треугольника S_0. Во втором случае $a_n = b_n = c_n = 0$ для всех $n \geq k + 1$ и ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого $n = 1, \dots, k - 1$. Хотя бы одна из координат a, b, c точки $X \in S$ не представима конечной двоичной дробью тогда и только тогда, когда $a_0 = b_0 = c_0 = 0$ и ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого натурального числа n, причем существуют натуральные числа k, l, m, такие, что $a_k = b_l = c_m = 0$.*

Доказательство. Напомним, что условия $X \in S_0$ и $a + b + c = 1$; $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ эквивалентны. Случай, когда одна из этих координат равна 1, очевиден. Иначе $0 \leq a < 1$, $0 \leq b < 1$, $0 \leq c < 1$, т. е. $a_0 = b_0 = c_0 = 0$. Пусть $\max(a_k, b_k, c_k) = 1$ для некоторого натурального числа k и $\alpha_k = a_0, a_1 \dots a_k$, $\beta_k = b_0, b_1 \dots b_k$, $\gamma_k = c_0, c_1 \dots c_k$. Тогда вследствие теоремы 3, $\max(a_n, b_n, c_n) = 1$ для каждого числа $n = 1, \dots, k - 1$. Следовательно,

$$0 \leq 1 - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k) = 1 - \sum_{l=1}^{k} (a_l + b_l + c_l) \frac{1}{2^l} \leq$$

$$\leq 1 - \sum_{l=1}^{k} \max(a_l, b_l, c_l) \frac{1}{2^l} = 1 - \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{2^l} = 1/2^k.$$

Из этих соотношений вытекает, что ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого $n = 1, \dots, k-1$ и не более двух из чисел a_k, b_k, c_k равно 1. При этом ровно два из чисел a_k, b_k, c_k равны 1 тогда и только тогда, когда $\alpha_k+\beta_k+\gamma_k = 1$, т. е. $a = \alpha_k, b = \beta_k, c = \gamma_k$, что доказывает все утверждения теоремы, кроме последнего. Последнее утверждение теоремы следует из двух предыдущих фраз.

Ковер Серпинского C (см. стр. 207 – 208 книги [1]) можно определить как (единственное) подмножество единичного квадрата I^2 координатной евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся пересечением счетного семейства замкнутых множеств C_i, $i = 0, 1, 2, \ldots$, где каждое множество C_i состоит из 8^i (замкнутых) квадратов $C_{i,j}$, имеющих стороны длины $1/3^i$ и попарно непересекающиеся внутренности, причем каждое множество $C_i,\ i = 1, 2, \ldots,$ получается из C_{i-1} удалением из каждого квадрата $C_{i-1,j}$ внутренности квадрата со сторонами длины $1/3^i$, не пересекающегося со сторонами квадрата $C_{i-1,j}$.

Теорема 4. *Ковер Серпинского C состоит из всех точек $(x, y) \in Q = I \times I$, таких, что записи двух координат x, y в стандартной троичной системе счисления не могут иметь 1 в одном и том же разряде и не заканчиваться на этом разряде.*

Доказательство. Мы подразумеваем, что запись $x_0, x_1 \ldots$ числа $x \in I$ в стандартной троичной системе счисления не может заканчиваться нулями или бесконечной последовательностью двоек, за исключением случая, когда $x = x_0 = 0$. При этом $x_0 \leq 1$ и если $x_0 = 1$, то $x = x_0 = 1$.

Обозначим через D множество всех точек, подчиненных условию из теоремы 4. Ясно, что точка $(x, y) \in Q\diagdown D$ тогда и только тогда, когда существует наименьшее натуральное число n, такое, что $x_n = y_n = 1$ и существуют натуральные числа $l > n$ и $m > n$, такие, что $x_l > 0$ и $y_m > 0$, для записей чисел x и y в стандартной троичной системе счисления. В свою очередь, последнее утверждение, как нетрудно понять, эквивалентно тому, что $(x, y) \in C_{n-1}\diagdown C_n$. Отсюда непосредственно выводится, что $(x, y) \in D$ тогда и только тогда, когда $(x, y) \in C$.

Губка Менгера M — замкнутое подмножество единичного куба I^3. Куб I^3 является объединением $3^3 = 27$ равных (замкнутых) кубиков, получающихся из I^3 подобием с коэффициентом $1/3$. Множество M_1 есть объединение 20 кубиков, отличных от кубика k, не имеющего общих точек с гранями куба I^3, и 6 кубиков, каждый из которых имеет общую грань с кубиком k. Множество M_2 получается применением той же процедуры к каждому из 20 кубиков в M_1. Множество M_2 состоит из $20 \times 20 = 400$ равных еще более мелких кубиков. К каждому из них применяется та же процедура, что и на первом шаге и получается множество M_3, состоящее из $400 \times 20 = 8000$ кубиков и т.д. В результате получается бесконечная последовательность замкнутых множеств $M_1, M_2, \ldots$. Множество M определяется как пересечение всех множеств этой последовательности.

Теорема 5. *Пусть $p_i : I^3 = I \times I \times I \to I$; $i = 1, 2, 3$ — канонические проекции. Тогда*

$$M = p_1^{-1}(C) \cap p_2^{-1}(C) \cap p_3^{-1}(C). \tag{21}$$

Другими словами, губка Менгера состоит из тех точек (x_1, x_2, x_3) единичного куба I^3, для которых записи любой пары из трех координат x_1, x_2, x_3 в стандартной троичной системе счисления не могут иметь 1 в одном и том же разряде и не заканчиваться на этом разряде.

Доказательство. Заметим, что второе утверждение теоремы есть простое логическое следствие первого ее утверждения и теоремы 4. Докажем первое утверждение теоремы.

Докажем индукцией по i, что

$$M_i = p_1^{-1}(C_i) \cap p_2^{-1}(C_i) \cap p_3^{-1}(C_i) \tag{22}$$

для каждого неотрицательного целого числа i. Очевидно, утверждение (22) верно при $i = 0$. Предположим, что оно верно при $i = k$ и докажем его справедливость при $i = k + 1$. Из определения множеств C_i и M_i нетрудно увидеть, что

$$\begin{gathered} M_k\diagdown M_{k+1} = \\ = p_1^{-1}(C_k\diagdown C_{k+1}) \cup p_2^{-1}(C_k\diagdown C_{k+1}) \cup p_3^{-1}(C_k\diagdown C_{k+1}) = \\ = [p_1^{-1}(C_k)\diagdown p_1^{-1}(C_{k+1})] \cup [p_2^{-1}(C_k)\diagdown p_2^{-1}(C_{k+1})] \cup \\ \cup [p_3^{-1}(C_k)\diagdown p_3^{-1}(C_{k+1})]. \end{gathered}$$

Тогда, вследствие индукционного предположения,

$$\begin{gathered} M_{k+1} = M_k\diagdown(M_k\diagdown M_{k+1}) = \\ = [p_1^{-1}(C_k) \cap p_2^{-1}(C_k) \cap p_3^{-1}(C_k)]\diagdown \\ \diagdown\{[p_1^{-1}(C_k)\diagdown p_1^{-1}(C_{k+1})] \cup [p_2^{-1}(C_k)\diagdown p_2^{-1}(C_{k+1})] \cup \\ \cup [p_3^{-1}(C_k)\diagdown p_3^{-1}(C_{k+1})]\} = \\ = \{p_1^{-1}(C_k)\diagdown[p_1^{-1}(C_k)\diagdown p_1^{-1}(C_{k+1})]\} \cap \\ \cap \{p_2^{-1}(C_k)\diagdown[p_2^{-1}(C_k)\diagdown p_2^{-1}(C_{k+1})]\} \cap \\ \cap \{p_3^{-1}(C_k)\diagdown[p_3^{-1}(C_k)\diagdown p_3^{-1}(C_{k+1})]\} = \\ = p_1^{-1}(C_{k+1}) \cap p_2^{-1}(C_{k+1}) \cap p_3^{-1}(C_{k+1}). \end{gathered}$$

Теперь на основании (22) получаем, что

$$\begin{gathered} M = \bigcap_{i=0}^{\infty} M_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} (p_1^{-1}(C_i) \cap p_2^{-1}(C_i) \cap p_3^{-1}(C_i)) = \\ = (\bigcap_{i=0}^{\infty} p_1^{-1}(C_i)) \cap (\bigcap_{i=0}^{\infty} p_2^{-1}(C_i)) \cap (\bigcap_{i=0}^{\infty} p_3^{-1}(C_i)) = \\ = p_1^{-1}(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) \cap p_2^{-1}(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) \cap p_3^{-1}(\bigcap_{i=0}^{\infty} C_i) = \\ = p_1^{-1}(C) \cap p_2^{-1}(C) \cap p_3^{-1}(C). \end{gathered}$$

5. Внутренние метрики на классических фракталах

Далее через d обозначается естественная (внутренняя) метрика объемлющего евклидова пространства E^2 (соответственно E^3) для фракталов S, C (соответственно M).

Предложение 7. *Пусть X, Y — произвольные точки в E^2 с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) относительно вершин A, B, C треугольника S_0. Тогда формула*

$$d_1(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}|x_k - y_k| \qquad (23)$$

определяет метрику нормированного пространства в E^2, согласованную с векторной структурой пространства E^2. Каждый единичный шар пространства (E^2, d_1) является правильным выпуклым шестиугольником в (E^2, d) диаметра 2 в (E^2, d) со сторонами, параллельными сторонам треугольника S_0.

Доказательство. Заметим сначала, что отображение $f(X) = (x_1, x_2, x_3)$, сопоставляющее точке $X \in E^2$ ее барицентрические координаты, естественно рассматривать как отображение $f : E^2 \to \mathbb{R}^3$. Ясно, что тогда f является аффинным преобразованием плоскости E^2 на плоскость

$$P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$$

в $\mathbb{R}^3$, а правая часть формулы (23) определяет метрику (которую также будем обозначать d_1) в $\mathbb{R}^3$, определяемую нормой

$$||(x_1, x_2, x_3)|| = \frac{1}{2}\left(|x_1| + |x_2| + |x_3|\right),$$

что доказывает первое утверждение. Введем вспомогательную евклидову метрику

$$d_2(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2)^{1/2}$$

в $\mathbb{R}^3$. Легко видеть, что ограничения на подмножество $\{A, B, C\}$ преобразований $f : (E^2, d) \to (P, d_1)$ и $f : (E^2, d) \to (P, d_2)$ являются изометриями. Следовательно, последнее из них является изометрией, а первое — изометрией на каждой из прямых $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_3 = \text{const}$. Кроме того, если O — одна из вершин треугольника S_0, то легко проверить, что $d_1(x, O) = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ для любой точки x на противоположной стороне треугольника S_0. Из последних двух фраз вытекает второе утверждение предложения.

Замечание 4. Единичный шар $\{x \in \mathbb{R}^3 : ||x|| \leq 1\}$ пространства $(\mathbb{R}^3, d_1)$ является правильным октаэдром в евклидовом пространстве $(\mathbb{R}^3, d_2)$. Второе утверждение предложения 7 эквивалентно тому, что пересечение этого октаэдра с плоскостью $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ есть правильный выпуклый шестиугольник диаметра 2 в $(\mathbb{R}^3, d_2)$.

Предложение 8. *Пусть X, Y — произвольные точки в E^2 с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3) относительно вершин A, B, C треугольника S_0. Тогда*

$$d(X,Y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{k=1}^{3}(x_k - y_k)^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}|x_k - y_k| := d_1(X,Y) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}d(X,Y). \qquad (24)$$

В общем случае и верхнюю, и нижнюю оценки для $d_1(x, y)$ нельзя улучшить.

Доказательство. Первое равенство вытекает из того, что преобразование $f : (E^2, d) \to (P, d_2)$ из доказательства предложения 7 есть изометрия. Из последнего утверждения предложения 7 вытекает первое неравенство в (24) и тот факт, что соотношение $(d_1/d_2)(X, Y)$ достигает максимального значения $\frac{2}{\sqrt{3}}$, когда $X = A$, а Y — середина стороны BC треугольника S_0. Отсюда следуют все утверждения предложения.

Напомним, что если (X, d) — метрическое пространство и A — непустое подмножество в X, то расстояние $d_A(a_1, a_2)$ между точками $a_1, a_2 \in A$ в *индуцированной на A внутренней метрике* определяется как точная нижняя граница длин путей в (A, d), соединяющих точки a_1 и a_2. В общем случае не исключено, что некоторые точки $a_1, a_2 \in A$ нельзя соединить путем конечной длины в (A, d). Тогда $d_A(a_1, a_2) = +\infty$. Если же таких пар точек не существует, то d_A — метрика.

Далее d_S обозначает внутреннюю метрику в S, индуцированную евклидовой метрикой d.

Предложение 9. *Если O — одна из вершин треугольника S_0, а X — произвольная точка в S, то $d_S(O, X) = d_1(O, X)$. Диаметры пространств (S, d_S), (S, d_1), (S, d) совпадают и равны 1.*

Доказательство. Так как фигура S обладает поворотной симметрией порядка 3 в (E^2, d), то можно считать, что $O = A$.

Докажем сначала первое утверждение.

Если $X = A$, то $d_S(A, X) = d(A, X) = d_1(O, x) = 0$. Если X — одна из вершин B или C, то отрезок $[AX] \subset S$ и

$$d_S(A, X) = d(A, X) = d_1(O, X) = 1. \qquad (25)$$

Поэтому можно считать, что X не совпадает ни с одной из вершин A, B или C. Далее будем пользоваться обозначениями из следствия 1 и его доказательства. Тогда $0 < b + c \leq 1, a_0 = b_0 = c_0 = 0$.

Определим последовательность точек $\{X_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$ их барицентрическими координатами $(1 - (\beta_n + \gamma_n), \beta_n, \gamma_n)$. Ясно, что $X_0 = A$, последовательности $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ не убывают, последовательность $\{1-(\beta_n+\gamma_n)\}$ не возрастает и $X_n \to X$ при $n \to +\infty$. Кроме того, нетрудно проверить, что каждая точка X_n удовлетворяет всем условиям теоремы 3 и, следовательно, $X_n \in S$. Далее рассмотрим два случая: 1) хотя бы одна из координат a, b, c не представима конечной двоичной дробью; 2) все координаты a, b, c представимы конечными двоичными дробями.

1) В этом случае хотя бы одна из координат b, c не представима конечной двоичной дробью; поэтому найдутся сколь угодно большие n, такие, что $\max(b_n, c_n) = 1$ и последовательность $\{X_n\}, n = 0, 1, \ldots$ не стабилизируется. На основании следствия 1 для каждого натурального числа n не более одного числа из b_n, c_n равно 1. Отсюда вытекает, что точки X_{n-1}, X_n являются вершинами одного из треугольников вида $S_{n,l}$, и если $X_{n-1} \neq X_n$, то отрезок $[X_{n-1}, X_n]$ является стороной единственного треугольника такого вида и поэтому $[X_{n-1}, X_n] \subset S$. В любом случае легко получаем, что

$$d_S(X_{n-1}, X_n) = d(X_{n-1}, X_n) =$$
$$= d_1(X_{n-1}, X_n) = \beta_n - \beta_{n-1} + \gamma_n - \gamma_{n-1}. \quad (26)$$

Возьмем кривую L, являющуюся объединением ломаных $L_n = X_0 X_1 \ldots X_n$ и конечной точки X с параметризацией, совпадающей на каждой ломаной L_n с параметризацией длиной дуги относительно метрики d или, что то же, метрики d_1. Тогда вследствие (26) ее длина в метрике d равна

$$l(L) = \lim_{n\to+\infty} l(L_n) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \beta_{n-1} + \gamma_n - \gamma_{n-1}) = b + c =$$

$$= \frac{1}{2}[(1-(1-(b+c)) + (b-0) + (c-0))] = d_1(A, X).$$

Пусть $Y_1 = X_{n(1)}$ — первая из точек последовательности $\{X_n\}$, $n = 0, 1, \ldots$, отличная от $X_0 = Y_0 = A$; $Y_2 = X_{n(2)}$ — первая из точек последовательности $\{X_n\}$, $n = n(1), n(1)+1, \ldots$, отличная от $X_n(1) = Y_1$, и т. д. Тогда точка A содержится в (единственном) треугольнике вида $S_{n(1),j}$ со стороной AY_1, точка X вместе с точкой Y_1 содержится в некотором другом треугольнике вида $S_{n(1),j'}, j' \neq j$ (тоже единственном вследствие того, что не все барицентрические координаты точки X представимы конечными двоичными дробями), а все эти три точки лежат в единственном треугольнике вида $S_{n(1)-1,s}$. Как следствие,

$$l(L) = b + c \leq \frac{1}{2^{n(1)-1}}. \quad (27)$$

Для завершения доказательства первого утверждения достаточно показать, что если $l(L') \leq l(L)$, то $L' = L$. Такая кривая L' должна проходить через точку Y_1. Иначе она проходит через точку $Z_1 = S_{n(1),j} \cap S_{n(1),j''}$, где $S_{n(1),j''}, j'' \neq j, j'' \neq j'$; $S_{n(1),j''} \subset S_{n(1)-1,s}$, и тогда

$$l(L') \geq d(A, Z_1) + d(Z_1, X) > \frac{1}{2^{n(1)-1}} \geq l(L),$$

так как $d(A, Z_1) = \frac{1}{2^{n(1)}}$, а $d(Z_1, X) > \frac{1}{2^{n(1)}}$ вследствие того, что

$$Z_1 \in S_{n(1),j''},\ X \in S_{n(1),j'},\ S_{n(1),j''} \cap S_{n(1),j'} = \emptyset.$$

Аналогично доказывается, что дуга $\overline{Y_1 X}$ кривой L' должна содержать точку Y_2 и т.д. Таким образом, при прохождении направленной кривой L' последовательно должны появляться все точки $Y_0, Y_1, \ldots$. Следовательно,

$$l(L') \geq \sum_{n=1}^{+\infty} d(Y_{n-1}, Y_n) = l(L),$$

и равенство здесь может соблюдаться только если L' составлена из отрезков $[Y_{n-1}, Y_n], n = 1, 2, \ldots$, т. е. если $L' = L$.

Докажем второе утверждение. Так как $d_S(A, B) = d_1(A, B) = d(A, B) = 1$, то диаметры пространства S во всех трех метриках не меньше 1. Докажем противоположное неравенство. Заметим прежде, что

$$d(O, X) \leq d_1(O, X) = d_S(O, X) \leq 1 \quad (28)$$

вследствие первого утверждения и предложений 7, 8. Пусть теперь $X, Y \in S$. Тогда точка X (соответственно Y) лежит в пересечении вида $S \cap S_{1,j}$ (соответственно $S \cap S_{1,j'}$). При этом оба эти множества содержат некоторую общую вершину O_1 и получаются из S метрическими подобиями с коэффициентом 1/2. Используя соотношения (28) и неравенство треугольника, получаем требуемые неравенства

$$d(X, Y) \leq d(X, O_1) + d(O_1, Y) \leq$$
$$\leq d_1(X, O_1) + d_1(O_1, Y) =$$
$$= d_S(X, O_1) + d_S(O_1, Y) \leq 1/2 + 1/2 = 1.$$

2) Доказательство в основном совершенно аналогично доказательству в случае 1). Укажем различия. На основании следствия 1 существует натуральное число k такое, что ровно два из чисел a_k, b_k, c_k равны 1, причем $a = \alpha_k, b = \beta_k, c = \gamma_k$ и ровно одно из чисел a_n, b_n, c_n равно 1 для каждого $n = 1, \ldots, k-1$. Далее возможны два случая: а) ровно одно из чисел b_k, c_k равно 1; б) ровно два из чисел b_k, c_k равны 1. В случае а) надо взять в качестве $L \subset S$ ломаную $AX_1 \ldots X_k$ и повторить те же рассуждения, что и в случае 1). Если же выполняется условие б), то между точками X_{k_1} и X_k надо вставить точку $Z = (1-(b+c)+1/2^k, b-1/2^k, c)$ или $Z' = (1-(b+c)+1/2^k, b, c-1/2^k)$ и рассмотреть ломаную $L = X_0 X_1 \ldots X_{k-1} Z X_k$ или $L' = X_0 X_1 \ldots X_{k-1} Z' X_k$. При этом $l(L) = l(L')$.

Аналогично предыдущему доказывается, что каждая направленная кривая $L'' \subset S$, должна совпадать с L или L', если $l(L'') \leq l(L)$. Все остальные утверждения доказываются аналогично.

Теорема 6. *Если X, Y — произвольные точки в S с барицентрическими координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), то верны оценки*

$$d(X,Y) \leq d_S(X,Y) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} d(X,Y), \qquad (29)$$

$$d_1(X,Y) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3} |x_k - y_k| \leq d_S(X,Y) \leq$$

$$\leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{k=1}^{3} |x_k - y_k| = \frac{4}{\sqrt{3}} d_1(X,Y). \qquad (30)$$

В общем случае нижние оценки в этих неравенствах нельзя улучшить.

Доказательство. Если хотя бы одна из точек X или Y равна вершине некоторого треугольника вида $S_{i,j}$, содержащего обе точки X и Y, то неравенства (29) и (30) вытекают из предложений 8 и 9. Рассмотрим общий случай. Можно считать, что $X \neq Y$. Первые неравенства в (29) и (30) вытекают из неравенств треугольника для метрик и предложений 8, 9. Докажем вторые неравенства в (29) и (30).

Если хотя бы одна из точек X или Y равна вершине некоторого треугольника вида $S_{i,j}$, содержащего обе точки X и Y, то неравенства (29) и (30) вытекают из предложений 8 и 9. Рассмотрим общий случай. Можно считать, что $X \neq Y$. Существует наименьшее неотрицательное целое число k, такое, что некоторый треугольник вида $S_{k,j}$ содержит обе точки X и Y, но точки X и Y не содержатся одновременно ни в каком треугольнике вида $S_{k+1,l}$. Тогда существуют натуральные числа r и s, такие, что $X \in S_{k+1,r}$, $Y \in S_{k+1,s}$, $r \neq s$. Треугольники $S_{k+1,r}$ и $S_{k+1,s}$ содержат единственную общую точку, и эта точка является их общей вершиной O. Введем обозначения:

$$a = d(X,O), a_1 = d_1(X,O), b = d(Y,O),$$

$$b_1 = d_1(Y,O), c = d(X,Y), c_1 = d_1(X,Y).$$

Тогда $\alpha := \measuredangle(\overline{OX}, \overline{OY}) \geq \frac{\pi}{3}$. Следовательно,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \geq \sqrt{a^2 + b^2 - ab} \geq \frac{1}{2}(a+b).$$

Отсюда, на основании предложения 8 и равенств

$$d_S(X,Y) = d_S(X,O) + d_S(O,Y) = d_1(X,O) + d_1(O,Y),$$

получаем:

$$c_1 \geq c \geq \frac{1}{2}(a+b) \geq \frac{\sqrt{3}}{4}(a_1 + b_1) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(d_S(X,O) + d_S(O,Y)) \geq \frac{\sqrt{3}}{4} d_S(X,Y).$$

Следовательно,

$$d_S(X,Y) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} d(X,Y) \leq \frac{4}{\sqrt{3}} d_1(X,Y),$$

что дает вторые неравенства в (29) и (30).

Последнее утверждение следует из равенств (25).

Замечание 5. Вследствие неравенств (24) и (29), $1 \leq d_S/d_1 \leq d_S/d$. Поэтому метрика d_1 — лучшее приближение метрики d_S по сравнению с метрикой d. Кроме того, предложение 9 показывает, что во многих важных случаях расстояния в метриках d_1 и d_S совпадают. Для точек X, Y с барицентрическими координатами $(1/2, 1/4, 1/4)$ и $(1/4, 1/2, 1/4)$ соответственно верны равенства $d_S(X,Y) = 1/2 = 2d(X,Y) = 2d_1(X,Y)$. Авторам не известно, можно ли константу $4/\sqrt{3}$ в (29) и (30) заменить меньшим числом 2.

Предложение 10. *Если $X = (x_1, x_2)$ — одна из вершин квадрата C_0, а $Y = (y_1, y_2)$ — произвольная точка в C, то*

$$d(X,Y) \leq d_C(X,Y) \leq \sum_{k=1}^{2} |x_k - y_k| := d_3(X,Y).$$

Доказательство. Ясно, что $d(X,Y) \leq d_C(X,Y)$. Без ограничения общности можно считать, что $X = (0,0)$, а $Y \neq X$. Для записи координат точки Y будем использовать стандартную троичную систему счисления. В доказательстве будем пользоваться тем, что стороны всех квадратов $C_{k,j}$, $k = 1, 2, \ldots$ содержатся в C. Определим точки $X_{-1} = X$ и $X_n = (\alpha_n = a_0, a_1 \ldots a_n, \beta_n = b_0, b_1 \ldots b_n)$ для $n = 0, 1, \ldots$, где $a = y_1, b = y_2$, а $a_0, a_1 \ldots$ и $b_0, b_1 \ldots$ — их записи в стандартной троичной системе счисления. Введем точку $Y_n = (\alpha_n, \beta_{n-1})$, если оба числа a_n, b_n для данного n положительны, и $Y_n = X_{n-1}$ в противоположном случае. Здесь предполагается, что $\beta_{-1} = 0$. В любом случае отрезки $[X_{n-1}, Y_n]$ и $[Y_n, X_n]$ содержатся в C. Отсюда следует, что

$$d_C(X_{(n-1)}, X_n) \leq d_C(X_{n-1}, Y_n) + d_C(Y_n, X_n) =$$

$$= |x_{n,1} - x_{(n-1),1}| + |x_{n,2} - x_{(n-1),2}| =$$

$$= (x_{n,1} - x_{(n-1),1}) + (x_{n,2} - x_{(n-1),2}) =$$

$$= d_3(X_{(n-1)}, X_n).$$

Тогда

$$\sum_{k=-1}^{\infty} d_C(X_k, X_{k+1}) \leq \sum_{k=-1}^{\infty} d_3(X_k, X_{k+1}) =$$

$$= (y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) = d_3(X,Y).$$

Следовательно, $\{X_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ — сходящаяся в себе относительно d_C последовательность. Так как $d_C \geq d$ и $d(X_k, X) \to 0$ при $k \to \infty$, то

$d_C(X_k, X) \to 0$ при $k \to \infty$, и на основании последних выделенных в строку соотношений получим, что $d_C(X, Y) \leq d_3(X, Y)$.

Замечание 6. Нетрудно доказать, что пересечение множества C с каждой из прямых $y = 2x$ и $x = 2y$ совпадает с пересечением квадрата C_0 с каждой из этих прямых. Как следствие, очень трудно (а может, и невозможно) дать точную формулу для вычисления расстояния $d_C(X, Y)$ в условиях предложения 10.

Теорема 7. *Если X, Y — произвольные точки в C с координатами (x_1, x_2) и (y_1, y_2), то верны оценки:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_3(X, Y) \leq d(X, Y) \leq d_C(X, Y) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{2} d(X, Y) \leq 2\sqrt{2} d_3(X, Y), \qquad (31)$$

где

$$d_3(X, Y) = \sum_{k=1}^{2} |y_k - x_k|.$$

Доказательство. Все неравенства в (31), кроме третьего, хорошо известны.

Докажем третье. Можно считать, что $X \neq Y$. Тогда существует наименьшее натуральное число n, такое, что X (соответственно Y) принадлежит некоторому квадрату $C_{(n-1),r}$ (соответственно $C_{(n-1),s}$) и эти квадраты имеют общую сторону, но X (соответственно Y) принадлежит некоторому квадрату $C_{n,t}$ (соответственно $C_{n,u}$) и последние два квадрата не имеют общих сторон. Возможны два случая: 1) квадраты $C_{n,t}$ и $C_{n,u}$ имеют общую вершину Z; 2) квадраты $C_{n,t}$ и $C_{n,u}$ не пересекаются. Рассмотрим эти случаи отдельно.

1) Если Z совпадает с одной из точек X или Y, то, вследствие предложения 10,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_3(X, Y) \leq d(X, Y) \leq d_C(X, Y) \leq$$

$$\leq d_3(X, Y) \leq \sqrt{2} d(X, Y), \qquad (32)$$

откуда следуют неравенства (31). Иначе $\measuredangle(\overline{ZX}, \overline{ZY}) \geq \pi/2$. Вводя обозначения $a = d(X, Z)$, $b = d(Z, Y)$, $c = d(X, Y)$, $a_1 = d_3(X, Z)$, $b_1 = d_3(Z, Y)$, $c_1 = d_3(X, Y)$, получим, что

$$c_1 \geq c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \measuredangle(\overline{ZX}, \overline{ZY})} \geq$$

$$\geq \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(a + b) \geq \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(d_C(X, Z) + d_C(Z, Y)) \geq \frac{1}{2} d_C(X, Y).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_3(X, Y) \leq d(X, Y) \leq d_C(X, Y) \leq$$

$$\leq 2d(X, Y) \leq 2d_3(X, Y), \qquad (33)$$

откуда следуют неравенства (31).

2) В этом случае существуют (единственные) вершины X_0 и Y_0 треугольников $C_{n,t}$ и $C_{n,u}$ соответственно, такие, что $d_3(X_0, Y_0)$ реализует кратчайшее (положительное) расстояние в метрике d_3 между множествами вершин этих треугольников. При этом нетрудно видеть, что расстояние $d_3(X_0, Y_0)$ равно длине относительно метрики d_3 некоторой ломаной $L \subset C$. Следовательно, $d_C(X_0, Y_0) \leq d_3(X_0, Y_0)$. Если $X = X_0$ и $Y = Y_0$, то верны неравенства (32) и, следовательно, (31). Если $X = X_0$ и $Y \neq Y_0$, то $\measuredangle(\overline{Y_0X}, \overline{Y_0Y}) \geq \pi/2$ и используя проведенные ранее рассуждения, получим неравенства (33) и, следовательно, (31). То же верно, если $X \neq X_0$ и $Y = Y_0$.

Предположим, что $X \neq X_0$ и $Y \neq Y_0$. Возьмем в качестве точки Z середину (относительно метрики d_3) пути L. Аналогично второму случаю в 1) доказываются неравенства:

$$d_C(X, Z) \leq 2d(X, Z) := 2d \leq 2d_1 := 2d_3(X, Z);$$

$$d_C(Z, Y) \leq 2d(Z, Y) := 2d' \leq 2d'_1 := d_3(Z, Y).$$

Снова $\measuredangle(\overline{ZX}, \overline{ZY}) \geq \pi/2$. Вводя обозначения $f := d(X, Y)$, $f_1 := d_3(X, Y)$, аналогично предыдущему получим, что

$$f_1 \geq f \geq \sqrt{d^2 + d'^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(d + d') \geq$$

$$\geq \frac{1}{2\sqrt{2}}(d_C(X, Z) + d_C(Z, Y)) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} d_C(X, Y).$$

Отсюда выводятся неравенства (31).

Ясно, что ребра всех кубов $M_{l,j}, l = 0, 1, \ldots$ содержатся в M. На основе этого аналогично предложению 10 доказывается следующее предложение.

Предложение 11. *Если $X = (x_1, x_2, x_3)$ — одна из вершин куба M_0, а $Y = (y_1, y_2, y_3)$ — произвольная точка в M, то*

$$d(X, Y) \leq d_M(X, Y) \leq \sum_{k=1}^{3} |x_k - y_k| := d_4(X, Y).$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 7 заменой квадратов кубами на основе предложения 11.

Теорема 8. *Если X, Y — произвольные точки в M с координатами (x_1, x_2, x_3) и (y_1, y_2, y_3), то верны оценки*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} d_4(X, Y) \leq d(X, Y) \leq d_M(X, Y) \leq$$

$$\leq 2\sqrt{3} d(X, Y) \leq 2\sqrt{3} d_4(X, Y), \qquad (34)$$

где

$$d_4(X, Y) = \sum_{k=1}^{3} |y_k - x_k|.$$

6. Хаусдорфова и фрактальная размерности классических фракталов

Сначала напомним классическое определение размерности Хаусдорфа метрического пространства (X, d), следуя [5]. Для числа $\rho \geq 0$ и не более чем счетного покрытия $U = \{U_i\}_{i \in J}$ множества X его непустыми подмножествами ρ-вес покрытия $w_\rho(U)$ определяется как

$$w_\rho(U) = \sum_{i \in J} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho, \qquad (35)$$

где

$$\mathrm{diam}(U_i) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in U_i\}.$$

При $\rho = 0$ слагаемые вида 0^0 считаются равными 1. Для $\delta > 0$ положим

$$\mu_{\rho,\delta}(X) = \inf\{w_\rho(U) \mid \mathrm{diam}(U_i) < \delta \text{ для всех } i \in J\}. \qquad (36)$$

ρ-мерная *мера Хаусдорфа* метрического пространства (X, d) определяется как

$$\mu_\rho(X) = C(\rho) \lim_{\delta \to +0} \mu_{\rho,\delta}(X), \qquad (37)$$

где

$$C(\rho) := 2^{-\rho}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^\rho / \Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right) > 0$$

и где Γ — гамма-функция Эйлера.

Замечание 7. Обычно при определении $\mu_\rho(X)$, $\mu_{\rho,\delta}(X)$ в формуле (37) заменяется на $\nu_{\rho,\delta}(X)$, где $\nu_{\rho,\delta}(X)$ получается из $\mu_{\rho,\delta}(X)$ заменой условия $\mathrm{diam}(U_i) < \delta$ в (36) условием $\mathrm{diam}(U_i) \leq \delta$. Но легко видеть, что при такой замене $\mu_\rho(X)$ не меняется.

Размерность Хаусдорфа $\dim_H(X)$ метрического пространства (X, d) есть точная верхняя граница действительных чисел $\rho \geq 0$, для которых $\mu_\rho(X) > 0$.

Из определений непосредственно следует, что размерность Хаусдорфа не меняется при замене метрики d любой билипшицево эквивалентной ей метрикой. Поэтому, вследствие теорем 6, 7 и 8, евклидову метрику d на S, C или M можно заменить определяемой ей внутренней метрикой D_S, d_C или d_M. Но для удобства вычислений мы будем считать, что метрика на ковре Серпинского C индуцирована метрикой $d(X,Y) = \max\limits_{i=1,2} \mid x_i - y_i \mid$ на $\mathbb{R}^2$, метрика на губке Менгера M индуцирована из $\mathbb{R}^3$ метрикой $d(X,Y) = \max\limits_{i=1,2,3} \mid x_i - y_i \mid$.

Лемма 1. *Пусть $V = \{V_i\}_{i \in J}$ — не более чем счетное покрытие метрического пространства (X, d) непустыми подмножествами диаметра меньше $\delta > 0$ и $w_\rho(V) < +\infty$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует открытое покрытие $U = \{U_i\}_{i \in J}$ пространства (X, d) непустыми подмножествами диаметра меньше δ, удовлетворяющее условиям:*

1. *$V_i \subset U_i$ для каждого $i \in J$.*
2. *$w_\rho(U) \leq w_\rho(V) + \epsilon$.*

Доказательство. Пусть $\epsilon > 0$. Обозначим $V^0 = \{V_i \in V \mid \mathrm{diam}(V_i) = 0\}$. По условию V^0 не более чем счетно. Если V^0 не пусто, то, обозначая его элементы через x_i, где $i = 1, \ldots, k$ или $i \in N$, определим U_i как открытый шар с центром в x_i радиуса $\epsilon_i \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\epsilon}{4i}\right)^{1/\rho}$. Тогда $\sum_{V_i \in V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho \leq \frac{\epsilon}{2}$.

Если $V \backslash V^0$ не пусто, т. е. $w_\rho(V) > 0$, то для каждого $V_i \in V \backslash V^0$ определим U_i как ϵ_i-окрестность множества V_i, где

$$\epsilon_i < \frac{1}{2} \min\{\alpha \cdot \mathrm{diam}(V_i), \delta - \mathrm{diam}(V_i)\},$$

$$\alpha = \left(1 + \frac{\epsilon}{2w_\rho(V)}\right)^{1/\rho} - 1.$$

Из неравенства треугольника следует, что $\mathrm{diam}(U_i) \leq \mathrm{diam}(V_i) + 2\epsilon_i$ и поэтому $\mathrm{diam}(U_i) < \delta$. Вследствие (35),

$$\sum_{V_i \in V \backslash V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho \leq \sum_{V_i \in V \backslash V^0} (\mathrm{diam}(V_i) + 2\epsilon_i)^\rho \leq$$

$$\leq \sum_{V_i \in V \backslash V^0} (\mathrm{diam}(V_i))^\rho \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{2w_\rho(V)}\right) = w_\rho(V) + \frac{\epsilon}{2}.$$

Тогда

$$w_\rho(U) = \sum_{V_i \in V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho + \sum_{V_i \in V \backslash V^0} (\mathrm{diam}(U_i))^\rho \leq$$

$$\leq w_\rho(V) + \epsilon.$$

Лемма 2. *Пусть (X, d) — компактное метрическое пространство и $\mu_\rho(X) < +\infty$ для некоторого $\rho > 0$. Тогда для любого $\delta > 0$ в определении $\mu_{\rho,\delta}(X)$ (см. (36)) можно ограничиться только конечными (открытыми) покрытиями U пространства (X, d).*

Доказательство. Ясно, что

$$\mu_{\rho,\delta}(X) \leq \mu_\rho(X) < +\infty.$$

Осталось применить лемму 1.

Теорема 9. *$dim_H(S) = r(S) = \log 3/\log 2$ для салфетки Серпинского S.*

Доказательство. Напомним, что $S = \cap\{S_k \mid k \in Z_+\}$, где каждое множество S_k состоит из 3^k (замкнутых) равносторонних треугольников $S_{k,j}$, имеющих стороны длины 2^{-k} и попарно непересекающиеся внутренности. В этом случае $r(S) = \log 3/\log 2$. Ясно, что $\mathrm{diam}(S_{k,j}) = 2^{-k}$. Пусть V_k — покрытие множества S_k треугольниками $S_{k,j}$. Из (35), (36) следует, что для любого $k \in N$ и каждого $\delta > 2^{-k}$

$$\mu_{r(S),\delta}(S) \leq w_{r(S)}(V_k) = 3^k \cdot (2^{-k})^{r(S)} = 1.$$

Тогда $\mu_{r(S)}(S) < +\infty$. Из определений размерности и меры Хаусдорфа следует, что достаточно доказать неравенство $\mu_{r(S)}(S) > 0$.

Так как салфетка Серпинского S замкнута и ограничена в E^2, то она компактна. На основании леммы 2 можно рассматривать только конечные открытые покрытия $U = \{U_i\}_{i\in J}$ пространства S. При этом всегда $\mathrm{diam}(U_i) \leq 1$, $i \in J$. Для каждого $i \in J$ существует такое $k \in Z_+$, что $2^{-(k+1)} \leq \mathrm{diam}(U_i) < 2^{-k}$. Легко видеть, что тогда U_i может пересечь не более двух множеств вида $S_{k,j} \cap S$. Если $n \geq k$, то U_i пересекает не более

$$2\cdot 3^{n-k} = 2\cdot 3^{n+1}\cdot 2^{-(k+1)r(S)} \leq 2\cdot 3^{n+1}\cdot(\mathrm{diam}(U_i))^{r(S)}$$

множеств вида $S_{n,j}\cap S$. Так как пространство S не имеет изолированных точек, а множества U_i, $i \in J$ непустые, открытые и их конечное число, то существует такое $n \in N$, что $\min\{\mathrm{diam}(U_i) \mid i \in J\} \geq 2^{-(n+1)}$. Покрытие U пересекает все 3^n множеств вида $S_{n,j} \cap S$, поэтому

$$3^n \leq \sum_{i\in J} 2 \cdot 3^{n+1} \cdot (\mathrm{diam}(U_i))^{r(S)}.$$

Тогда в силу (35), $w_{r(S)}(U) \geq \frac{1}{6}$. Из (36), (37) следует, что $\mu_{r(S)}(S) > 0$.

Теорема 10. *$dim_H(C) = r(C) = \log 8/\log 3$ для ковра Серпинского C.*

Доказательство. Напомним, что $C = \cap\{C_k \mid k \in Z_+\}$, где каждое множество C_k состоит из 8^k (замкнутых) квадратов $C_{k,j}$, имеющих стороны длины 3^{-k} и попарно непересекающиеся внутренности. Ясно, что $\mathrm{diam}(C_{k,j}) = 3^{-k}$. В этом случае $r(C) = \log 8/\log 3$. Пусть V_k — покрытие множества C_k квадратами $C_{k,j}$. Из (35), (36) следует, что для любого $k \in N$ и каждого числа $\delta > 3^{-k}$

$$\mu_{r(C),\delta}(C) \leq w_{r(C)}(V_k) = 8^k \cdot (3^{-k})^{r(C)} = 1.$$

Тогда $\mu_{r(C)}(C) < +\infty$.

Заметим, что ковер Серпинского C (как и салфетка Серпинского S) компактен в E^2, так как он замкнут и ограничен. Доказательство неравенства $\mu_{r(C)}(C) > 0$ аналогично доказательству $\mu_{r(S)}(S) > 0$ (см. теорему 9).

Теорема 11. *$dim_H(M) = r(M) = \log 20/\log 3$ для губки Менгера M.*

Доказательство. Напомним, что $M = \cap\{M_k \mid k \in N\}$, где каждое множество M_k состоит из 20^k (замкнутых) кубиков $M_{k,j}$, имеющих стороны длины 3^{-k} и попарно непересекающиеся внутренности. Ясно, что $\mathrm{diam}(M_{k,j}) = 3^{-k}$. В этом случае $r(M) = \log 20/\log 3$. Пусть V_k — покрытие множества M_k кубиками $M_{k,j}$. Из (35), (36) следует, что для любого $k \in N$ и каждого числа $\delta > 3^{-k}$

$$\mu_{r(M),\delta}(M) \leq w_{r(M)}(V_k) = 20^k \cdot (3^{-k})^{r(M)} = 1.$$

Тогда $\mu_{r(M)}(M) < +\infty$.

Заметим, что губка Менгера M (как и салфетка Серпинского S) компактна в E^3, так как она замкнута и ограничена. Доказательство неравенства $\mu_{r(M)}(M) > 0$ аналогично доказательству неравенства $\mu_{r(S)}(S) > 0$ (см. теорему 9).

Замечание 8. Совершенно аналогично доказывается, что размерность Хаусдорфа канторова множества равна $\log 2/\log 3$. Все три рассматриваемых здесь множества имеют топологическую размерность 1, а канторово множество — топологическую размерность 0 (см. [2]). Поэтому все эти множества являются (самоподобными) фракталами в смысле Б. Мандельброта.

Авторы выражают благодарность Ольге Эберт (Center for Literacy Studies, the University of Tennessee, Knoxville, USA) и профессору Ю. Г. Никонорову за стимулирующие и плодотворные обсуждения проблематики этой статьи.

Литература

[1] Александров, П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию* / П. С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 370 с.

[2] Александров, П. С. *Введение в теорию размерности. Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размеренности* / П. С. Александров, Б. А. Пасынков. – М.: Наука, 1973. – 576 с.

[3] Андреев, П. Д. *Размерности $\mathbb{R}$-деревьев и самоподобные фрактальные пространства неположительной кривизны* / П. Д. Андреев, В. Н. Берестовский // Мат. труды. – 2006. – Т. 9, № 2. – С. 3 – 22.

[4] Морозов, А. Д. *Введение в теорию фракталов* / А. Д. Морозов. – Москва; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

[5] Федерер, Г. *Геометрическая теория меры* / Г. Федерер. – М.: Наука, 1987. – 760 с.

[6] Berestovskii, V. N. *Covering $\mathbb{R}$-trees, $\mathbb{R}$-free groups, and dendrites* / V. N. Berestovskii, C. P. Plaut // Adv. Math. – 2010. – V. 224, № 5. – C. 1765 – 1783.

[7] Hutchinson, J. E. *Fractals and self-similarity* / J. E. Hutchinson // Indiana Univ. Math. J. – 1981. – V. 30, № 5. – P. 713 – 747.

[8] Mandelbrot, B. B. *The fractal geometry of nature* / B. B. Mandelbrot. – San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1982. – 497 p.

[9] Stakhov, A. P. *The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science* / A. P. Stakhov. Singapore: World Scientific, 2009. – 739 p.