УДК 513.83

ЗНАЧЕНИЯ t-ИНВАРИАНТА ДЛЯ САПФИРОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

М. А. Овчинников

VALUES OF THE t-INVARIANT FOR THE SAPPHIRE MANIFOLDS

M. A. Ovchinnikov

t-Инвариант трехмерных многообразий – это в некотором смысле существенная часть инварианта Тураева-Виро, соответствующего корню 5-й степени из 1. В работе получена формула для вычисления значений t-инварианта многообразий, образованных из двух ориентируемых утолщенных бутылок Клейна отождествлением их торических краев. Формула имеет вид функции от 4 целых чисел – элементов матрицы, задающей отождествление торов.

The t-invariant of 3-manifolds is an essential part of the Turaev-Viro invariant corresponding to the 5-th root of unity. Sapphire manifolds are result of pasting two orientable thickened Klein bottles along their boundaries. The manifold is defined by a 2×2 matrix of the pasting. A formula for values of the t-invariant is given in the work. The formula is a function on the matrix four elements.

Ключевые слова: трехмерные многообразия, квантовые инварианты, инварианты Тураева-Виро.

Keywords: 3-manifolds, quantum invariants, Turaev-Viro invariants.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Двумерный полиэдр P, лежащий в компактном трехмерном многообразии M, называется *спайном* многообразия M, если дополнение к полиэдру в многообразии является прямым произведением края многообразия на полуинтервал или открытым трехмерным шаром. Двумерный полиэдрназывется *простым*, если каждая его точка имеет линк вида окружность, либо окружность с диаметром, либо окружность с 3 радиусами. Точки последнего типа называются *вершинами полиэдра*. Спайн *простой*, если он является простым полиэдром. Множество всех простых подполиэдров полиэдра P, включая сам полиэдр P и пустое подмножество, обозначаем $\mathcal{S}(P)$.

t-инвариант 3-многообразия M определяется формулой ([2]):

$$t(M) = \sum_{Q \in \mathcal{S}(P)} (-\varepsilon)^{-v(Q)} \varepsilon^{\chi(Q)},$$

где P – произвольный фиксированный простой спайн многообразия M, $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v(Q)$ – число вершин полиэдра Q, а $\chi(Q)$ – эйлерова характеристика полиэдра Q.

Свойство инвариантности состоит в том, что значение, даваемое этой формулой, не зависит от выбора простого спайна данного многообразия ([2]).

Известна формула для линзовых пространств ([2]):

$$t(L_{p,q}) = \begin{cases} 1, & p = \pm 1 \mod 5 \\ \varepsilon + 1, & p = \pm 2 \mod 5 \\ \varepsilon + 2, & p = 0 \mod 5, q = \pm 1 \mod 5 \\ 0, & p = 0 \mod 5, q = \pm 2 \mod 5 \end{cases}$$

Эта формула показывает, что зависимость значения t-инварианта от параметров линзы весьма простая. В то же время эта формула дает некоторую дополнительную информацию по сравнению с первой группой гомологий линзы. В данной работе выводится формула для нахождения значений t-инварианта для многообразий, полученных склейкой двух экземпляров ориентируемого косого произведения бутылки Клейна на отрезок $K \tilde{\times} I$. Такие многообразия исследовались в [3]. В этой работе они назывались сапфировыми многообразиями.

Край многообразия $K \tilde{\times} I$ является тором. Поскольку отождествление торов задается целочисленной матрицей порядка два, то четыре целых числа – элементы невырожденной матрицы порядка два – можно рассматривать как параметры для этой серии многообразий. Для определенности необходимо выбрать координаты на торических краях склеиваемых многобазий.

Фиксируем координаты в крае многообразия $K \tilde{\times} I$ следующим образом. Первая координатная кривая на торическом крае проектируется в кривую на бутылке Клейна, разрезающую ее до кольца. Образ второй кривой разрезает бутылку на две ленты Мебиуса.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ – невырожденная целочисленная матрица, и s_1, s_2, s'_1, s'_2 – координатные окружности на двух торах. Тогда равенства $s_1 = as'_1 + cs'_2$, $s_2 = bs'_1 + ds'_2$ определяют отождествление данных торов посредством матрицы A.

Теорема 1. *Пусть M_A обозначает результат склейки двух экземпляров многообразия $K \tilde{\times} I$ посредством матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*

Тогда значение t-инварианта многообразия M_A равно линейной комбинации значений t-инварианта нескольких линз, определяемых матрицей A:

$$t(M_A) = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{10} k_i t(L_{p_i,q_i}),$$

где 10 троек чисел (k_i, p_i, q_i) – это $(4, b, a)$, $(2, a - b, b)$, $(2, b+d, a+c)$, $(2, 2b+d, 2a+c)$, $(2, a-2b, b)$, $(1, a+c-b-d, b+d)$, $(1, a+c-2b-2d, b+d)$, $(1, 2a+c-2b-d, 2b+d)$, $(1, 2a+c-4b-2d, 2b+d)$, $(-10, 2, 1)$.

Выражение t-инварианта для этих многообразий через значения инварианта некоторых линз оказалось экономнее, чем формула, дающая зависимость значения инварианта непосредственно через значения параметров a, b, c, d – непосредственная формула получается весьма сложной и громоздкой.

Перебор случаев показал, что формула дает 22 различных значений t-инварианта.

2. Идея доказательства

Мы используем некоторое свойство t-инварианта, которое позволяет значение инварианта представить как произведение матриц, вычисляемых по кускам, из которых спайн определенным образом склеен. Если речь идет об одном многообразии (спайне), то такой путь не выглядит сколько-нибудь экономным. Другое дело, если исследовать значения инварианта для бесконечной серии многообразий, которые получаются различными склейками одних и тех же многообразий с краем (полиэдров). На этом пути быстро обнаруживаются возможности для получения формул для бесконечных серий многообразий.

3. Элементарные полиэдры и построение спайнов из них

Опишем нужный нам полиэдр, лежащий в $K\tilde{\times}I$. Это – бутылка Клейна K, к которой приклеено своим основанием прямое произведение $\theta \times I$ тэта-кривой (тэта-кривая – это граф с двумя вершинами и соединяющими их тремя ребрами) на отрезок. Два ребра из трех ребер основания составляют окружность, разрезающую бутылку Клейна на две ленты Мебиуса. Третье ребро основания приклеено вдоль пути с концами на этой окружности и пересекающей окружность еще в одной точке, так что полученный граф разбивает бутылку Клейна на два пятиугольника. Обозначим этот полиэдр буквой N (от слова neighbourhood – окрестность, т. к. N – это замкнутая окрестность бутылки Клейна в полиэдре). Полиэдр N лежит в $K\tilde{\times}I$ собственным образом, т. е. второй край прямого произведения $\theta \times I$ лежит в крае $K\tilde{\times}I$. Дополнение к бутылке Клейна в многообразии $K\tilde{\times}I$ – прямое произведение тора на полуинтервал. Разрезание тора края по тэта-кривой дает шестиугольник, значит дополнение к полиэдру N в многообразии $\mathrm{Int}K\tilde{\times}I$ является открытым трехмерным шаром, примыкающим к открытому диску в крае, дополнительному к тэта-кривой.

Для обеспечения различных склеек двух экземпляров полиэдра N мы используем полиэдры-связки. Полиэдр J – это проективная плоскость с двумя дырами, к которой приклеены два полукруга своими диаметрами вдоль собственных неразбивающих дуг, пересекающихся в одной точке и имеющих концы на крае одной – своей для каждой дуги – дыры. Заметим, что двулистное накрытие проективной плоскости с двумя дырами является сферой с 4 дырами. Наши две дуги – это образы двух дуг на сфере, которые соединяют по две дыры на сфере и тем самым превращают ее в кольцо. Полудиски полиэдра J индуцируют по два полудиска, примыкающих к краям указанного кольца и оставляющих его кольцом. Приклеивая по итоговому кольцу полный цилиндр своей боковой поверхностью, получаем описание вложения полиэдра J в утолщенный тор $T^2 \times I$.

Для описания склеек нумеруем ребра на краях полиэдров цифрами 1, 2, 3. Фиксируем следующий выбор нумерации. У полиэдра N номер 1 – у ребра, противоположному "пути". Номер 2 – у ребра, противоположного той части "окружности", которая пересекается с "путем". Номер 3 – у ребра, противоположного той части "окружности", которая с "путем" не пересекается. У полиэдра J край состоит из двух тэта-кривых. В каждой тэта-кривой края номера 1 и 2 – у ребер, составляющих край дыры, причем ребра с номером 1 разных тэта-кривых входят в край одного из двух многоугольников, на которые проективная плоскость с двумя дырами разбивается диаметрами полукругов. Край второго многоугольника содержит ребра с номером 2. Края полукругов содержат ребра с номером 3.

Еще два элементарных полиэдра – это полиэдры вида $\theta \times I$, которые склеены из трех прямоугольников, со специальной нумерацией ребер краев. Первый такой полиэдр мы будем обозначать (23). В его краях два ребра с номером 1 входят в край одного прямоугольника, а два ребра с номером 2 (как и 3) входят в края разных прямоугольников. Аналогично определяется полиэдр (13). Очевидно, последовательно склеивая копии полиэдров (23) и (13) можно получить полиэдр вида $\theta \times I$, у которого разметка ребер соответствует любой наперед заданной перестановке из трех элементов.

Для полноты охвата возможностей следовало бы задать и разметку (нумерацию) вершин тэта-кривых, т. е. ориентацию ребер тэта-кривых. Но из-за симметрий элементарных полиэдров и тех полиэдров, которые мы из них строим, варьирование ориентаций ребер в склейках не меняет результат склеек.

Оказывается, любое сапфирово многообразие можно склеить из двух экземпляров многообразия $K\tilde{\times}I$ с полиэдром N внутри и нескольких подходящих утолщенных торов с полиэдрами J, (23) и (13) внутри с совмещением тэта-кривых краев полиэдров. При этом полиэдры склеиваются в простой полиэдр. Дополнительные шары к полиэдрам в склеиваемых многообразиям последовательно склеиваются по открытым дискам в открытый трехмерный шар – дополнение к суммарному простому полиэдру. Значит, полученный простой полиэдр является простым спайном сапфирова многообразия.

В ходе доказательства теоремы используется элементарный полиэдр E, который представляет собой ленту Мебиуса, к которой по неразбивающему собственному отрезку приклеен полукруг своим диаметром. Ребра, составляющие край ленты Мебиуса, имеют номера 1 и 2. Ребро края, принадлежащее полукругу, имеет номер 3.

4. t-инвариант для полиэдров с краем

Двумерный полиэдр называется *простым с краем*, если каждая его точка имеет линк вида окружность, либо окружность с диаметром, либо окружность с 3 радиусами, либо интервал, либо три интервала с общим концом. Множество точек последних двух типов называется *краем полиэдра* P и обозначается ∂P.

Граф называем *простым*, если он имеет вершины только степени три. Пустое множество также считаем простым графом. Очевидно, край простого полиэдра с краем (который может отсутствовать) является простым графом. Множество всех простых подпграфов графа G, включая сам граф G и пустое подмножество, обозначаем $\mathcal{S}(G)$. Множество простых подполиэдров с краем в полиэдре с краем P

Пусть P – произвольный простой полиэдр с краем, граф $\mathcal{S}(\partial P)$. Множество простых подполиэдров с краем в полиэдре с краем P с выделенным в его крае простым графом G таких, что край простого подполиэдра совпадает с графом G, обозначается $\mathcal{S}(\partial P, G)$.Тогда паре полиэдр и граф в его крае соответствует значение t-инварианта согласно формуле:

$$t(P,G) = \sum_{Q\in\mathcal{S}(\partial P)} (-\varepsilon)^{-v(Q)}\varepsilon^{\chi(\mathrm{IntQ})+\frac{1}{2}\chi(\partial\mathrm{Q})},$$

где $\varepsilon = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $v(Q)$ – число вершин полиэдра Q, $\chi(Q)$ – эйлерова характеристика полиэдра Q.

Мы используем то же название инварианта, поскольку в случае пустого края значение этого инварианта совпадает со значением t-инварианта, определенного во введении, т. е. $t(P,\emptyset) = t(P)$, если $\partial P = \emptyset$.

5. Матрицы значений t-инварианта для элементарных полиэдров

Для тэта-кривой θ множество простых подграфов $\mathcal{S}(\theta)$ насчитывает 5 элементов: пустой, сам граф, три подграфа, гомеоморфных окружности. Матрица из значений t-инварианта полиэдра с краем тэта-кривая зависит от порядка, выбранного в множестве $\mathcal{S}(\theta)$. Используя пронумерованность ребер тэта-кривой, фиксируем следуюший порядок в этом множестве: $\emptyset$, $\theta\backslash\{1\}$, $\theta\backslash\{2\}$, $\theta\backslash\{3\}$, θ.

Простейшим из элементарных полиэдров с одной тэта-кривой на краю является полиэдр E. По определению, вычисления для него оказываются самыми минимальными:

$$t(E) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}^T.$$

Полиэдр N тоже имеет одну тэта-кривую на краю. Для него уже вычисления несколько больше, но совсем незначительно:

$$t(N) = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-\frac{5}{2}}\end{pmatrix}^T.$$

Если полиэдр имеет край, состоящий из двух тэта-кривых, то его значения t-инварианта составляют уже квадратную матрицу размера 5×5. Особенно простыми получатся матрицы для элементарных полиэдров (23) и (13).

$$t(23) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$t(13) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Чуть посложнее получается матрица для полиэдра J.

$$t(J) = \begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\varepsilon^{-1}&\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\\0&0&0&\varepsilon^{-\frac{1}{2}}&-\varepsilon^{-1}\end{pmatrix}.$$

6. Реализация автоморфизмов тора с помощью элементарных полиэдров

В [6] показано, что элементарные полиэдры (23), (13) и J с пронумерованными ребрами определяют автоморфизмы тора, соответствующие матрицам соответственно:

$$\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1&-1\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

Любую невырожденную матрицу порядка два можно выразить через эти три матрицы и тем самым найти последовательную склейку элементарных полиэдров, реализующую автоморфизм тора, описываемый заданной матрицей склейки.

Матрица t-инвариантов для найденной последовательной склейки элементарных полиэдров равна произведению их матриц t-инвариантов. В [5] показано, что матрицы t-инвариантов элементарных полиэдров порождают конечную группу матриц из 120 элементов. Этот факт сразу влечет, что число различных значений t-инварианта для многообразий, получаемых из двух многообразий отождествлением по одному тору в крае, не более 120.

В [5] также показано, что домножение вектора $t(E)$ на эти 120 матриц дает всего 12 различных векторов, которые в [5] приведены. А различных скалярных произведений между этими 12 векторами всего четыре. Геометрически этим скалярным произведениям соответствуют склейки двух экземпляров полиэдра E и нескольких элементарных полиэдров вида (23), (13) и J. Нетрудно убедиться, что любой такой полиэдр является простым спайном линзы, и для любой линзы такой спайн можно построить. На этом пути получается формула для t-инвариантов линз.

7. Уточнение координат и модификация полиэдра N

Правило для превращения тэта-кривой с пронумерованными ребрами в букет координатных окружностей: ребра 1 и 2 ориентировать так, чтобы они имели общее начало, и затем ребро 3 стянуть в точку.

Оказывается, край полиэдра N дает первую кривую с лишней скруткой вдоль второй кривой. Для избежания этого эффекта модифицируем полиэдр N следующим образом. Приклеим к краю N последовательно элементарные полиэдры (23) и J. Полученный полиэдр обозначим N_1. Его t-инарианты легко вычисляются умножением матриц.

$$t(N_1) = t(J)t(23)t(N) = \\ = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -\varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & 2\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}^T .$$

Отметим, что полиэдр N_1 также лежит внутри $K\tilde{\times}I$ собственным образом.

8. Доказательство теоремы

Приведем из [5] все те 12 векторов, которые являются векторами t-инвариантов для всевозможных полиэдров E с несколькими приклеенными элементарными полиэдрами вида (23),(13) и J. Несложноми вычислениями легко убедиться, что умножение этих векторов на матрицы $t(23)$, $t(13)$, $t(J)$ дает опять эти векторы.

$$\begin{pmatrix} 1\\0\\0\\\varepsilon\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\\varepsilon\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\\varepsilon\\0\\0\\0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\\varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\\varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\1\\\varepsilon^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\1\\-\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\1\\-\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\0\\-\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1\\1\\-\varepsilon^{-1}\\1\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-\varepsilon^{-1}\\1\\1\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\-\varepsilon^{-1}\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы имеют естественную характеристику в виде пары чисел – коэффициенты выражения координатных петель через ось полнотория (ленты Мебиуса в полиэдре E) как гомологических циклов по модулю 5. Эти числа будем называть *параметрами* векторов. Векторы имеют следующие параметры, соответственно: $\pm(1,1)$, $\pm(0,1)$, $\pm(1,0)$, $\pm(2,1)$, $\pm(1,2)$, $\pm(1,-1)$, $\pm(2,-1)$, $\pm(1,-2)$, $\pm(2,-2)$, $\pm(0,2)$, $\pm(2,0)$, $\pm(2,2)$. Неоднозначность знаков освязана с тем, что ориентация осевой окружности не фиксирована. Векторы будем обозначать $V_{a,b}$, где a, b – параметры вектора с точностью до одновременной смены знаков.

Ниже мы воспользуемся следующим фактом о линзах. Пусть на краях двух полных торов выбраны букеты координатных окружностей. Склейка полных торов полностью определяется совмещением координатных окружностей. Если известны выражения координатных окружностей через оси полных торов как гомологических циклов, то как определить параметры линзы ? Параметр p равен определителю матрицы из упомянутых степеней. А для параметра q укажем алгоритм нахождения. Если степени относительно одного полнотория записаны в строку, то применяем сложение-вычитание столбцов. Так как степени необходимо взаимно просты, то можно добиться в – допустим, верхней – строке чисел 1, 0. Тогда число под единицей – искомое q (а под нулем – определитель p).

Склейка любой пары таких полиэдров является спайном какой-то линзы. А скалярное произведение соответствующих векторов является значением t-инварианта этой линзы. (На этом пути выводится формула для t-инвариантов линз.)

Представим вектор $t(N_1)$ как линейную комбинацию трех векторов, соответствующих параметрам (1,0), (1,1) и (2,1), и еще некоторого вектора.

$$t(N_1)=\begin{pmatrix}2\\3\\-\varepsilon^{-1}\\\varepsilon^{-2}\\2\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}=-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\\varepsilon^{-\frac{3}{2}}\end{pmatrix}+$$
$$+\varepsilon(2\begin{pmatrix}1\\\varepsilon\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\varepsilon\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\\varepsilon^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}).$$

Слагаемые в этом разложении замечательно ведут себя при умножении на матрицы $t(23)$, $t(13)$, $t(J)$. Первое слагаемое не меняется, а остальные превращаются в какие-то из 12 векторов. Отсюда следует возможность получить искомое значение t-инварианта как линейную комбинацию t-инвариантов некоторых линз и некоторого добавка. Остается проследить за результатом этого подхода.

Обозначая вектор в первом слагаемом V_0, найденное разложение запишем кратко:

$$t(N_1)=-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})V_0+\varepsilon(2V_{1,0}+V_{1,1}+V_{2,1}).$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в выполнении следущих свойств:

$t(J)V_{a,b}=V_{a,-b}$,
$t(23)V_{a,b}=V_{a-b,-b}$,
$t(J)t(23)V_{a,b}=V_{a-b,b}$,
$t(23)t(J)V_{a,b}=V_{a+b,b}$,
$t(13)V_{a,b}=V_{-a,-a+b}$,
$t(J)t(13)V_{a,b}=V_{-a,a-b}$,
$t(13)t(J)V_{a,b}=V_{-a,-a-b}=V_{a,a+b}$.

Отсюда следует, что если размеченный полиэдр Q_A, склеенный из элементарных полиэдров, реализует матрицу A, то $t(Q_A)V_{a,b}=V_{(a,b)A^{-1}}$.

В силу симметрии A и A^{-1} дают одно и то же сапфировое многообразие. Это мы тоже используем. Пусть $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$. Тогда

$$t(N_1)^Tt(Q_A)t(N_1)=(-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})V_0+2\varepsilon(V_{1,0}+V_{1,1}+V_{2,1})^T$$

$$(-(\varepsilon+\varepsilon^{-1})V_0+2\varepsilon(V_{a,b}+V_{a+c,b+d}+V_{2a+c,2b+d})=...$$

Учитывая, что $(\varepsilon+\varepsilon^{-1})^2=5$, $V_0V_{u,v}=2+\varepsilon=\varepsilon\sqrt{5}$, и алгоритм определения параметров линзы, продолжаем выкладки.

$$\begin{aligned}...&=-10\varepsilon^4+\varepsilon^2(2V_{1,0}+V_{1,1}+V_{2,1})^T(2V_{a,b}+V_{a+c,b+d}+V_{2a+c,2b+d})=\\
&=-10\varepsilon^4+\varepsilon^2(4V_{1,0}^TV_{a,b}+2V_{1,0}^TV_{a+c,b+d}+2V_{1,0}^TV_{2a+c,2b+d}+2V_{1,1}^TV_{a,b}+\\
&+V_{1,1}^TV_{a+c,b+d}+V_{1,1}^TV_{2a+c,2b+d}+2V_{2,1}^TV_{a,b}+V_{2,1}^TV_{a+c,b+d}+V_{2,1}^TV_{2a+c,2b+d})=\\
&=-10\varepsilon^4+\varepsilon^2(4t(L_{b,a})+2t(L_{b+d,a+c})+2t(L_{2b+d,2a+c})+2t(L_{a-b,b})+\\
&+t(L_{a-b+c-d,b+d})+t(L_{2a-2b+c-d,2b+d})+2t(L_{a-2b,b})+t(L_{a-2b+c-2d,b+d})+t(L_{2a-4b+c-2d,2b+d}))=\\
&=\varepsilon^2(-10t(L_{2,1})+4t(L_{b,a})+2t(L_{b+d,a+c})+2t(L_{2b+d,2a+c})+2t(L_{a-b,b})+\\
&+t(L_{a-b+c-d,b+d})+t(L_{2a-2b+c-d,2b+d})+2t(L_{a-2b,b})+t(L_{a-2b+c-2d,b+d})+t(L_{2a-4b+c-2d,2b+d})).\end{aligned}$$

Доказательство окончено.

9. О связях t-инварианта с топологическими квантовыми теориями поля

Формально t-инвариант определяется довольно просто и без каких-либо ссылок на инварианты Тураева-Виро и какие-либо топологические квантовые теории поля (ТКТП). Его замечательное свойство, позволяющее многообразиям с краем сопоставлять матричные инварианты, согласованные умножением, доказывается столь же просто. Хотя t-инвариант значительно менее информативен, чем первая группа гомологий, последней t-инвариант не перекрывается.

Существует связь t-инварианта с одним из инвариантов Тураева-Виро, а тем самым и с соответствующей ТКТП. Эта связь делает t-инвариант и его матричную версию не столь самостоятельными и независимыми. С одной стороны, можно говорить, что это всего лишь частный случай из огромного числа родственных и многих более мощных инвариантов. А с другой,– разбираясь с загадочным поведением этого простого и "бедного" инварианта, мы можем рассчитывать и на прояснение поведения родственных ему инвариантов.

Где тут, собственно, ТКТП? Если многообразия с краем с кусками спайнов внутри и с выделенными графами рассматривать не как инструмент для вычислений значения t-инвариантов многообразий, а рассматривать как самостоятельный объект для изучения, то это и будет изучением соответствующей ТКТП. Смысл таких объектов весьма неочевиден. По крайней мере, видно, что множество таких объектов гораздо более обширно, чем многообразий без этих дополнительных структур. А для большинства аналогичных инвариантов соответствующие ТКТП имеют дело с еще более необозримыми множествами объектов. Здесь t-инвариант оказывается интересным как пример, позволяющий входить в тематику ТКТП ценой сравнительно небольших вычислений.

Литература

[1] Turaev, V. G. *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols* / V. G. Turaev, O. Y. Viro // Topology. — 1992. – Vol.31. – P. 865 – 902.

[2] Матвеев, С. В. *Построение и свойства t-инварианта* / С. В. Матвеев, М. А. Овчинников, М. В. Соколов // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2000. – Vol.267. – P. 207 – 219.

[3] Morimoto, K. *Some orientable 3-manifolds containing Klein Bottles* / K. Morimoto // Kobe J. Math. — 1985. – Vol.2. – P. 37 – 44.

[4] Овчинников, М. А. *Построение простых спайнов многообразий Вальдхаузена* / М. А. Овчинников // Труды Международной конференции "Маломерная топология и комбинаторная теория групп. Челябинск 1999". – Киев: Институт математики, 2000. – P. 65 – 86.

[5] Ovchinnikov, M. A. *Values of the t-invariant for small Seifert manifolds* / M. A. Ovchinnikov // [Электронный ресурс]. – Режим доступа: Preprint. arXiv:math.GT/0806.2073, свободный.

[6] Овчинников, М. А. *Представление гомеотопий тора простыми полиэдрами с краем* / М. А. Овчинников // Математические заметки. — 1999. – Vol.66,4. – P. 533 – 540.

УДК 515.162

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ, СКЛЕЕННЫХ ИЗ ДВУХ МНОГООБРАЗИЙ ЗЕЙФЕРТА С БАЗОЙ ДИСК И ДВУМЯ ОСОБЫМИ СЛОЯМИ

Е. А. Фоминых

UPPER BOUNDS OF COMPLEXITY FOR GRAPH-MANIFOLDS OBTAINED BY GLUING TOGETHER TWO SEIFERT MANIFOLDS FIBERED OVER THE DISC WITH TWO EXCEPTIONAL FIBERS

E. A. Fominykh

В работе доказана формула, позволяющая вычислять верхние оценки сложности граф-многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.

We prove a formula for an upper bound of complexity of graph-manifolds obtained by gluing together two Seifert manifolds fibered over the disc with two exceptional fibers.

Ключевые слова: трехмерные многообразия, сложность.

Keywords: 3-manifolds, complexity.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Пусть M — компактное трехмерное многообразие. Напомним [1], что подполиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M, если либо $\partial M \neq \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0,1]$, либо $\partial M = \emptyset$ и многообразие $M \setminus P$ гомеоморфно открытому шару. Спайн P называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф K_4 с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу K_4, называются *истинными вершинами* спайна P. *Сложность* $c(M)$ многообразия M определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

Задача вычисления сложности трехмерных многообразий является весьма трудной. В настоящее время точные значения сложности известны только для табличных многообразий [2] и для нескольких бесконечных серий многообразий [3–7]. Поэтому проблема построения "потенциально точных" верхних оценок сложности довольно актуальна. Важные результаты в этом направлении были получены в работах [8–12]. В данной работе доказана формула, анонсированная в [13], позволяющая вычислять потенциально точные верхние оценки сложности граф-многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.