РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ

УДК 514.763.3

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГРУППЫ ГОЛОНОМИИ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Я. В. Базайкин

SPECIAL HOLONOMY GROUPS OF RIEMANNIAN SPACES

Ya. V. Bazaikin

В статье дается краткий обзор специальных групп голономии римановых пространств, подробно описаны явные конструкции римановых метрик с группой голономии $Spin(7)$ и G_2.

The brief overview of Riemannian special holonomy groups is given in the paper. Explicit constructions of $Spin(7)$- and G_2-holonomy metrics are described.

Ключевые слова: группа голономии, $Spin(7)$, G_2.

Keywords: holonomy group, $Spin(7)$, G_2.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (№ 09-01-00142-а), гранта Президента РФ (МД-249.2011.1, НШ-7256.2010.1) и фонда Дмитрия Зимина «Династия».

1. Введение

Изучение геометрических и топологических свойств римановых многообразий со специальными группами голономии является одной из актуальных и интереснейших задач современной дифференциальной геометрии. В этом направлении уже получено много результатов, например классификацию собственно групп голономии можно считать завершенной. Однако до сих пор нет полного ответа на вопрос: при каких условиях на данном многообразии существует риманова метрика с предописанной специальной группой голономии? Особенно остро стоит эта проблема для специальных групп голономии $Spin(7)$ и G_2. С другой стороны, примеров таких пространств известно также очень мало, компактные примеры были построены лишь в [1-7], причем все конструкции являются неявными.

С некомпактными пространствами дело обстоит лучше: существуют метрики с группами голономии $Spin(7)$ и G_2, явно выраженные в квадратурах, или с явно описываемой структурой. Более того, эти метрики играют свою роль в математической физике.

Цель данной статьи — дать краткий обзор специальных групп голономии, подробно описав известные конструкции римановых метрик с группой голономии $Spin(7)$ и G_2 на некомпактных пространствах.

Статья начинается с базовых определений и с описания классификации групп голономии римановых пространств. Далее описываются 3-сасакиевы многообразия, играющие важную роль при построении примеров. Завершает статью основной ее раздел, посвященный описанию примеров. Как выяснилось сравнительно недавно, практически все известные примеры некомпактных пространств с группой голономии $Spin(7)$ хорошо укладываются в одну схему, где концепция 3-сасакиева пространства играет центральную роль. Схема описывается в подразделе 4.1, а в подразделе 4.2, описывается как предлагаемая схема может быть видоизменена для того, чтобы построить римановы метрики с группой голономии G_2.

Хотя описанные результаты были по отдельности опубликованы, но в едином виде, под одним углом зрения данные результаты публикуются впервые.

2. Классификация групп голономии римановых пространств

Пусть $M = M^n$ — связное n-мерное риманово многообразие без края с римановой метрикой g. Метрика g однозначно определяет связность Леви — Чивита ∇ в TM. Везде в дальнейшем мы будем подразумевать на римановых многообразиях именно эту аффинную связность.

Фиксируем точку $p \in M$. Пусть $\lambda(t)$, $t \in [0,1]$ — кусочно C^1-гладкая замкнутая петля с вершиной в точке p, т. е. $\lambda(0) = \lambda(1) = p$. Обозначим через $\tau(\lambda)$ параллельный перенос вдоль кривой λ относительно связности ∇. В силу свойств связности Леви — Чивита (инвариантность римановой метрики при параллельном переносе), $\tau(\lambda)$ является ортогональным преобразованием касательного пространства T_pM.

Группой голономии риманова многообразия (M,g) в точке p называется подгруппа $\mathrm{Hol}_p(M)$ ортогональной группы $O(T_pM)$, состоящая из преобразований вида $\tau(\lambda)$, где λ — произвольная кусочно C^1-гладкая петля с вершиной в точке p. Если при этом рассмотреть только стягиваемые петли, то мы получим *ограниченную группу голо-*

номии $\mathrm{Hol}^0_p(M)$ в точке p. Можно показать, что $\mathrm{Hol}^0_p(M)$ является связной компонентой единицы группы $\mathrm{Hol}_p(M)$.

Если выбрать другую точку q и соединить ее кривой σ с точкой p, то нетрудно понять, что $\mathrm{Hol}_q(M) = \tau(\sigma)\mathrm{Hol}_p(M)\tau(\sigma)^{-1}$ и, аналогично, $\mathrm{Hol}^0_q(M) = \tau(\sigma)\mathrm{Hol}^0_p(M)\tau(\sigma)^{-1}$. Таким образом, с точностью до класса сопряженности (ограниченная) группа голономии не зависит от выбора фиксируемой точки, и поэтому мы отождествим $O(T_pM)$ с $O(n)$ и будем писать $\mathrm{Hol} = \mathrm{Hol}(M) \subset \subset O(n)$ или $\mathrm{Hol}^0 = \mathrm{Hol}^0(M) \subset SO(n)$ не указывая точку p. Действие группы Hol (Hol^0) на $T_pM = \mathbb{R}^n$ задает представление (ограниченной) группы голономии, которое называется *(ограниченным) представлением голономии.* В случае, если $\mathrm{Hol}(M)$ является собственной подгруппой в $O(n)$, то принято говорить, что риманово многообразие M^n обладает *специальной* группой голономии, или, что группа голономии M^n *редуцируется* к подгруппе $\mathrm{Hol}(M)$.

Следующая теорема проясняет структуру ограниченной группы голономии риманова многообразия.

Теорема 1. [8] *Ограниченная группа голономии Hol^0 произвольного риманова многообразия M является компактной подгруппой группы $O(n)$.*

Аналогичный результат для группы Hol неверен, даже если M компактно [9]. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы всегда будем предполагать, что риманово многообразие M односвязно и, в частности, $\mathrm{Hol}^0(M) = \mathrm{Hol}(M)$.

Возникает вопрос: какие группы Ли являются группами голономии односвязных римановых многообразий? Ниже мы рассмотрим этот вопрос подробнее.

Представление голономии риманова многообразия M называется *неприводимым* (мы, не совсем строго, будем говорить, что сама группа Hol неприводима), если не существует собственного инвариантного относительно Hol подпространства в T_pM. В противном случае, говорим, что представление голономии (или сама группа голономии) является *приводимым.* Если $M = M_1 \times M_2$ и $g = g_1 + g_2$, т. е. (M, g) является прямым произведением римановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2), то очевидно, что $\mathrm{Hol}(M) = \mathrm{Hol}(M_1) \times \mathrm{Hol}(M_2)$, причем представление голономии M приводимо и разлагается в сумму соответствующих представлений M_1 и M_2.

Теорема разложения де Рама показывает, что при условии полноты риманова многообразия верно и обратное:

Теорема 2. [10] *Пусть (M, g) — риманово многообразие с приводимым представлением голономии. Пусть*

$$T_pM = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r,$$

где $r \geq 2$, $V_j \neq 0$ для всех j. Тогда (M, g) локально изометрично прямому произведению $(\mathbb{R}^{k_1}, g_1) \times \ldots \times (\mathbb{R}^{k_r}, g_r)$, где $k_j = \dim V_j$, и $Hol^0_p(M) = H_1 \times \ldots \times H_r$, где $H_j \subset O(V_j, g_j)$.

Более того, если (M, g) односвязно и полно, то (M, g) (глобально) изометрично произведению $(M_1, g_1) \times \ldots \times (M_r, g_r)$, причем группа H_j является группой голономии (M_j, g_j).

Пусть $\mathbf{hol}_p(M) = \mathbf{hol}_p = \mathbf{hol}$ — алгебра Ли группы голономии Hol_p, называемая алгеброй голономии риманова многообразия M. Интуитивно понятно, что наличие специальной группы голономии накладывает ограничение на геометрию многообразия, поэтому можно ожидать наличие тесной связи между редукциями группы голономии и симметриями тензора кривизны. Эта связь объясняется следующей теоремой Амброза-Зингера.

Теорема 3. [11] *Алгебра голономии $\mathbf{hol}_p$ представляет собой подалгебру алгебры Ли $\mathbf{so}(T_pM)$, порожденную операторами вида*

$$(\tau(\lambda))^{-1} \circ R_q(X, Y) \circ \tau(\lambda),$$

где $q \in M$, $X, Y \in T_q(M)$, λ — произвольный C^1-кусочно гладкий путь, с началом p и концом q, а через $R_q(X, Y)$ мы обозначаем эндоморфизм $V \mapsto R(X, Y)V$ касательного пространства T_qM.

Идея доказательства теоремы 3 основана на классической формуле, связывающей параллельный перенос и тензор кривизны. А именно – предположим, что в точке $p \in M$ заданы два касательных вектора $X, Y \in T_pM$. Рассмотрим замкнутый «квадратный» контур Γ_ε со стороной $\varepsilon > 0$, выходящий из точки p в направлении X и входящий в точку p в направлении $-Y$. Чтобы построить такой контур, достаточно продолжить векторы X, Y до координатных полей, и движение вдоль координатных линий $(0,0) \mapsto (\varepsilon, 0) \mapsto (\varepsilon, \varepsilon) \mapsto (0, \varepsilon) \mapsto (0, 0)$ даст требуемый контур. Обозначим параллельный перенос вдоль Γ_ε через τ_ε. Тогда для любого вектора $V \in T_pM$

$$\frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}(\tau_\varepsilon(V)) = R(X, Y)V\ .$$

Понятно, что однопараметрическое семейство преобразований τ_ε можно рассматривать как кривую в группе $SO(T_pM)$, поэтому оператор кривизны $R(X, Y)$ оказывается элементом алгебры $\mathbf{hol}_p$.

Теперь определим понятие *лассо* с началом в точке p. Для этого рассмотрим точку $q \in M$ и кривую σ, соединяющую точки p и q. В точке q как и выше рассмотрим замкнутый координатный контур $\Gamma_\varepsilon(q)$, порожденный некоторой парой касательных в точке q векторов. Тогда лассо назовем кривую $\sigma^{-1} \circ \Gamma_\varepsilon(q) \circ \sigma$. Можно доказать, что если рассмотреть произвольную петлю γ на многообразии M с начальной точкой p, то ее можно сколь угодно близко аппроксимировать композицией конечного числа таких лассо. Предыдущая формула немедленно дает утверждение теоремы.

Особенно удобно применять теорему 3, если воспользоваться методом Картана подвижного репера. Предположим, что на римановом многообразии M (локально) задан ортонормированный корепер $e^1, \ldots, e^n$, т. е. $ds^2 = \sum_{i=1}^n (e^i)^2$. Форма связности ω_i^j однозначно определяется соотношениями

$$de^i = -\omega_j^i \wedge e^j, \ \omega_j^i = -\omega_i^j.$$

Тогда форма кривизны $\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i e^k \wedge e^l$ находится по формулам

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k.$$

Форму кривизны Ω можно рассматривать как 2-форму со значениями в $\mathbf{so}(n)$ (поскольку $\Omega_j^i = -\Omega_i^j$), точно так же, как форма связности ω может быть рассмотрена как 1-форма со значениями в $\mathbf{so}(n)$. При этом значение формы Ω на паре касательных векторов X, Y совпадает кососимметрическим оператором $R(X, Y)$, а значение ω на касательном векторе X может быть проинтерпретировано следующим образом. Рассмотрим кривую $\gamma(t)$, $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = X$. Рассмотрим вектор $V \in T_pM$ и его координатное представление $V = (v^1, \ldots, v^n)$, где $v^i = e^i(V)$. Пусть $V_t \in T_{\gamma(t)}M$ — результат параллельного переноса вектора V вдоль кривой γ, рассмотрим его координаты $V_t = (v_t^1, \ldots, v_t^n)$, $v_t^i = e^i(V_t)$. Предположим, что

$$(v_t^1, \ldots, v_t^n)^T = A_t \cdot (v^1, \ldots, v^n)^T, A_t \in SO(n).$$

Тогда

$$\omega(X) = \frac{d}{dt} |_{t=0} (A_t) \ .$$

В этом случае Теорема 3 позволяет получить следующий простой критерий.

Теорема 4. *Предположим, что риманово многообразие покрыто системой окрестностей, в каждой из которых определен ортонормированный корепер $e^1, \ldots, e^n$ и соответствующие формы связности и кривизны удовлетворяют следующему условию:*

$$\langle \omega(X,Y), \Omega(X) | p \in M; X, Y \in T_pM \rangle_{\mathbf{so}(n)} = \mathbf{g} \subset \mathbf{so}(n).$$

Тогда алгебра $\mathbf{g}$ является алгеброй голономии риманова многообразия M.

Важный пример римановых многообразий со специальными группами голономии доставляют симметрические пространства. А именно – если $M = G/H$ — симметрическое пространство, где $(\mathbf{g}, \mathbf{h})$ — симметрическая пара, то H — группа голономии M, а представление изотропии H совпадает с представлением голономии.

Следующая теорема, являющаяся основой классификации групп голономии римановых пространств, была доказана Берже.

Теорема 5. [12] *Пусть M — односвязное неприводимое риманово многообразие размерности n, не являющееся симметрическим. Тогда имеет место один из следующих случаев:*

1) $Hol(M) = SO(n)$,
2) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = U(m) \subset SO(2m)$,
3) $n = 2m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = SU(m) \subset SO(2m)$,
4) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m) \subset SO(4m)$,
5) $n = 4m$, *где* $m \geq 2$ *и* $Hol(M) = Sp(m)Sp(1) \subset SO(4m)$,
6) $n = 7$ *и* $Hol(M) = G_2 \subset SO(7)$,
7) $n = 8$ *и* $Hol(M) = Spin(7) \subset SO(8)$,

где все указанные группы действуют в $\mathbb{R}^n$ стандартным способом.

Список групп, перечисленных в теореме, принято называть списком Берже. Перед тем, как кратко описать все геометрии, возникающие из групп голономии списка Берже, дадим следующий очень полезный критерий. Пусть тензорное поле T типа (k, l) задано на M глобально, рассмотрим петлю γ в M с начальной точкой $p \in M$. Тогда по определению параллельного переноса тензорного поля для любых векторов $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ мы имеем: $P_\gamma(T)(v_1, \ldots, v_k) = P_\gamma(T(P_\gamma^{-1}(v_1), \ldots, P_\gamma^{-1}(v_k)))$. Следующее предложение очевидно.

Предложение 1. *Предположим, что группа Ли $G \subset SO(n)$ описывается следующим образом:*

$$G = \{\phi \in SO(n) | \phi(t) = t\},$$

где t — некоторая полилинейная векторозначная форма на $\mathbb{R}^n$ (либо t — некоторое линейное пространство форм указанного вида), а $\phi(t)$ обозначает стандартное действие отображения $\phi \in SO(n)$ на форме (либо на пространстве форм) t.

В описанных условиях риманово n-мерное многообразие M имеет группу голономии, лежащую в G тогда, и только тогда, когда на M существует глобально определенное параллельное тензорное поле T (либо параллельное линейное пространство тензорных полей T), в каждой точке изоморфное t.

Ниже следует краткое описание геометрий из списка Берже.

Общий случай: $\mathrm{Hol} = SO(n)$. На любом многообразии M римановы метрики с группой голономии $SO(n)$ образуют открытое всюду плотное множество относительно любой естественной топологии.

Кэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = U(m)$. Риманово многообразие M^n называется кэлеровым, если на нем существует параллельная невырожденная 2-форма ω, называемая кэлеровой формой. В этом случае представление голономии сохраняет форму ω и, следовательно, группа голономии содержится в $U(m)$. Можно ввести параллельную почти комплексную структуру J, $J^2 = -1$ соотношением $\omega(X, Y) = g(X, J(Y))$, $X, Y \in TM$ и доказать ее интегрируемость. Таким образом, по теореме Ньюлендера — Ниренберга [13] на M возникает комплексная структура.

Обратно, если на комплексном многообразии задана риманова метрика, согласованная с комплексной структурой (т. е. оператор J сохраняет скалярное произведение), то можно соотношением $\omega(X, Y) = g(X, J(Y))$, $X, Y \in TM$ ввести эрмитову форму ω. В этом случае имеет место следующее утверждение:

Предложение 2. *В описанной ситуации, эрмитова форма ω (а вместе с ней и комплексная структура J) параллельна тогда и только тогда, когда она замкнута:*

$$d\omega = 0.$$

Таким образом, вместо переопределенного, как правило, условия параллельности формы, на комплексном многообразии для построения кэлеровой структуры достаточно исследовать условие ее замкнутости.

Специальные кэлеровы многообразия, или многообразия Калаби-Яу: $\mathrm{Hol} = SU(m)$. Кэлерово многообразие M называется специальным, если допускает параллельную комплексную форму объема θ, т. е. ненулевую комплексную дифференциальную форму типа $(m, 0)$. Параллельность формы θ означает, что представление голономии сохраняет комплексный объем в $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^m$, т. е. группа голономии $\mathrm{Hol}(M)$ содержится в $SU(m) \subset U(m)$.

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. [14] *Кэлерово многообразие M является специальным тогда и только тогда, когда оно Риччи-плоско, т. е. его тензор Риччи обращается в нуль:*

$$R_{ij} = 0. \tag{1}$$

Гиперкэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = Sp(m)$. Риманово многообразие M^n называется гиперкэлеровым, если оно допускает три параллельные комплексные структуры, согласованные с римановой метрикой и удовлетворяющие кватернионным соотношениям $IJ = -JI = K$. У гиперкэлерова многообразия представление голономии оставляет инвариантными тройку 2-форм, отвечающих симплектическим преобразованиям $\mathbb{R}^{4m}$, поэтому $\mathrm{Hol}(M) = Sp(m) \subset SU(2m)$. Из последнего вложения следует, что гиперкэлерова метрика также удовлетворяет уравнению Эйнштейна (1).

Кватернионно-кэлеровы многообразия: $\mathrm{Hol} = Sp(m)Sp(1)$. Риманово многообразие называется кватернионно-кэлеровым, если существуют три локально определенные инвариантные относительно римановой метрики почти комплексные структуры I, J, K, удовлетворяющие кватернионным соотношениям и порождающие трехмерное параллельное подрасслоение в расслоении эндоморфизмов касательного расслоения TM. Если обозначить через ω_I, ω_J, ω_K соответствующие эрмитовы формы, то форма $\Omega = \omega_I \wedge \omega_I + \omega_J \wedge \omega_J + \omega_K \wedge \omega_K$ параллельна. Следовательно, группа голономии $\mathrm{Hol}(M)$ оставляет инвариантной форму Ω, поэтому содержится в $Sp(m)Sp(1) \subset O(4m)$ и, наоборот, если $\mathrm{Hol} \subset Sp(m)Sp(1)$, то на M существует кватернионно-кэлерова структура. Важность этого класса многообразий диктуется следующим утверждением.

Предложение 4. [15] *Кватернионно-кэлерово многообразие удовлетворяет уравнению Эйнштейна с «космологической» постоянной λ:*

$$R_{ij} = \lambda g_{ij}.$$

Стоит отметить, что кватернионно-кэлерово многообразие, вообще говоря, не является кэлеровым. Заметим также, что при $m = 1$ понятие кватернионно-кэлерова многообразия по-прежнему имеет смысл (и совпадает с автодуальным эйнштейновым многообразием), однако форма Ω просто совпадает с формой объема и группа голономии совпадает с $SO(4)$. Дальнейшие ссылки по кватернионно-кэлеровым многообразиям можно найти в [15,16].

Оставшиеся два типа групп голономии представляют для нас особый интерес: им посвящен раздел 4 статьи, поэтому мы опишем их более подробно.

Исключительная группа голономии $\mathrm{Hol} = G_2$. Пусть $\{e^i\}, i = 0, 2, 3, \ldots, 7$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^7$ (не очень естественный, на первый взгляд, способ нумерации базиса связан с необходимостью согласования в главе 2 формы Ψ_0, определяемой ниже, с формой Φ, определяющей $Spin(7)$-структуру). Положив $e^{ijk} = e^i \wedge e^j \wedge e^k$, рассмотрим следующую 3-форму Ψ_0 на $\mathbb{R}^7$:

$$\Psi_0 = -e^{023} - e^{045} + e^{067} + e^{346} - e^{375} - e^{247} + e^{256}.$$

Подгруппа в $GL(7)$, сохраняющая форму Ψ_0, совпадает с группой G_2. Это компактная односвязная 14-мерная простая группа Ли, обычно определяемая как группа автоморфизмов чисел Кэли. Заметим, что группа G_2 также сохраняет метрику

$$g_0 = (e^0)^2+(e^2)^2+(e^3)^2+(e^4)^2+(e^5)^2+(e^6)^2+(e^7)^2,$$

сопряженную 4-форму

$$*\Psi_0 = -e^{4567}-e^{2367}-e^{2345}-e^{0257}-e^{0246}+e^{0356}-e^{0347}$$

и ориентацию пространства $\mathbb{R}^7$. Дифференциальная 3-форма Ψ на ориентированном римановом 7-мерном многообразии M задаёт G_2-структуру, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^7$, такая, что $\phi_p^*\Psi_0 = \Psi|_p$. При этом форма Ψ определяет единственную метрику g_Ψ, такую что $g_\Psi(v, w) = g_0(\phi_p v, \phi_p w)$ для $v, w \in T_pN$ [17, 18]. Если форма Ψ параллельна ($\nabla\Psi = 0$), то группа голономии риманова многообразия N будет содержаться в G_2.

Предложение 5. [19] *Форма Ψ, задающая G_2-структуру на M параллельна тогда, и только тогда, когда она замкнута и козамкнута:*

$$\begin{aligned} d\Psi &= 0 \\ d*\Psi &= 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Заметим, что для компактного M условие (2) равносильно гармоничности Ψ. Однако в некомпактном случае это вообще говоря не так. Также отметим здесь, что форма $\Phi_0 = e^1 \wedge \Psi_0 - *\Psi_0$, где $*$ — оператор Ходжа в $\mathbb{R}^7$, задает $Spin(7)$-структуру на $\mathbb{R}^8$ с ортонормированным базисом $\{e^i\}_{i=0,1,2,..,7}$.

Важность римановых многообразий с группой голономии G_2 в некоторых задачах математической физики связана со следующим утверждением.

Предложение 6. [20] *Пусть (M, g) — риманово 7-мерное многообразие и $Hol(M) \subset G_2$. Тогда g — Риччи-плоская метрика, т. е. она удовлетворяет уравнению (1).*

Исключительная группа голономии Hol $= Spin(7)$. Пусть $\{e^i\}, i = 0, 1 \ldots, 7$ — ортонормированный базис из 1-форм на стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$. Как и ранее, обозначаем $e^{ijkl} = e^i \wedge e^j \wedge e^k \wedge e^l$ и определим 4-форму Φ_0 на $\mathbb{R}^8$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi_0 = \quad & e^{0123} + e^{4567} + e^{0145} - e^{2345} - e^{0167} + \\ & + e^{2367} + e^{0246} + e^{1346} - e^{0275} + e^{1357} + \\ & + e^{0347} - e^{1247} - e^{0356} + e^{1256}. \end{aligned}$$

Подгруппа в $GL(8)$, сохраняющая форму Φ_0 совпадает с группой $Spin(7)$. Это компактная односвязная простая 21-мерная группа Ли, двукратно накрывающая ортогональную группу $SO(7)$. Группа $Spin(7)$ сохраняет метрику

$$\begin{aligned} g_0 = (e^0)^2 + (e^1)^2 + (e^2)^2 + (e^3)^2 + \\ + (e^4)^2 + (e^5)^2 + (e^6)^2 + (e^7)^2 \end{aligned}$$

и ориентацию пространства $\mathbb{R}^8$.

Пусть M — ориентированное риманово 8-мерное многообразие. Говорят, что дифференциальная форма $\Phi \in \Lambda^4 M$ задает $Spin(7)$-структуру на M, если в окрестности каждой точки $p \in M$ существует сохраняющая ориентацию изометрия $\phi_p : T_pM \to \mathbb{R}^8$, такая, что $\phi_p^*\Phi_0 = \Phi|_p$. При этом форма Φ определяет единственную метрику g_Φ, такую, что $g_\Phi(v, w) = g_0(\phi_p v, \phi_p w)$ для $v, w \in T_pM$ [17,18]. Если форма Φ параллельна, то группа голономии риманова многообразия M редуцируется к подгруппе $Spin(7) \subset SO(8)$. Как и в случае группы голономии G_2 имеет место следующее предложение.

Предложение 7. [19] *Форма Φ, задающая $Spin(7)$-структуру на многообразии M параллельна тогда и только тогда, когда она замкнута:*

$$d\Phi = 0. \qquad (3)$$

Поскольку Φ самосопряжена относительно оператора Ходжа $*$, ее замкнутость равносильна козамкнутости и влечет гармоничность; однако обратное в некомпактном случае, вообще говоря, неверно.

Римановы многообразия с группой голономии $Spin(7)$ также являются эйнштейновыми:

Предложение 8. [20] *Пусть (M, g) — риманово 8-мерное многообразие и $Hol(M) \subset Spin(7)$. Тогда g — Риччи-плоская метрика, т. е. она удовлетворяет уравнению (1).*

3. Геометрия 3-сасакиевых многообразий

Существует ряд очень интересных геометрий, которые, сами не имея специальной голономии, являются тесно связанными с такими пространствами. Одной из таких геометрий посвящен данный раздел, используемый в дальнейшем для построения римановых метрик с группой голономии G_2 и $Spin(7)$. Более полные доказательства и дальнейшие ссылки по 3-сасакиевым многообразиям можно найти в [21].

Пусть M — гладкое замкнутое риманово многообразие размерности m с метрикой g. Конусом $\bar{M}$ над M будем называть многообразие $\mathbb{R}_+ \times M$ с метрикой $\bar{g} = dt^2 + t^2 g$.

Многообразие M называется *сасакиевым*, если группа голономии конуса $\bar{M}$ содержится в $U(\frac{m+1}{2})$ (в частности, m нечетно). Значит, на $\bar{M}$ существует параллельная комплексная структура J. Отождествим M с изометричным ему вложенным подмногообразием $M \times \{1\} \subset \bar{M}$ и положим $\xi = J(\partial_t)$. Векторное поле ξ называется *характеристическим* полем сасакиева многообразия M. Характеристическая 1-форма η сасакиева многообразия определяется соотношением

$$\eta(X) = g(X, \xi),$$

для всех полей X на M.

Лемма 1. *Поле ξ является единичным векторным полем Киллинга на многообразии M.*

Доказательство. То, что поле ξ является единичным, сразу следует из определения. Пусть ∇ и $\bar{\nabla}$ — римановы связности в M и $\bar{M}$. Непосредственно проверяется, что для любых векторных полей X, Y на M

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - tg(X,Y)\partial_t,$$

$$\bar{\nabla}_{\partial_t} X = \bar{\nabla}_X \partial_t = \frac{1}{t}X,\ \bar{\nabla}_{\partial_t}\partial_t = 0.$$

Тогда для любого векторного поля X на M

$$g(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\nabla_X \xi, X) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, X) =$$

$$= \bar{g}(J(\bar{\nabla}_X \partial_t), X) = \bar{g}(JX, X) = 0.$$

Следовательно, поле ξ — киллингово. Лемма доказана.

Если на многообразии M заданы три попарно ортогональные сасакиевы структуры, то M становится 3-сасакиевым. Более точно, многообразие M называется 3-*сасакиевым*, если метрика $\bar{g}$ на $\bar{M}$ гиперкэлерова, т. е. ее группа голономии содержится в $Sp(\frac{m+1}{4})$ (в частности, $m = 4n+1, n \geq 1$). Последнее означает, что на $\bar{M}$ существуют три параллельные комплексные структуры J^1, J^2, J^3, удовлетворяющие соотношениям $J^j J^i = -\delta^{ij} + \varepsilon_{ijk} J^k$. Как и в сасакиевом случае определяются характеристические поля ξ^i и 1-формы η_i:

$$\xi^i = J^i(\partial_t),\ \eta_i(X) = g(X, \xi^i),\ i = 1,2,3,$$

для всех векторных полей X на M.

Лемма 2. *Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 являются единичными попарно ортогональными векторными полями Киллинга на M, причем*

$$\nabla_{\xi^i}\xi^j = \varepsilon_{ijk}\xi^k,\ [\xi^i, \xi^j] = 2\varepsilon_{ijk}\xi^k.$$

Доказательство. То, что поля ξ^i являются единичными, попарно ортогональными и киллинговыми, сразу следует из определения и из предыдущей леммы. Далее:

$$\nabla_{\xi^i}\xi^j = \bar{\nabla}_{\xi^i}\xi^j + \delta^{ij}\partial_t = J^j\bar{\nabla}_{\xi^i}\partial_t + \delta^{ij}\partial_t =$$
$$= (J^j J^i + \delta^{ij})\partial_t = \varepsilon_{ijk}\xi^k,$$

откуда немедленно следует:

$$[\xi^i, \xi^j] = \nabla_{\xi^i}\xi^j - \nabla_{\xi^j}\xi^i = 2\varepsilon_{ijk}\xi^k.$$

Лемма доказана.

Поля ξ^1, ξ^2, ξ^3 образуют подалгебру Ли $\mathbf{sp}(1)$ в алгебре инфинитезимальных изометрий. Следовательно, в группе всех изометрий содержится подгруппа либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$, орбиты действия которой определяют трехмерное слоение $\mathcal{F}$. Из леммы следует, что каждый слой $\mathcal{F}$ является вполне геодезическим трехмерным подмногообразием постоянной кривизны 1.

Риманов орбифолд $\mathcal{O}$ называется *кватернионно-кэлеровым*, если в V-расслоении эндоморфизмов касательного пространства существует параллельное V-подрасслоение $\mathcal{I}$ размерности 3, локально порожденное почти комплексными структурами I^1, I^2, I^3, удовлетворяющими соотношениям алгебры кватернионов, и расслоение $\mathcal{I}$ инвариантно относительно действия локальной униформизующей группы $\mathcal{O}$.

Теорема 6. [21] *Пусть M — замкнутое $(4n+3)$-мерное 3-сасакиево многообразие с определенным как выше трехмерным слоением $\mathcal{F}$. Тогда на пространстве листов слоения $\mathcal{F}$ существует структура $4n$-мерного кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathcal{O}$, такая, что естественная проекция $\pi : M \to \mathcal{O}$ является римановой субмерсией и главным V-расслоением со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$. Общий слой π изометричен либо $Sp(1)$, либо $SO(3)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{V}$ трехмерное подрасслоение в TM, порожденное характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3. Пусть $TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ — ортогональное разложение относительно метрики g. Подрасслоение $\mathcal{V}$ будем назвать расслоением вертикальных векторов, а $\mathcal{H}$ — расслоением горизонтальных векторов.

Пусть $p \in M$. Предположим, что стабилизатором точки p относительно действия $Sp(1)$ является дискретная подгруппа Γ в $Sp(1)$, т. е. лист $\mathcal{F}_p$, проходящий через точку p, изометричен $Sp(1)/\Gamma$. Положим

$$U = \{\exp_p(tX) | X \in \mathcal{H}_p, |X| = 1, 0 \leq t \leq \varepsilon\},$$

где $\varepsilon > 0$ выбран настолько малым, что
$\varepsilon < \mathrm{inj}\ (M)$, $\mathcal{F}_p$ пересекает U ровно один раз в точке p, и каждый лист слоения $\mathcal{F}$ пересекает U не более чем конечное число раз. Тогда U гомеоморфно $\mathbb{R}^{4n}$, и на U действует изометриями группа Γ по правилу:

$$\gamma \in \Gamma : \exp_p(tX) \mapsto \exp_p(td_p\gamma(X)).$$

Легко понять, что окрестность $\mathcal{O}$, состоящая из листов, пересекающих U гомеоморфна U/Γ, и система таких окрестностей, построенных по всем точкам p, задает униформизующий атлас на $\mathcal{O}$.

Очевидно, что метрика g на M имеет вид:

$$g = \sum_{i=1}^{3}\eta_i^2 + g|_{\mathcal{H}},$$

где $g|_{\mathcal{H}}$ — ограничение метрики g на горизонтальное распределение. Рассмотрим проекцию $\pi : M \to \mathcal{O}$. Поскольку метрика g инвариантна относительно действия $Sp(1)$, то существует такая риманова метрика $g_{\mathcal{O}}$ на орбифолде $\mathcal{O}$, что для любой точки $p \in M$ ограничение $d\pi_p : \mathcal{H}_p M \to T_{\pi(p)}\mathcal{O}$ является изометрией; при этом $d\pi^*(g_{\mathcal{O}}) = g|_{\mathcal{H}}$. Таким образом проекция π становится римановой субмерсией, и каждому векторному полю Y на $\mathcal{O}$ однозначно соответствует горизонтальное $Sp(1)$-инвариантное векторное поле X на M, такое, что $d\pi(X) = Y$. Связность Леви — Чивита метрики $g_{\mathcal{O}}$ получается проектированием на $\mathcal{H}$ связности Леви — Чивита метрики g. Далее, если X — горизонтальное векторное поле, то

$$g(J^i(X), \xi^j) = g(X, \varepsilon_{ijk}\xi^k) = 0.$$

Таким образом, операторы J^1, J^2, J^3 на $\mathcal{H}$ отображают горизонтальные векторы в горизонтальные и задают кватернионную структуру на орбифолде $\mathcal{O}$.

Определим 2-формы на M следующим образом:

$$\omega_i = d\eta_i + \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\eta_j \wedge \eta_k,\ i = 1, 2, 3.$$

Непосредственно проверяется, что для любых горизонтальных векторных полей X, Y:

$$\omega_i(X, Y) = \frac{1}{2}(X\eta_i(Y) - Y\eta_i(X) - \eta_i([X, Y])) =$$

$$= \frac{1}{2}\eta_i(-\nabla_X Y + \nabla_Y X) =$$

$$= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi^i, Y) - g(\nabla_Y \xi^i, X)) = g(J^i(X), Y),$$

$$\omega_i(X, \xi^j) = 0,\ \omega_i(\xi^j, \xi^k) = 0.$$

Таким образом, формы ω_i получаются опусканием индекса из ограничений операторов J^i на $\mathcal{H}$.

Далее:

$$L_{\xi^i}\eta_j(X) = \xi^i g(X, \xi^j) - g(\xi^j, [\xi^i, X]) =$$

$$= g(\nabla_{\xi^i} X, \xi^j) + g(X, \nabla_{\xi^i}\xi^j) - g(\xi^j, [\xi^i, X]) =$$

$$= g(\nabla_X \xi^i, \xi^j) + g(X, \nabla_{\xi^i}\xi^j) =$$

$$= g(\bar{\nabla}_X J^i\partial_t, \xi^j) + +g(X, \bar{\nabla}_{\xi^i} J^j\partial_t) =$$

$$= -g(X, J^i\xi^j) + g(X, J^j\xi^i) =$$

$$= 2g(X, J^j J^i\partial_t) = 2g(X, \varepsilon_{ijk}\xi^k) = 2\varepsilon_{ijk}\eta_k(X).$$

Таким образом,

$$L_{\xi^i}\eta_j = 2\varepsilon_{ijk}\eta_k.$$

Дифференцируя, получаем:

$$L_{\xi^i} d\eta_j = 2\varepsilon_{ijk} d\eta_k.$$

Далее, пользуясь этим соотношением и условием

$$L_{\xi^i}(\eta_j \wedge \eta_k) = L_{\xi^i}\eta_j \wedge \eta_k + \eta_j \wedge L_{\xi^i}\eta_k$$

мы получаем:

$$L_{\xi^i}\omega_j = 2\varepsilon_{ijk}\omega_k.$$

Таким образом, пространство форм, порожденных формами ω_i инвариантно относительно действия $Sp(1)$, а это значит, что и пространство, порожденное операторами $J^i|_{\mathcal{H}}$, является $Sp(1)$-инвариантным и опускается на $\mathcal{O}$. Итак, в расслоении $End(T\mathcal{O})$ определено трехмерное подпространство, локально порожденное почти комплексными структурами J^1, J^2, J^3.

Далее, для горизонтальных X, Y имеем:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\nabla_X J^i)(Y) &= \mathcal{H}(\nabla_X(J^iY) - J^i(\nabla_X Y)) = \\ &= \mathcal{H}\bar{\nabla}_X(J^iY) - \mathcal{H}J^i(\nabla_X Y) = \\ &= \mathcal{H}J^i(\bar{\nabla}_X Y)) - \mathcal{H}J^i(\nabla_X Y) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда уже нетрудно вывести, что распределение этих подпространств параллельно вдоль $\mathcal{O}$.

Доказательство утверждения про общий слой расслоения π можно найти в [21]. Теорема доказана.

Поле ξ^1 соответствует подгруппе S^1 в $Sp(1)$ либо в $SO(3)$. Таким образом, можно рассмотреть одномерное слоение $\mathcal{F}'$ на M, порожденное полем ξ^1. Совершенно аналогично предыдущей теореме, можно доказать, что на пространстве слоев слоения $\mathcal{F}'$ можно ввести структуру 6-мерного риманова орбифолда $\mathcal{Z}$, согласованную с римановой субмерсией $\pi' : M \to \mathcal{Z}$. Известно, что метрика на $\mathcal{Z}$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна [21]. Орбифолд $\mathcal{Z}$ называется *твисторным пространством* многообразия M.

3-сасакиево многообразие M называется *регулярным*, если регулярным является 3-сасакиево слоение $\mathcal{F}$. В этом случае каждый слой $\mathcal{F}$ диффеоморфен либо S^3, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$ являются многообразиями.

Теорема 7. [21] *Если M — компактное регулярное 3-сасакиево многообразие размерности 7, то M изометрично одному из следующих однородных пространств:*

$$S^7,\ \mathbb{R}P^7,\ SU(3)/T_{1,1},$$

где через $T_{1,1}$ обозначена окружность $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \| z| = 1\}$, вложенная в максимальный тор $T^2 \subset SU(3)$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}^2 \end{pmatrix}.$$

4. Конструкции римановых метрик с группами голономии $Spin(7)$ и G_2

4.1. Группа голономии $Spin(7)$

В этом разделе описываем общую конструкцию, которая позволяет строить метрики с группой голономии $Spin(7)$ по заданному 3-сасакиеву 7-мерному многообразию M. Идея состоит в следующем. Если выбрать 3-сасакиево многообразие M, то конус над M будет иметь группу голономии $Sp(2) \subset Spin(7)$. Мы деформируем конусную метрику так, чтобы разрешить особенность в вершине конуса и получить метрику, группа голономии которой не станет больше, чем $Spin(7)$. При этом за деформацию отвечают функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$, зависящие от радиальной переменной t, меняющейся вдоль образующей конуса.

Более подробно, рассмотрим семимерное 3-сасакиево многообразие M с римановой метрикой g и соответствующее 3-сасакиево расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ с общим слоем, диффеоморфным S^3 либо $SO(3)$, над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$. Как и ранее, через $\mathcal{Z}$ будем обозначать твисторное пространство 3-сасакиева многообразия M. С многообразием M свяжем два орбифолда $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, разрешающих конусную особенность $\bar{M}$ следующими двумя способами.

1. Рассмотрим стандартное действие на $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ группы $Sp(1)$, представленной единичными кватернионами, и соответствующее действие $SO(3) = Sp(1)/\mathbb{Z}_2$ на $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$:

$$q \in Sp(1) : x \in \mathbb{H} \mapsto qx \in \mathbb{H}.$$

Пусть $\mathcal{M}_1$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^4$ либо $\mathbb{R}^4/\mathbb{Z}_2$, ассоциированное с главным расслоением $\pi : M \to \mathcal{O}$ относительно рассмотренного действия. Таким образом, орбифолд $\mathcal{O}$ вложен в $\mathcal{M}_1$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_1 \backslash \mathcal{O}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M. Пусть $t = |x|$, для $x \in \mathbb{H}$. Очевидно, что при $t \to 0$ каждый слой расслоения π коллапсирует в точку, а сферическое сечение π коллапсирует к нулевому слою $\mathcal{O}$.

С другой стороны, очевидно, что существует диффеоморфизм

$$\mathcal{M}_1 \backslash \mathcal{O} \to \bar{M} \backslash \{*\},$$

позволяющий разрешить конусную особенность $\{*\}$ в $\bar{M}$.

2. Пусть $S \simeq S^1$ — подгруппа в $Sp(1)$ либо $SO(3)$, интегрирующая поле Киллинга ξ^1. Рассмотрим действие S на $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$:

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to ze^{i\phi} \in \mathbb{C}.$$

Расслоение $M \to \mathcal{Z}$ является главным со структурной группой S. Пусть $\mathcal{M}_2$ — расслоенное пространство со слоем $\mathbb{R}^2$, ассоциированное с $\pi' : M \to \mathcal{Z}$. Таким образом, орбифолд $\mathcal{Z}$ вложен в $\mathcal{M}_2$ в качестве нулевого слоя, а $\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z}$ расслаивается на сферические сечения, диффеоморфные M. Аналогично предыдущему случаю положим $t = |z|$, где $z \in \mathbb{C}$. Тогда при $t \to 0$ каждый слой расслоения π' коллапсирует в точку, а сферическое сечение коллапсирует к нулевому слою $\mathcal{Z}$.

Как и ранее, очевиден диффеоморфизм, осуществляющий разрешение конусной особенности:

$$\mathcal{M}_2 \backslash \mathcal{Z} \to \bar{M} \backslash \{*\}.$$

Нам потребуется следующая модификация этой конструкции. Для любого натурального числа p существует очевидное вложение $\mathbb{Z}_p \subset S$, причем $\mathbb{Z}_p$ действует на $\mathcal{M}_2$ изометриями. Следовательно, корректно определен орбифолд $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, являющийся многообразием в точности тогда, когда многообразием является $\mathcal{M}_2$. Легко понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ является расслоением со слоем $\mathbb{C}$, ассоциированным с главным расслоением $\pi' : M \to \mathcal{Z}$ при помощи действия

$$e^{i\phi} \in S : z \in \mathbb{C} \to ze^{ip\phi} \in \mathbb{C}.$$

Нетрудно понять, что $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ разрешает конусную особенность схожим образом с $\mathcal{M}_2$: каждая окружность (укороченная «в p раз») коллапсирует в точку.

В случае, если 3-сасакиево многообразие регулярно, то каждый слой π диффеоморфен либо $S^3 = Sp(1)$, либо $SO(3)$ и орбифолды $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$ являются гладкими многообразиями. И обратно, наличие «особого» слоя означает существование точек с нетривиальной униформизующей группой у пространств $\mathcal{O}$ и $\mathcal{Z}$, а значит, и у пространств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Таким образом, учитывая теорему находим, что пространства $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ могут являться гладкими многообразиями только при $M = S^7$, $M = \mathbb{R}P^7$ и $M = SU(3)/T_{1,1}$. В случае $M = S^7$ оба пространства являются гладкими 8-мерными многообразиями. Если $M = \mathbb{R}P^7$ либо $M = SU(3)/T_{1,1}$, то общий слой равен $SO(3)$ и многообразием является лишь соответствующее пространство $\mathcal{M}_2$.

Пользуясь обозначениями из раздела 3, рассмотрим на $(0, \infty) \times M$ следующую метрику:

$$\bar{g} = dt^2 + \sum_{i=1}^{3} A_i(t)^2 \eta_i^2 + B(t)^2 g|_{\mathcal{H}}, \qquad (4)$$

где функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$ и $B(t)$ определены на промежутке $(0, \infty)$. Локально можно выбрать ортонормированную систему 1-форм $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$ так, что

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7), \\ \omega_2 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5), \\ \omega_3 &= 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6). \end{aligned}$$

Пусть $\Omega = \eta_4 \wedge \eta_5 \wedge \eta_6 \wedge \eta_7 = -\frac{1}{8}\omega_1 \wedge \omega_1 = -\frac{1}{8}\omega_2 \wedge \omega_2 =$

$= -\frac{1}{8}\omega_3 \wedge \omega_3$ — подъем формы объема кватернионно-кэлерова орбифолда $\mathcal{O}$.

Рассмотрим следующую 4-форму:

$$\Phi = e^0\wedge e^1\wedge e^2\wedge e^3+B^4\Omega+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^1-e^2\wedge e^3)\wedge\omega_1+$$

$$+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^2-e^3\wedge e^1)\wedge\omega_2+\frac{1}{2}B^2(e^0\wedge e^3-e^1\wedge e^2)\wedge\omega_3,$$

где

$$e^0 = dt,$$
$$e^i = A_i\eta_i, i = 1,2,3,$$
$$e^j = B\eta_j, j = 4,\dots,7.$$

Очевидно, что форма Φ определена глобально на $\bar{M}$ и локально совпадает с формой Φ_0, задающей $Spin(7)$-структуру на $\bar{M}$.

Пользуясь очевидными тождествами

$$\begin{aligned} d\eta_i = &\ \omega_i - 2\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2},\\ d\omega_i = &\ 2d(\eta_{i+1}\wedge\eta_{i+2}) =\\ &= 2(\omega_{i+1}\wedge\eta_{i+2}-\eta_{i+1}\wedge\omega_{i+2}),\\ &\quad i = 1,2,3 \mod 3,\end{aligned}$$

мы получаем следующие соотношения, замыкающие внешнюю алгебру рассмотренных форм:

$$\begin{aligned} de^0 = &\ 0,\\ de^i = &\ \tfrac{A_i'}{A_i}e^0\wedge e^i + A_i\omega_i - \tfrac{2A_i}{A_{i+1}A_{i+2}}e^{i+1}\wedge e^{i+2},\\ &\quad i = 1,2,3 \mod 3,\\ d\omega_i = &\ \tfrac{2}{A_{i+2}}\omega_{i+1}\wedge e^{i+2} - \tfrac{2}{A_{i+1}}e^{i+1}\wedge\omega_{i+2},\\ &\quad i = 1,2,3 \mod 3.\end{aligned}$$

Из предложения 7, определенная нами $Spin(7)$-структура не имеет кручения в точности тогда, когда форма Φ замкнута.

Следующее утверждение получается непосредственными вычислениями при помощи полученных выше соотношений алгебры форм.

Предложение 9. *Условие (3) эквивалентно следующей нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений:*

$$\begin{aligned} A_1' &= \tfrac{2A_1^2}{B^2} + \tfrac{(A_2-A_3)^2-A_1^2}{A_2A_3},\\ A_2' &= \tfrac{2A_2^2}{B^2} + \tfrac{(A_3-A_1)^2-A_2^2}{A_1A_3},\\ A_3' &= \tfrac{2A_3^2}{B^2} + \tfrac{(A_1-A_2)^2-A_3^2}{A_1A_2},\\ B' &= -\tfrac{A_1+A_2+A_3}{B}.\end{aligned} \tag{5}$$

Метрика (4) при выполнении определенных граничных условий даст гладкую риманову метрику на $\mathcal{M}_1$ или $\mathcal{M}_2$. Следующие леммы, доказанные в [22] проясняют эти условия.

Предложение 10. *Пусть $A_i(t)$, $i = 1,2,3$, $B(t)$ — C^∞-гладкое на промежутке $[0,\infty)$ решение системы (5). Тогда метрика (4) продолжается до гладкой метрики на $\mathcal{M}_1$ в том, и только в том случае, когда выполнены следующие условия:*

(1) $A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0, |A_1'(0)| = = |A_2'(0)| = |A_3'(0)| = 1$;

(2) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;

(3) функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0,\infty)$.

Предложение 11. *В условиях предыдущей леммы, пусть $p = 4$ либо $p = 2$, в зависимости от того, изометричен общий слой M или $Sp(1)$, или $SO(3)$. Для того, чтобы метрика (4) продолжалась до гладкой метрики на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

(1) $A_1(0) = 0, |A_1'(0)| = 4$;

(2) $A_2(0) = -A_3(0) \neq 0, A_2'(0) = A_3'(0)$;

(3) $B(0) \neq 0, B'(0) = 0$;

(4) функции $A_1(t)$, $A_2(t)$, $A_3(t)$, $B(t)$ знакоопределены на промежутке $(0,\infty)$.

Прежде чем формулировать общие результаты о решениях системы (5), выведем известные нам на данный момент точные решения этой системы. Если положить $A_1 = A_2 = A_3$, то система (5) сводится к паре уравнений на функции $A = A_1 = A_2 = A_3$, B:

$$\begin{aligned}\tfrac{dA}{dt} &= 2\tfrac{A^2}{B^2} - 1,\\ \tfrac{dB}{dt} &= -3\tfrac{A}{B}.\end{aligned}$$

Введем новую переменную ρ:

$$\frac{d\rho}{dt} = 3\frac{A}{B}.$$

Тогда из второго уравнения $\frac{dB}{d\rho} = -1$, и мы можем считать, что $B(\rho) = -\rho$. Следовательно, первое уравнение переписывается в виде:

$$\frac{d(A^2)}{d\rho} + \frac{4}{3}\frac{A^2}{\rho} = \frac{2}{3}\rho.$$

Последнее уравнение без труда решается, и мы получаем:

$$A^2(\rho) = \frac{1}{5}\rho^2\left(1-\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\frac{10}{3}}\right).$$

Наконец, нормируя полученное решение заменой $r = \frac{\sqrt{5}}{3}$ мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$ с группой голономии $Spin(7)$ [17]:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}}+\frac{9}{25}r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{10}{3}}\right)\sum_{i=1}^{3}\eta_i^2+\frac{9}{5}r^2 g|_{\mathcal{H}}. \tag{6}$$

Отметим, что метрика (6) была первым примером полной метрики с группой голономии $Spin(7)$.

Далее, если положить $A_2 = A_3$, то система (5) также поддается явному интегрированию в терминах гипергеометрических функций, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_1$:

$$\bar{g} = \frac{vf dz^2}{4z(1-z^2)(1-z)(v-2)} + \frac{16(v-2)zf}{(1+z)v^3}\eta_1^2+$$

$$+\frac{4(v-2)zf}{(1+z)v}(\eta_2^2+\eta_3^2) + fg|_{\mathcal{H}}, \tag{7}$$

где

$$v(z) = \frac{2k\sqrt{z}}{(1-z^2)^{\frac{1}{4}}} - 2z\ {}_2F_1[1, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; 1-z^2],$$

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[\int^z \frac{dz'}{v(z')(1-z'^2)}\right],$$

k — константа интегрирования.

При $k = 0$ мы получаем следующую метрику на $\mathcal{M}_1$, выражаемую в элементарных функциях:

$$\bar{g} = \frac{(r-r_0)^2}{(r+r_0)(r-3r_0)} dr^2 + 4r_0^2 \frac{(r+r_0)(r-3r_0)}{(r-r_0)^2} \eta_1^2 +$$
$$+(r+r_0)(r-3r_0)(\eta_2^2+\eta_3^2) + 2(r^2-r_0^2) g|_{\mathcal{H}}. \quad (8)$$

Метрики (7) и (8) были найдены в [23] для $M = S^4$.

Наконец, если положить $A_2 = -A_3$, то система (2.3) становится, вообще говоря, переопределенной. Если сложить второе и третье уравнения, то мы получим, что с необходимостью $A_2^2 = A_3^2 = B^2$. Положив для определенности $A_2 = -B$, $A_3 = B$, мы приходим к системе из двух уравнений:

$$\frac{dA_1}{dt} = \frac{3A_1^2 - 4B^2}{B^2}, \quad \frac{dB}{dt} = -\frac{A_1}{B}.$$

Как и ранее, делаем замену

$$\frac{dr}{dt} = \frac{A_1}{B},$$

откуда находим $B(r) = -r$ и получаем следующее уравнение для A_1:

$$\frac{d(A_1)^2}{dr} + 6\frac{A_1^2}{r} = 8r.$$

Последнее уравнение интегрируется, и мы приходим к следующей метрике на $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ (где $p = 4$ или $p = 2$, в зависимости от общего слоя M), имеющую группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8} + r^2\left(1-\left(\frac{r_0}{r}\right)^8\right)\eta_1^2 + r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + r^2 g|_{\mathcal{H}}. \quad (9)$$

Насколько нам известно, эта метрика была впервые описана в [24,25].

Теорема 8. [22] *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие, и положим $p = 2$ или $p = 4$, в зависимости от того, равен общий слой 3-сасакиева слоения M либо $SO(3)$, либо $Sp(1)$. Тогда на орбифолде $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_p$ существуют следующие полные регулярные римановы метрики $\bar{g}$ вида (4) с группой голономии $H \subset Spin(7)$:*

1) если $A_1(0) = 0$, $-A_2(0) = A_3(0) = B(0) > 0$, то метрика $\bar{g}$ имеет группу голономии $SU(4) \subset Spin(7)$ и совпадает с АК-метрикой (9);

2) для каждого набора начальных значений $A_1(0) = 0$, $0 < -A_2(0) = A_3(0) < B(0)$ существует регулярная АЛК-метрика $\bar{g}$ с группой голономии $Spin(7)$. На бесконечности эти метрики стремятся к произведению конуса над твисторным пространством $\mathcal{Z}$ и окружности S^1.

Более того, любая полная регулярная метрика на пространстве $\mathcal{M}_2/\mathbb{Z}_q$ вида (4) с параллельной $Spin(7)$-структурой, задаваемой формой Φ изометрична одной из указанных выше.

Теорема 9. [26] *Пусть M — 7-мерное компактное 3-сасакиево многообразие. Тогда существует двупараметрическое семейство попарно негомотетичных римановых метрик на $\mathcal{M}_1$ вида (4) с группой голономии, содержащейся в $Spin(7)$, удовлетворяющих начальным условиям:*

$$A_1(0) = A_2(0) = A_3(0) = 0,$$
$$\dot{A}_1(0) = \dot{A}_2(0) = \dot{A}_3(0) = -1,$$
$$B(0) > 0, B'(0) = 0.$$

Семейство метрик параметризуется тройкой чисел $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 < 0$, таких, что $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2=\varepsilon^2$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$: для каждой такой тройки существует значение переменной $t = t_0$, при котором траектория (A_1, A_2, A_3) проходит через эту тройку, т. е.

$$A_1(t_0) = \lambda_1, A_2(t_0) = \lambda_2, A_3(t_0) = \lambda_3.$$

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ метрика (4) является полной римановой метрикой с группой голономии $Spin(7)$ и асимптотически ведет себя как конус над M; при $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ мы также получаем семейство полных метрик с группой голономии $Spin(7)$, асимптотически ведущих себя как произведения конуса над твисторным пространством M и окружности постоянного радиуса. Наконец, в остальных случаях метрики полными не являются.

Любая другая полная регулярная метрика вида (4) с параллельной $Spin(7)$-структурой, заданной формой Φ на $\mathcal{M}_1$ совпадает с одной из метрик описанного семейства, с точностью до перестановок индексов переменных.

Полные метрики, о которых говорится в теореме описываются явным образом в (8).

Описанную конструкцию можно усложнить, если рассмотреть класс метрик, зависящих от пяти функциональных параметров. Более точно, пусть $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ — пространство Алоффа-Уоллаха со структурой 3-сасакиева 7-мерного многообразия. На $\bar{M} = M \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим риманову метрику следующего вида:

$$dt^2 + A_1(t)^2\eta_1^2 + A_2(t)^2\eta_2^2 + A_3(t)^2\eta_3^2 +$$
$$+B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2), \quad (10)$$

где t — координата на $\mathbb{R}_+$, $\{\eta_i\}$ — ортонормированный корепер на M, согласованный с 3-сасакиевой структурой (подробности во втором параграфе). Конусную особенность (при $t = 0$) пространства $\bar{M}$ разрешим следующим образом: затянем на уровне $\{t = 0\}$ каждую отвечающую ковектору η_1 окружность в точку. Полученное многообразие, профакторизованное по $\mathbb{Z}_2$, диффеоморфно $H/\mathbb{Z}_2$ — квадрату канонического комплексного линейного расслоения над пространством флагов в $\mathbb{C}^3$.

Теорема 10. [27] *При $0 \leq \alpha < 1$ каждая риманова метрика из семейства*

$$\bar{g}_\alpha = \frac{r^4(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}dr^2 + \frac{r^8-2\alpha^4(r^4-1)-1}{r^2(r^2-\alpha^2)(r^2+\alpha^2)}\eta_1^2 +$$
$$+r^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + (r^2+\alpha^2)(\eta_4^2+\eta_5^2) +$$
$$+(r^2-\alpha^2)(\eta_6^2+\eta_7^2)$$

является полной гладкой римановой метрикой на $H/\mathbb{Z}_2$ с группой голономии $SU(4)$. При $\alpha = 0$ метрика $\bar{g}_\alpha$ изометрична метрике Калаби [28] с группой голономии $SU(4)$; при $\alpha = 1$ метрика $\bar{g}_\alpha$ изометрична метрике Калаби [28] с группой голономии $Sp(2) \subset SU(4)$ на $T^*\mathbb{C}P^2$.

Отметим, что метрика $\bar{g}_\alpha$ в Теореме 1 при $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ имеет форму, отличную от [28]; метрики Калаби в таком виде исследовались в [25] и [29]. Метрика $\bar{g}_\alpha$ была также найдена в [31] при $M = SU(3)/U(1)_{1,1,-2}$ как частное решение системы уравнений для метрик с группой голономии $Spin(7)$. В [31] метрика $\bar{g}_\alpha$ была обобщена на случай произвольной размерности, кратной четырем.

4.2. Группа голономии G_2

Пусть M — компактное семимерное 3-сасакиево многообразие с характеристическими полями ξ^1, ξ^2, ξ^3 и характеристическими 1-формами η_1, η_2, η_3. Рассмотрим, как описано в параграфе 1.2, главное расслоение $\pi : M \to \mathcal{O}$ со структурной группой $Sp(1)$ либо $SO(3)$ над кватернионно-кэлеровым орбифолдом $\mathcal{O}$, ассоциированным с M. В этом параграфе нас будет интересовать специальный случай, когда $\mathcal{O}$ дополнительно обладает кэлеровой структурой.

Поле ξ^1 порождает локально свободное действие окружности S^1 на M, и метрика на твисторном пространстве $\mathcal{Z} = M/S^1$ является метрикой Кэлера — Эйнштейна. Очевидно, что $\mathcal{Z}$ топологически представляет собой расслоенное пространство над $\mathcal{O}$ со слоем $S^2 = Sp(1)/S^1$ (либо $S^2 = SO(3)/S^1$), ассоциированное с π. Рассмотрим очевидное действие $SO(3)$ на $\mathbb{R}^3$. Двулистное накрытие $Sp(1) \to SO(3)$ задает также действие $Sp(1)$ на $\mathbb{R}^3$. Пусть теперь $\mathcal{N}$ — расслоенное пространство над $\mathcal{O}$, со слоем $\mathbb{R}^3$, ассоциированное с π. Легко видеть, что $\mathcal{O}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве нулевого, а $\mathcal{Z}$ вложено в $\mathcal{N}$ в качестве сферического сечения. Пространство $\mathcal{N}\backslash\mathcal{O}$ диффеоморфно произведению $\mathcal{Z} \times (0, \infty)$. В общей ситуации $\mathcal{N}$ является семимерным орбифолдом, однако, если M — регулярное 3-сасакиево пространство, то $\mathcal{N}$ — семимерное многообразие.

Локально выберем ортонормированную систему $\eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7$, порождающую аннулятор вертикального подрасслоения $\mathcal{V}$, так что

$$\omega_1 = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 - \eta_6 \wedge \eta_7),$$
$$\omega_2 = 2(\eta_4 \wedge \eta_6 - \eta_7 \wedge \eta_5),$$
$$\omega_3 = 2(\eta_4 \wedge \eta_7 - \eta_5 \wedge \eta_6),$$

где формы ω_i отвечают кватернионно-кэлеровой структуре на $\mathcal{O}$. Ясно, что $\eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_7$ является ортонормированным базисом в M, аннулирующим одномерное слоение, порожденное полем ξ^1, поэтому можно рассмотреть метрику на $(0, \infty) \times \mathcal{Z}$ следующего вида:

$$\bar{g} = dt^2 + A(t)^2(\eta_2^2+\eta_3^2) + B(t)^2(\eta_4^2+\eta_5^2) + C(t)^2(\eta_6^2+\eta_7^2), \tag{11}$$

где функции $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ определены на промежутке $(0, \infty)$.

Мы предполагаем, что $\mathcal{O}$ является кэлеровым орбифолдом, поэтому на нем существует замкнутая кэлерова форма, которую можно поднять на $\mathcal{H}$ и получить замкнутую форму ω. Локально, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что

$$\omega = 2(\eta_4 \wedge \eta_5 + \eta_6 \wedge \eta_7).$$

Теперь положим:

$$e^0 = dt,$$
$$e^i = A\eta_i, i = 2, 3,$$
$$e^j = B\eta_j, j = 4, 5,$$
$$e^k = C\eta_k, k = 6, 7,$$

и рассмотрим следующие формы Ψ_1 и Ψ_2:

$$\Psi_1 = -e^{023} - \frac{B^2+C^2}{4}e^0 \wedge \omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^0 \wedge \omega +$$
$$+\frac{BC}{2}e^3 \wedge \omega_2 - \frac{BC}{2}e^2 \wedge \omega_3,$$

$$\Psi_2 = C^2B^2\Omega - \frac{B^2+C^2}{4}e^{23} \wedge \omega_1 - \frac{B^2-C^2}{4}e^{23} \wedge \omega +$$
$$+\frac{BC}{2}e^{02} \wedge \omega_2 + \frac{BC}{2}e^{03} \wedge \omega_3.$$

Очевидно, что формы Ψ_1, Ψ_2 являются глобально определенными и не зависят от локального выбора η_i, при этом локально совпадают с формами Ψ_0 и $*\Psi_0$ (из раздела 2). Таким образом, форма Ψ_1 задает G_2-структуру на $\mathcal{N}$ и однозначно определяет некоторую метрику, которая локально совпадает с (11). В соответствии с предложением 5 параллельность таким образом построенной G_2-структуры равносильна уравнениям замкнутости и козамкнутости (2).

Теорема 11. [32] *Если $\mathcal{O}$ обладает кэлеровой структурой, то метрика (2.19) на $\mathcal{N}$ является гладкой метрикой с группой голономии G_2, заданной формой Ψ_1 тогда и только тогда, когда функции A, B, C, определенные на промежутке*

$[t_0, \infty)$, удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2A^2-B^2-C^2}{BC}, \\ B' &= \frac{B^2-C^2-2A^2}{CA}, \\ C' &= \frac{C^2-2A^2-B^2}{AB} \end{aligned} \tag{12}$$

с начальными условиями

(1) $A(t_0) = 0, |A'_1(t_0)| = 2$;

(2) $B(t_0), C(t_0) \neq 0, B'(t_0) = C'(t_0) = 0$;

(3) функции A, B, C знакоопределены на промежутке (t_0, ∞).

Система (12) имеет единственное решение, удовлетворяющее вышеприведенным условиям регулярности, и это решение отвечает следующей метрике с группой голономии G_2:

$$\bar{g} = \frac{dr^2}{1-\frac{r_0^4}{r^4}} + r^2\left(1-\frac{r_0^4}{r^4}\right)\left(\eta_2^2+\eta_3^2\right) +$$

$$+2r^2\left(\eta_4^2+\eta_5^2+\eta_6^2+\eta_7^2\right). \tag{13}$$

Проинтегрируем систему (12): $(AB)' = -2C$, откуда

$$\frac{(AB)'}{ABC} = -\frac{2}{AB}.$$

Сделаем замену переменной

$$dr = ABCdt,$$

тогда непосредственным интегрированием получаем:

$$A^2B^2 = -4(r-r_3),$$

где r_3 — константа интегрирования. Совершенно аналогично

$$A^2C^2 = -4(r-r_2), B^2C^2 = -8(r-r_1).$$

Таким образом, метрика (11) определена при $r \in (-\infty, \min\{r_1, r_2, r_3\})$. Далее, условия регулярности означают, что $A(t_0) = 0$, т.е. константы r_3 и r_2 равны, причем отвечают при замене переменной константе t_0. Но это значит, что $A^2B^2 = A^2C^2$ при всех r, откуда получаем $B(r) = \pm C(r)$. Непосредственно проверяется, что система (12) инвариантна при замене $C \mapsto -C, t \mapsto -t$, поэтому остается исследовать случай $B = C$.

При $B = C$ система сводится к паре уравнений

$$A' = 2\left(\frac{A^2}{B^2} - 1\right), \; B' = -2\frac{A}{B},$$

решение которой дает метрику (13). Условия регулярности для этой метрики выполнены, и эта гладкая метрика была найдена впервые в [17] для случая $M = SU(3)/S^1$ и $M = S^7$ (отметим, что при $B = C$ не обязательно требовать кэлеровости $\mathcal{O}$). Теорема доказана.

В общем случае $B \neq C$ система (12) также интегрируется [33], однако получающиеся решения не удовлетворяют условиям регулярности.

Литература

[1] Joyce, D. D. *Compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)* / D. D. Joyce // Invent. Math. – 1996. – Vol. 123. – P. 507 – 552.

[2] Joyce, D. *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G2. I* / D. Joyce // J. Differential Geometry. – 1996. – Vol. 43. – P. 291 – 328.

[3] Joyce, D. *Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G2. II* / D. Joyce // J. Differential Geometry. – 1996. – Vol. 43. – P. 329 – 375.

[4] Joyce, D. D. *A new construction of compact 8-manifolds with holonomy Spin(7)* / D. D. Joyce // J. Differential Geom. – 1999. – Vol. 53. – P. 89 – 130.

[5] Kovalev, A. *Twisted connected sums and special Riemannian holonomy* / A. Kovalev // J. reine. angew. Math. – 2003. – Vol. 565. – P. 125 – 160.

[6] Kovalev, A. *Asymptotically cylindrical 7-manifolds of holonomy G2 with applications to compact irreducible G2-manifolds* / A. Kovalev // Ann. Global Anal. Geom. – 2010. – Vol. 38. – P. 221 – 257.

[7] Clancy, R. *New Examples of Compact Manifolds with Holonomy Spin(7)* / Robert Clancy // arXiv:1012.3571v1 [math.DG]

[8] Borel, A. *Groupes d'holonomie des variétés riemanniennes* / A. Borel, A. Lichnerowicz // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1952. – V. 234. P. 1835 – 1837.

[9] Wilking, B. *On compact Riemannian manifolds with noncompact holonomy groups* / B. Wilking // J. Diff. Geom. – 1999. – V. 52, no. 2. – P. 223 – 257.

[10] De Rham, G. *Sur la reductibilité d'un espace de Riemann* / G. De Rham // Comm. Math. Helv. – 1952. – V. 26. – P. 328 – 344.

[11] Ambrose, W. *A Theorem on holonomy* / W. Ambrose, I. M. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1953. – V. 75, no. 3. – P. 428 – 443.

[12] Berger, M. *Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variètès Riemanniennes* / M. Berger // Bull. Soc. Math. France. – 1955. – V. 83. – P. 279 – 330.

[13] Newlander, A. *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds* / A. Newlander, L. Nirenberg // Ann. of Math. – 1957. – Vol. 65. – P. 391 – 404.

[14] Iwamoto, H. *On the structure of Riemannian spaces whose holonomy fix a null system* / H. Iwamoto // Tohoku Math. J. – 1950. – Vol. 1. – P. 109 – 135.

[15] Salamon, S. M. *Quaternionic Käler manifolds* / S. M. Salamon // Inventiones mathematicae. – 1982. – Vol. 67. – P. 143 – 171.

[16] Salamon, S. M. *Quaternion-Käler geometry* / S. M. Salamon // In C. LeBrun and M. Wang, editors, Essays on Einstein manifolds. – Vol. V of Surveys in Differential Geometry. – International Press. – 2000. P. 83 – 122.

[17] Bryant, R. L. *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy* / R. L. Bryant, S. L. Salamon // Duke Math. J. – 1989. – Vol. 58, no. 3. – P. 829 – 850.

[18] Joyce, D. *Compact manifolds with special holonomy* / D. Joyce. – Oxford Science Publications, 2000.

[19] Gray, A. *Weak holonomy groups* / A. Gray // Math. Z. – 1971. – Vol. 123. – P. 290 – 300.

[20] Алексеевский, Д. В. *Римановы многообразия с необычными группами голономии* / Д. В. Алексеевский // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2, № 2. – С. 1 – 10.

[21] Boyer, C. 3-*Sasakian manifolds* / C. Boyer, K. Galicki // Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds. Surv. Differ. Geom. – VI, Int. Press. – Boston: MA, 1999. – P. 123 – 184.

[22] Базайкин, Я. В. *О новых примерах полных некомпактных метрик с группой голономии* $Spin(7)$ / Я. В. Базайкин // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 11–32.

[23] Cvetic, M. *New Complete Non-compact* $Spin(7)$ *Manifolds* / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope // Nucl. Phys. B. – 2002. – Vol. 620, no. 1–2. – P. 29 – 54.

[24] Bérard-Bergery, L. *Sur de nouvelles variétés riemanniennes d'Einstein* / L. Bérard-Bergery // Publications de l'Institut E. Cartan. – 1982. – no. 4 (Nancy). – P. 1 – 60.

[25] Page, D. *Inhomogeneous Einstein metrics on complex line bundles* / D. Page, C. Pope // Classical and Quantum Gravity. – 1987. – Vol. 4. – P. 213 – 225.

[26] Базайкин, Я. В. *Некомпактные римановы пространства с группой голономии* $Spin(7)$ *и* 3-*сасакиевы многообразия* / Я. В. Базайкин // Геометрия, топология и математическая физика. I. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. Труды МИАН. – 2008. – Т. 263. – С. 6 – 17.

[27] Базайкин, Я. В. $Spin(7)$*-структуры на комплексных линейных расслоениях и явные римановы метрики с группой голономии* $SU(4)$ / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Математический сборник. – 2011. – Т. 202, № 4. – С. 3 – 30.

[28] Calabi, E. *Metriques kahleriennes et fibres holomorphes* / E. Calabi // Ann. Ecol. Norm. Sup. – 1979. – Vol. 12. – P. 269 – 294.

[29] Cvetic, M. *Hyper-Kähler Calabi Metrics,* L^2 *Harmonic Forms, Resolved M2-branes, and* AdS_4/CFT_3 *Correspondence* / M. Cvetic, G.W. Gibbons, H. Lu, C.N. Pope // Nucl. Phys. B. – 2001. – Vol 617. – P. 151 – 197.

[30] Kanno, H. *On Spin(7) holonomy metric based on SU(3)/U(1):II* / H. Kanno, Y. Yasui // J. Geom. Phys. – 2002. – Vol. 43. – P. 310 – 326.

[31] Малькович, Е. Г. *О новых явных римановых метриках с группой голономии* $SU(2(n+1))$/ Е. Г. Малькович // Сибирский математический журнал. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 95 -– 99.

[32] Базайкин, Я. В. *Метрики с группой голономии* G_2*, связанные с* 3-*сасакиевым многообразием* / Я. В. Базайкин, Е. Г. Малькович // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 3 – 7.

[33] Cvetic, M. *Cohomogeneity One Manifolds of* $Spin(7)$ *and* $G(2)$ *Holonomy* / M. Cvetic, G. W. Gibbons, H. Lu, C. N. Pope // Phys. Rev. D. – 2002. – Vol. 65, no. 10. – 29 p.