чем многообразий без этих дополнительных структур. А для большинства аналогичных инвариантов соответствующие ТКТП имеют дело с еще более необозримыми множествами объектов. Здесь t-инвариант оказывается интересным как пример, позволяющий входить в тематику ТКТП ценой сравнительно небольших вычислений.

Литература

[1] Turaev, V. G. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols* / V. G. Turaev, O. Y. Viro // Topology. — 1992. – Vol.31. – P. 865 – 902.

[2] Матвеев, С. В. *Построение и свойства t-инварианта* / С. В. Матвеев, М. А. Овчинников, М. В. Соколов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. – Vol.267. – P. 207 – 219.

[3] Morimoto, K. *Some orientable 3-manifolds containing Klein Bottles* / K. Morimoto // Kobe J. Math. — 1985. – Vol.2. – P. 37 – 44.

[4] Овчинников, М. А. *Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена* / М. А. Овчинников // Труды Международной конференции "Маломерная топология и комбинаторная теория групп. Челябинск 1999". – Киев: Институт математики, 2000. – P. 65 – 86.

[5] Ovchinnikov, M. A. *Values of the t-invariant for small Seifert manifolds* / M. A. Ovchinnikov // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Preprint. arXiv:math.GT/0806.2073, свободный.

[6] Овчинников, М. А. *Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем* / М. А. Овчинников // Математические заметки. — 1999. – Vol.66,4. – P. 533 – 540.

УДК 515.162

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ, СКЛЕЕННЫХ ИЗ ДВУХ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА С БАЗОЙ ДИСК И ДВУМЯ ОСОБЫМИ СЛОЯМИ

Е. А. Фоминых

UPPER BOUNDS OF COMPLEXITY FOR GRAPH-MANIFOLDS OBTAINED BY GLUING TOGETHER TWO SEIFERT MANIFOLDS FIBERED OVER THE DISC WITH TWO EXCEPTIONAL FIBERS

E. A. Fominykh

В работе доказана формула, позволяющая вычислять верхние оценки сложности граф-многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.

We prove a formula for an upper bound of complexity of graph-manifolds obtained by gluing together two Seifert manifolds fibered over the disc with two exceptional fibers.

Ключевые слова: трехмерные многообразия, сложность.

Keywords: 3-manifolds, complexity.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Пусть M — компактное трехмерное многообразие. Напомним [1], что подполиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M, если либо $\partial M \neq \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0,1]$, либо $\partial M = \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому шару. Спайн P называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4, называются *истинными вершинами* спайна P. *Сложность* $c(M)$ многообразия M определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

Задача вычисления сложности трехмерных многообразий является весьма трудной. В настоящее время точные значения сложности известны только для табличных многообразий [2] и для нескольких бесконечных серий многообразий [3–7]. Поэтому проблема построения "потенциально точных" верхних оценок сложности довольно актуальна. Важные результаты в этом направлении были получены в работах [8–12]. В данной работе доказана формула, анонсированная в [13], позволяющая вычислять потенциально точные верхние оценки сложности граф-многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.

2. Верхние оценки сложности

Будем говорить, что замкнутое ориентируемое граф-многообразие принадлежит классу Λ тогда и только тогда, когда JSJ-разбиение этого многообразия состоит из двух многообразий Зейферта с базой диск D^2 и двумя особыми слоями каждое. Пусть G — множество всех целочисленных матриц порядка 2 с определителем -1. Многообразия класса Λ удобно задавать *меченными молекулами* вида (M_1, M_2, A), где

$$M_1 = (D^2, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (1, t_1)),$$
$$M_2 = (D^2, (p_3, q_3), (p_4, q_4), (1, t_2)),$$
$$A \in G,$$

(p_i, q_i) — пары взаимно простых целых чисел, $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$. Известно, что меченная молекула (M_1, M_2, A) полностью определяет некоторое многообразие $M \in \Lambda$ следующим образом. Рассмотрим две копии N_1^2, N_2^2 двумерного диска D^2 с двумя удаленными открытыми дисками. Граничные окружности этих поверхностей обозначим через c_1, c_2, c' и c_3, c_4, c'' соотвественно. Ориентируем поверхности N_1^2, N_2^2 и многообразия $N_1^2 \times S^1$, $N_2^2 \times S^1$. На каждом торе $T_i = c_i \times S^1$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, выберем систему координат, состоящую из ориентированных меридиана $\mu_i = c_i \times \{*\}$ и параллели $\lambda_i = \{*\} \times S^1$. Ориентация меридиана индуцирована ориентацией соответствующей ему поверхности N_j^2; параллель ориентируем так, чтобы вместе с внутренней нормалью к тору T_i меридиан и параллель давали выбранную ориентацию многообразия $N_j^2 \times S^1$. Аналогичным образом выберем системы координат μ', λ' и μ'', λ'', соответственно на торе $T' = c' \times S^1$ и торе $T'' = c'' \times S^1$. Наконец, заменим две последние системы координат на системы $\mu'(\lambda')^{t_1}, \lambda'$ и $\mu''(\lambda'')^{t_2}, \lambda''$. Итак, мы задали системы координат на граничных торах многообразий $N_1^2 \times S^1$, $N_2^2 \times S^1$. Дальнейшее построение разбивается на два шага. На первом шаге мы получаем многообразия M_1 и M_2, приклеивая к $N_1^2 \times S^1$ и $N_2^2 \times S^1$ полные торы $V_i = D_i^2 \times S^1$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, по гомеоморфизмам $h_i : \partial V_i \to T_i$, каждый из которых переводит меридиан $\partial D_i^2 \times \{*\}$ полного тора V_i в кривую типа (p_i, q_i). На втором шаге мы получаем многообразие M, склеивая между собой многообразия M_1 и M_2 по гомеоморфизму $\varphi : T' \to T''$, задаваемому матрицей A.

Будем говорить, что меченная молекула (M_1, M_2, A) многообразия класса Λ *приведена*, если $t_1 = t_2 = -1$ и параметры (p_i, q_i) особых слоев удовлетворяют условию $p_i > q_i > 0$, $1 \leqslant i \leqslant 4$.

Известно, что граф-многообразие не меняется при следующих операциях над меченной молекулой:

X_1) перенумерация особых слоев одного атома;

X_2) удаление или вставка неособого слоя атома типа $(1, 0)$;

X_3) замена двух пар параметров (p_i, q_i), (p_j, q_j), $i \neq j$, слоев одного атома на пары $(p_i, q_i + p_i)$, $(p_j, q_j - p_j)$;

X_4) замена матрицы A, отвечающей выходящему из атома ребру, и пары параметров (p_i, q_i) слоя этого же атома на матрицу $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon}$ и пару $(p_i, q_i + \varepsilon p_i)$, где $\varepsilon = \pm 1$;

X_5) замена матрицы A, отвечающей входящему в атом ребру, и пары параметров (p_i, q_i) слоя этого же атома на матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\varepsilon} \cdot A$ и пару $(p_i, q_i + \varepsilon p_i)$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Несложно показать, что операций X_1 – X_5 достаточно для преобразования произвольной меченной молекулы многообразия класса Λ в приведенную молекулу этого же многообразия.

Пусть $S(p, q)$ — сумма всех неполных частных в разложении числа p/q в непрерывную дробь, где p, q — натуральные числа. Каждой матрице $A \in G$ сопоставим число

$$\xi(A) = S(|a| + |b|, |c| + |d|).$$

Следующая теорема представляет основной результат статьи.

Теорема. *Пусть (M_1, M_2, A) — приведенная меченная молекула многообразия $M \in \Lambda$. Тогда*

$$c(M) \leqslant \max\{\xi(A) - 2, 0\} - 2 + \sum_{i=1}^{4} S(p_i, q_i).$$

3. Построение спайнов

3.1. Простые относительные спайны

Тэта-кривой $\theta \subset T$ на двумерном торе T будем называть граф, гомеоморфный окружности с диаметром, дополнение $T \setminus \theta$ к которому есть открытый диск. Обозначим через $\Theta(T)$ множество всех тэта-кривых на T. Хорошо известно, что произвольную тэта-кривую на торе можно преобразовать в любую другую тэта-кривую при помощи изотопии и так называемых *флип-преобразований* (см. рис. 1).

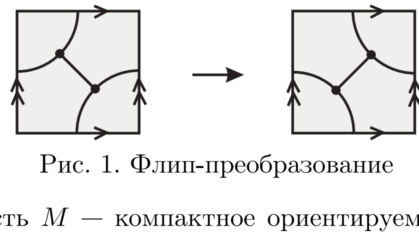


Рис. 1. Флип-преобразование

Пусть M — компактное ориентируемое трехмерное многообразие с фиксированным графом $\Gamma \subset \partial M$. Граф Γ будем называть *узором* на крае многообразия M. Обозначим через $\mathcal{T}$ класс всех таких многообразий (M, Γ), у которых каждая компонента T края ∂M является двумерным тором, а $T \cap \Gamma$ есть тэта-кривая.

Подполиэдр $P \subset M$ называется *относительным спайном* многообразия $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$, если выполнены три условия:

1. $M \setminus P$ есть открытый шар.
2. $\partial M \subset P$.
3. $\partial M \cap Cl(P \setminus \partial M) = \Gamma$.

Относительный спайн P называется *простым*, если линк каждой точки $x \in P$ гомеоморфен либо окружности (такая точка x называется *неособой*), либо окружности с диаметром (такая точка x называется *тройной* точкой), либо графу K_4.

Кратко напомним три примера простых относительных спайнов многообразий класса $\mathcal{T}$, построенных в [14]. Оказывается [15], с их помощью можно построить простой спайн любого замкнутого граф-многообразия.

Пример 1. Пусть V — полноторие с фиксированным меридианом μ. Выберем простую замкнутую кривую ℓ на ∂V, дважды пересекающую μ в одном и том же направлении. Заметим, что ℓ разбивает μ на две дуги. Рассмотрим тэта-кривую $\theta_V \subset \partial V$, состоящую из кривой ℓ и одной из дуг меридиана μ. Тогда многообразие (V, θ_V) имеет простой относительный спайн без внутренних истинных вершин, образованный вложенным в полноторие V листом Мёбиуса и частью меридионального диска, ограниченного меридианом μ (рис. 2a).

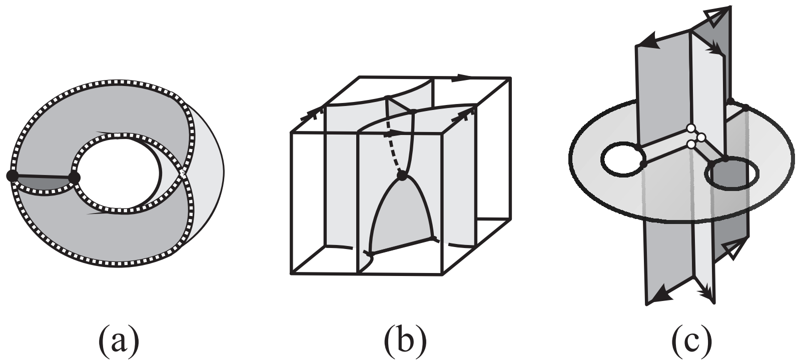
Пример 2. Пусть θ_1, θ_2 — такие тэта-кривые на торе T, что θ_2 получается из θ_1 одним флип-преобразованием. Тогда многообразие

$$(T \times [0,1], (\theta_1 \times \{0\}) \cup (\theta_2 \times \{1\}))$$

имеет простой относительный спайн P с одной внутренней истинной вершиной (на рисунке 2(b) тор T представлен в виде квадрата с отождествленными сторонами). Заметим, что P удовлетворяет следующим условиям:

- для каждого $t \in [0, 1/2)$ тэта-кривая θ_t, где $P \cap (T \times \{t\}) = \theta_t \times \{t\}$, изотопна θ_1;
- для каждого $t \in (1/2, 1]$ тэта-кривая θ_t изотопна θ_2;
- $P \cap (T \times \{1/2\})$ есть букет двух окружностей.

Пример 3. Пусть N^2 — диск с двумя удаленными открытыми дисками. Выберем в N^2 произвольную внутреннюю точку и соединим ее дугой с каждой компонентой края ∂N^2 так, чтобы эти дуги не имели общих внутренних точек. Построенный букет трех отрезков обозначим через Y. В многообразии $N^2 \times S^1$ рассмотрим полиэдр P, являющийся объединением $\partial(N^2 \times S^1)$, $N^2 \times \{*\}$ и $Y \times S^1$. При этом удобно считать, что объединение $(N^2 \times \{*\}) \cup (Y \times S^1)$ получается приклейкой $Y \times [0,1]$ к $N^2 \times \{*\}$ посредством отображения $\phi : (Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\}) \to N^2 \times \{*\}$. К сожалению, полиэдр P не является простым. Это легко исправить, меняя приклеивающее отображение ϕ так, чтобы образы букетов $Y \times \{0\}$ и $Y \times \{1\}$ пересекались в точке, лежащей внутри их ребер (рис. 2(c)). Тогда новый полиэдр P является простым относительным спайном с тремя внутренними истинными вершинами многообразия $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$, где $M = N^2 \times S^1$ и $\Gamma = \partial M \cap Cl(P \setminus \partial M)$.



(a) (b) (c)

Рис. 2. Примеры простых относительных спайнов

3.2. Операция сборки

Пусть (M, Γ) и (M', Γ') — два многообразия из множества $\mathcal{T}$ с непустыми краями и простыми относительными спайнами P и P'. Выберем два тора $T \subseteq \partial M$, $T' \subseteq \partial M'$ и гомеоморфизм $\varphi : T \to T'$, переводящий тэта-кривую $\theta = T \cap \Gamma$ в тэта-кривую $\theta' = T' \cap \Gamma'$. Тогда можно построить новое многообразие $(W, \Delta) \in \mathcal{T}$, где $W = M \cup_\varphi M'$ и $\Delta = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$. Простой относительный спайн многообразия (W, Δ) получается склейкой спайна P со спайном P' при помощи гомеоморфизма φ и удалением из объединения $P \cup_\varphi P'$ открытого диска, являющегося отождествлением диска $T \setminus \theta$ с диском $T' \setminus \theta'$. Будем говорить, что многообразие (W, Δ) получается *сборкой* многообразий (M, Γ) и (M', Γ').

Известно, что операции сборки достаточно для построения простого относительного спайна многообразия (W, Δ) в общем случае, когда тэта-кривые $\varphi(\theta)$ и θ' не изотопны. Введем на множестве $\Theta(T)$ всех тэта-кривых на торе T функцию расстояния d полагая, что для данных тэта-кривых $\theta, \theta' \in \Theta(T)$ число $d(\theta, \theta')$ равно наименьшему числу флип-преобразований необходимых для перехода от θ к θ'.

Лемма 1 [11, лемма 6]. *Пусть (M, Γ) и (M', Γ') — два многообразия из множества $\mathcal{T}$ с непустыми краями, имеющие простые относительные спайны с v и v' внутренними истинными вершинами. Пусть $\varphi : T \to T'$ — такой гомеоморфизм тора $T \subseteq \partial M$ на тор $T' \subseteq \partial M'$, что тэта-кривые $\varphi(\theta)$ и θ', где $\theta = T \cap \Gamma$ и $\theta' = T' \cap \Gamma'$, не изотопны. Тогда многообразие (W, Δ), где $W = M \cup_\varphi M'$ и $\Delta = (\Gamma \setminus \theta) \cup (\Gamma' \setminus \theta')$, имеет простой относительный спайн с $v + v' + d(\varphi(\theta), \theta')$ внутренними истинными вершинами.*

4. Вычисление расстояний между тэта-кривыми

Для вычисления расстояния d между тэта-кривыми на торе мы будем использовать классическую идеальную триангуляцию Фарея $\mathbb{F}$ гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$. В качестве модели плоскости $\mathbb{H}^2$ рассмотрим верхнюю полуплоскость комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ограниченную абсолютом $\partial\mathbb{H}^2 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Множество вершин триангуляции $\mathbb{F}$ состоит из точек $\mathbb{Q} \cup \{1/0\} \subset \partial\mathbb{H}^2$, где $1/0 = \infty$. При этом две вершины $a/c, b/d$ соединены ребром (геодезической в $\mathbb{H}^2$) тогда и только тогда, когда $ad - bc = \pm 1$. Для удобства изображения на рисунке 3 приведен образ гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ и триангуляции $\mathbb{F}$ при отображении $z \to (z - i)/(z + i)$.

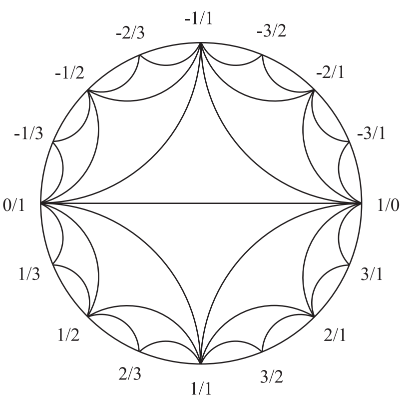


Рис. 3. Идеальная триангуляция гиперболической плоскости

Построим отображение $\Psi_{\mu,\lambda}$ множества $\Theta(T)$ на множество всех треугольников триангуляции $\mathbb{F}$, зависящее только от выбора системы координат μ, λ на двумерном торе T. Для этого рассмотрим отображение $\psi_{\mu,\lambda}$, которое каждой нетривиальной простой замкнутой кривой $\mu^\alpha \lambda^\beta$ на T сопоставляет точку $\alpha/\beta \in \partial\mathbb{H}^2$ (ориентация кривой не важна). Заметим, что любая тэта-кривая θ на T содержит три нетривиальные простые замкнутые кривые ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3, каждая из которых состоит из двух ребер тэта-кривой θ. Так как индекс пересечения любых двух кривых ℓ_i, ℓ_j, $i \neq j$, равен ± 1, то точки $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_1)$, $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_2)$, $\psi_{\mu,\lambda}(\ell_3)$ являются вершинами некоторого треугольника σ триангуляции Фарея. Итак, мы полагаем $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta) = \sigma$.

Определим расстояние между треугольниками триангуляции Фарея как число ребер единственного простого пути в двойственном графе Σ триангуляции, соединяющего вершины, лежащие в данных треугольниках (путь единственный, поскольку Σ есть дерево). Ключевое для конкретных вычислений наблюдение заключается в том, что при любом выборе системы координат на торе расстояние между тэта-кривыми совпадает с расстоянием между соответствующими им треугольниками из $\mathbb{F}$. Это следует из того, что если тэта-кривая θ' получается из тэта-кривой θ одним флип-преобразованием, то соответствующие им треугольники имеют общее ребро.

Приведем два примера вычисления расстояний между треугольниками триангуляции Фарея. Обозначим через $\sigma(\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3)$ треугольник с вершинами $\alpha_1/\beta_1, \alpha_2/\beta_2, \alpha_3/\beta_3$, через $\sigma(\alpha/\beta)$ — ближайший к $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ треугольник среди всех треугольников, имеющих вершину в точке α/β.

Лемма 2 [11, лемма 2]. *Для любого положительного рационального числа p/q расстояние между треугольником $\sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ и треугольником $\sigma(p/q)$ равно $S(p, q) - 1$, где $S(p, q)$ — сумма всех неполных частных в разложении числа p/q в непрерывную дробь.*

Рассмотрим второй пример. Сопоставим каждой целочисленной матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с определителем ± 1 ребро e_A триангуляции Фарея с вершинами a/c и b/d. Обозначим через σ_A^+ и σ_A^- примыкающие к ребру e_A треугольники

$\sigma(a/c, b/d, (a+b)/(c+d)$ и $\sigma(a/c, b/d, (a-b)/(c-d)$. Аналогично, единичная матрица E определяет треугольники $\sigma_E^+ = \sigma(0/1, 1/0, 1/1)$ и $\sigma_E^- = \sigma(0/1, 1/0, -1/1)$. В следующей лемме мы предъявляем явную формулу для нахождения наименьшего расстояния между парами треугольников (σ_E^+, σ_E^-) и (σ_A^+, σ_A^-).

Лемма 3 [11, лемма 3 (i)].

$$\min_{\rho,\eta\in\{+,-\}} d(\sigma_E^\rho, \sigma_A^\eta) = \max(\xi(A) - 2, 0)$$

.

5. Доказательство Теоремы

Пусть (M_1, M_2, A) — приведенная меченная молекула многообразия $M \in \Lambda$. Для упрощения доказательства теоремы выделим наиболее существенные моменты в отдельные утверждения.

В параграфе 2 мы построили многообразия $N_1^2 \times S^1$, $N_2^2 \times S^1$, все компоненты края которых снабжены системами координат. Склеим эти многообразия по гомеоморфизму $\varphi : T' \to T''$, задаваемому матрицей A. Полученное многообразие обозначим через M_0.

Зададим узор Γ_0 на крае многообразия M_0. Для этого мы введем понятие базовой тэта-кривой. Пусть T — тор с фиксированной системой координат μ, λ. Тэта-кривая θ на торе T называется *базовой*, если кривые μ и λ изотопны кривым, содержащимся в θ. С точностью до изотопии существует ровно две базовые тэта-кривые: положительная и отрицательная. Базовую тэта-кривую будем называть *положительной* и обозначать θ^+, если $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^+) = \sigma_E^+$. Аналогично, базовая тэта-кривая θ^- называется *отрицательной*, если $\Psi_{\mu,\lambda}(\theta^-) = \sigma_E^-$. В качестве узора Γ_0 выберем объединение четырех положительных базовых тэта-кривых $\theta_i^+ \subset T_i$, $1 \leqslant i \leqslant 4$, на крае многообразия M_0.

Предложение 1. *Описанное выше многообразие* (M_0, Γ_0) *имеет простой относительный спайн с* $\max(\xi(A) - 2, 0) + 6$ *внутренними истинными вершинами.*

Доказательство. На каждом из граничных торов T', T'' зададим узор, являющийся базовой тэта-кривой. Тип (положительный или отрицательный) базовых тэта-кривых $\theta' \subset T'$, $\theta'' \subset T''$ выбирается так, чтобы число $d(\varphi(\theta'), \theta'')$ было наименьшим из возможных. Из леммы 3 следует, что $d(\varphi(\theta'), \theta'') = \max(\xi(A) - 2, 0)$. Нам осталось показать, что каждое из многообразий $(N_1^2 \times S^1, \theta_1^+ \cup \theta_2^+ \cup \theta')$, $(N_2^2 \times S^1, \theta_3^+ \cup \theta_4^+ \cup \theta'')$ имеет простой относительный спайн с 3 внутренними истинными вершинами. Достаточно рассмотреть первое многообразие.

Напомним, что на каждом торе T_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$, выбрана система координат μ_i, λ_i, тогда как на торе T' выбрана система координат $\mu'(\lambda')^{-1}, \lambda'$. Если вернуться к первоначальной системе координат μ', λ' тора T', то пользуясь методом примера 3 можно построить два простых относительных спайна многообразия $N_1^2 \times S^1$, которые индуцируют узоры на $\partial(N_1^2 \times S^1)$, состоящие либо из двух положительных и одной отрицательной, либо из одной положительной и двух отрицательных базовых тэта-кривых. Можно считать, что на торе T' эти спайны индуцируют отрицательные базовые тэта-кривые. Поэтому в системе координат $\mu'(\lambda')^{-1}, \lambda'$ на торе T' эти же спайны индуцируют узоры на $\partial(N_1^2 \times S^1)$, состоящие либо из трех положительных, либо из двух положительных и одной отрицательной базовых тэта-кривых $\theta_1^+, \theta_2^+, \theta'$.

Предложение 2 [11, предложение 2]. *Пусть* T *— компонента края многообразия* $(M, \Gamma) \in \mathcal{T}$ *с фиксированной системой координат. При этом* $T \cap \Gamma$ *есть положительная базовая тэта-кривая на* T. *Предположим, что многообразие* (M, Γ) *имеет простой относительный спайн с* v *внутренними истинными вершинами. Тогда многообразие* (W, Δ)*, получающееся заклейкой компоненты* T *края* ∂M *полноторием с параметрами* (p, q)*, где* $p > 0, q > 0$ *и* $\Delta = \Gamma \setminus (T \cap \Gamma)$*, имеет простой относительный спайн с* $S(p, q) - 2 + v$ *внутренними истинными вершинами.*

Доказательство Теоремы. Последовательно применяя предложения 1 и 2 мы построим простой спайн многообразия M с $\max\{\xi(A) - 2, 0\} - 2 + \sum_{i=1}^{4} S(p_i, q_i)$ внутренними истинными вершинами.

Литература

[1] Матвеев, С. В. *Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий* / С. В. Матвеев. – М.: МЦНМО, 2007 – 456 с.

[2] Matveev, S. *Atlas of 3-manifolds* / S. Matveev, E. Fominykh, V. Tarkaev // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.matlas.math.csu.ru, свободный.

[3] Frigerio, R. *Complexity and Heeagaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds* / R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio // Pacific J. Math. – 2003. – Vol. 210. – P. 283 – 297.

[4] Anisov, S. *Complexity and Heeagaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds* / S. Anisov // Mosc. Math. J. – 2005. – Vol. 5, no. 2. – P. 305 – 310.

[5] Jaco, W. *Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces* / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2, no. 1. – P. 157 – 180.

[6] Jaco, W. *Coverings and minimal triangulations of 3–manifolds* / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // Algebraic & Geometric

Topology. – 2011. – Vol. 11, no. 3. – P. 1257 – 1265.

[7] Веснин, А. Ю. *Точные значения сложности многообразий Паолюци – Циммермана* / А. Ю. Веснин, Е. А. Фоминых // Докл. Акад. наук – 2011. – Том 439, No. 6. – С. 727 – 729.

[8] Martelli, B. *Complexity of geometric 3-manifolds* / B. Martelli, C. Petronio // Geom. Dedicata. – 2004. – Vol. 108. – P. 15 – 69.

[9] Веснин, А. Ю. *Двусторонние оценки сложности многообразий Лёбелля* / А. Ю. Веснин, С. В. Матвеев, К. Петронио // Докл. Акад. наук – 2007. – Том 416, No. 3. – С. 295 – 297.

[10] Matveev, S. *Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds* / S. Matveev, C. Petronio, A. Vesnin // J. Australian Math. Soc. – 2009. – Vol. 86, no. 2. – P. 205 – 219.

[11] Фоминых, Е. А. *Верхние оценки сложности для бесконечной серии граф-многообразий* / Е. А. Фоминых // Сиб. электр. мат. изв. – 2008. – Том 5. – С. 215 – 228.

[12] Фоминых, Е. А. *Хирургии Дена на узле восьмерка: верхняя оценка сложности* / Е. А. Фоминых // Сиб. мат. жур. – 2011. – Том 52, No. 3. – С. 680 – 689.

[13] Fominykh, E. *On the complexity of graph-manifolds* / E. Fominykh, M. Ovchinnikov // Сиб. электр. мат. изв. – 2005. – Том 2. – С. 190 – 191.

[14] Овчинников, М. А. *Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем* / М. А. Овчинников // Мат. заметки. – 1999. – Том 66, No. 4. – С. 533 – 539.

[15] Овчинников, М. А. *Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена* / М. А. Овчинников // Сб. трудов Межд. конф. "Маломерная топология и комбинаторная теория групп".– Киев: Институт математики НАН Украины, 2000. – С. 65 – 86.