тривиальных узлов в $F \times I$ /С. В. Матвеев// Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, no. 1. – С. 13 – 15.

[5] Кораблев, Ф. Г. *Редукции узлов в утолщенных поверхностях и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев, С. В. Матвеев // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 437, no. 6. – С. 748 – 750.

[6] Kishino, T. *A note on non-classical virtual knots* /T. Kishino, S. Satoh//J. of Knot Theory and Its Ramifications. – 2004. – Vol. 13, no. 7. – P. 845 – 856.

[7] Matveev, S. *Roots in 3-manifold topology* /C. Hog-Angelony, S. Matveev// Geometry and Topology Monograph. – 2008. – Vol. 14. – P. 295–319.

[8] Miyazaki, K. *Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds* /K. Miyazaki// Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 313. – P. 785 – 804.

УДК 515.162.3

О ПРИМАРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. В. Матвеев

ON PRIME DECOMPOSITIONS OF KNOTS IN THICKENED SURFACES

S. V. Matveev

Хорошо известно, что любой узел в сфере S^3 можно представить в виде связной суммы примарных слагаемых, причем такое представление единственно. Это – знаменитая теорема Х. Шуберта 1949 года. Верен ли аналогичный результат для узлов в утолщенных поверхностях, то есть в многообразиях вида $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность? Оказывается, теорема существования примарного разложения верна, а теорема единственности – нет (построены контрпримеры). В настоящей статье описывается структура множества всех возможных контрпримеров.

It is well known that any knot in S^3 can be represented as a connected sum of prime summands. Moreover, the summands are determined uniquely. This is the famous theorem of H. Schubert (1949). Is a similar result true for knots in thickened surfaces, that is, in 3-manifolds of the type $F \times I$, where F is a closed orientable surface? It turns out that the existence theorem is true but the uniqueness theorem is false (there are counterexamples). In the paper we describe the general structure of all possible counterexamples.

Ключевые слова: узел, связная сумма, утолщенная поверхность, примарное разложение.

Keywords: knot, connected sum, thickened surface, prime decomposition .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Утолщенные поверхности, то есть многообразия вида $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность, являются самыми простыми трехмерными многообразиями после сферы S^3. Поэтому не удивительно, что теория узлов в утолщенных поверхностях имеет много общего с теорией классических узлов. В частности, теории узлов в S^3 и $S^2 \times I$ эквивалентны, поскольку второе многообразие получается из первого вырезанием двух шаров, а это ни на что не влияет. Как и в классическом случае, узлы в $F \times I$ задаются своими диаграммами, то есть проекциями на F. В каждой двойной точке проекции должно быть указано, какой из проходящих через нее участков узла расположен выше, какой – ниже (в смысле величины координаты $t \in I$). При этом роль преобразований Райдемайстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Многие инварианты классических узлов (например, полиномы Кауффмана и Джонса) обобщаются на случай узлов в утолщенных поверхностях.

Напомним, что на множестве классических узлов определена операция связного суммирования #, относительно которой они образуют свободную абелеву полугруппу с тривиальным элементом, но без нетривиальных обратимых элементов. Это следует из теоремы Х. Шуберта [1], которая утверждает, что любой узел в S^3 можно разложить в связную сумму однозначно определенных слагаемых, не допускающих нетривиальных разложений. По аналогии с простыми числами, неразложимые слагаемые называются примарными (от английского слова *prime* - простой). Операция связного суммирования определена и для узлов в утолщенных поверхностях. На уровне диаграмм ее определение в точности совпадает с классическим, а на уровне многообразий отличается от него, хотя и не очень существенно.

Верен ли результат, аналогичный теореме Шуберта, для узлов в утолщенных поверхностях? В недавней работе [2] было доказано, что если узел $K \subset F \times I$ определяет тривиальный элемент группы гомологий $H_1(F; \mathbb{Z}_2)$, то его разложение в связную сумму примарных узлов существует и единственно. В общем случае теорема существования примарного разложения верна, а теорема единственности – нет. Два примера узлов в утолщенных поверхностях, допускающих по паре различных примарных разложений, были построены автором и Ф. Г. Кораблевым [2, 3]. В настоящей статье доказывается, что эти два контрпримера к теореме единственности порождают (в некотором точном смысле) все другие контрпримеры.

2. Основные определения

Пусть F – связная замкнутая ориентируемая поверхность. *Узлом* в $F \times I$ называется произвольная простая замкнутая кривая $K \subset F \times I$. Часто узел удобно понимать как пару вида $(F \times I, K)$. Два узла $K \subset F \times I$ и $K' \subset F' \times I$ *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon (F \times I, K) \to (F' \times I, K')$, сохраняющий основания прямого произведения.

Пусть $K' \subset F' \times I$, $K'' \subset F'' \times I$ – два узла. Выберем диски $D' \subset F'$, $D'' \subset F''$ и изотопно продеформируем узлы K', K'' так, чтобы пересечения $l' = K' \cap (D' \times I)$ и $l'' = K'' \cap (D'' \times I)$ были тривиальными дугами в цилиндрах $D' \times I$, $D'' \times I$.

Определение 1. *Узел $K = K'\#K''$ в $F \times I$, где $F = F'\#F''$, полученный склеиванием многообразий $(F' \setminus \mathrm{Int}\ D') \times I$, $(F'' \setminus \mathrm{Int}\ D'') \times I$ по такому гомеоморфизму $\varphi\colon \partial D' \times I \to \partial D'' \times I$, что $\varphi(\partial l') = \partial l''$, называется связной суммой узлов $K' \subset F' \times I$ и $K'' \subset F'' \times I$.*

Обратная операция, то есть переход от пары $(F \times I, K)$ к парам $(F' \times I, K'), (F'' \times I, K'')$ называется кольцевой редукцией, (см. рис. 1.).

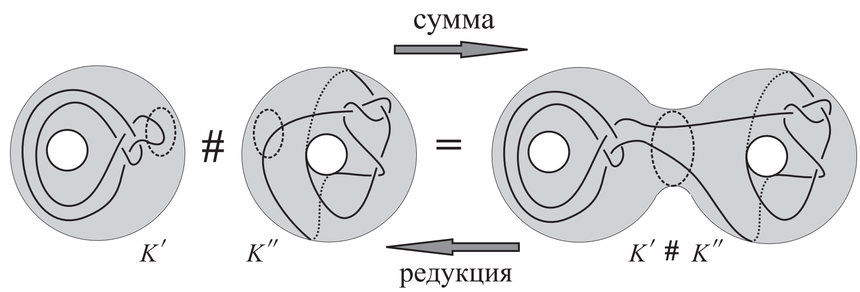

Рис. 1. Операции суммирования и редуцирования обратны друг другу

Она выполняется в два этапа. Сначала мы разрезаем $F \times I$ по вертикальному кольцу $A = \partial D' \times I = \partial D'' \times I$, которое разбивает $F \times I$ на части $(F' \setminus \mathrm{Int}\ D') \times I$, $(F'' \setminus \mathrm{Int}\ D'') \times I$, а затем заклеиваем копии кольца A на краях этих частей утолщенными дисками $D' \times I$, $D'' \times I$ с тривиальными дугами в них. Подчеркнем, что кольцевая редукция выполняется по вертикальному кольцу (или кольцу, изотопному вертикальному), которое обязано разбивать утолщенную поверхность и трансверсально пересекать данный узел ровно в двух точках. Такие кольца будем называть допустимыми.

Связная сумма $K'\#K''$ зависит как от выбора дисков D', D'' и изотопных деформаций узлов, так и от выбора гомеоморфизма φ. В общем случае число различных связных сумм двух данных узлов бесконечно. Однако, если один из узлов K', K'' является тривиальным узлом в $S^2 \times I$, то узел $K'\#K''$ эквивалентен второму узлу. Такое суммирование называется тривиальным.

Определение 2. *Узел в утолщенной поверхности называется примарным, если его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы двух других узлов.*

Теорема 1. *Если узел в утолщенной поверхности отличен от тривиального узла в $S^2 \times I$, то он либо является примарным, либо раскладывается в связную сумму нескольких примарных узлов.*

Доказательство этой теоремы затруднений не вызывает. Действительно, будем применять к данному узлу K и к его появляющимся при этом слагаемым нетривиальные кольцевые редукции до тех пор, пока это возможно. Так как при применении кольцевой редукции к узлу в связной утолщенной поверхности ее род строго уменьшается, то этот процесс заведомо остановится. В результате мы получим набор примарных узлов, одна из возможных связных сумм которых совпадает с K.

3. Две серии контрпримеров

Как уже отмечалось, один и тот же узел в утолщенной поверхности может допускать различные разложения в связную сумму примарных слагаемых. Такие узлы будем называть контрпримерами, имея в виду аналог теоремы Шуберта для классических узлов, вернее, ее второе заключение о единственности разложения.

Разобъем множество всех узлов в утолщенных поверхностях на два подмножества $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$. Первое подмножество состоит из узлов, допускающих только одно примарное разложение. Будем называть их регулярными. Второе – из контрпримеров, то есть из узлов, имеющих различные примарные разложения.

Пусть $(F \times I, K)$ – узел. Если $(F \times I, K) = (F' \times I, K')\#(F'' \times I, K'')$ и одно из слагаемых, например, $(F' \times I, K')$, лежит в $\mathcal{C}$, то $(F \times I, K)$ тоже лежит в $\mathcal{C}$. В этом случае будем говорить, что контрпример $(F \times I, K)$ индуцирован контрпримером $(F' \times I, K')$.

Определение 3. *Узел $(F \times I, K) \in \mathcal{C}$ называется базисным, если он не индуцирован никаким узлом из $\mathcal{C}$ или, эквивалентно, если в любом его разложении в связную сумму двух узлов оба слагаемых регулярны. Множество всех базисных контрпримеров обозначим $\mathcal{B}$.*

Другими словами, если $(F \times I, K) \in \mathcal{B}$, то выполняется следующее.

1. Для любого допустимого кольца $A \subset (F \times I, K)$ узлы $(F'_A \times I, K'_A)$, $(F''_A \times I, K''_A)$, полученные из узла $(F \times I, K)$ редукцией по A, регулярны.

2. Найдется такая пара нетривиальных допустимых колец $P, Q \subset (F \times I, K)$, что объединение примарных слагаемых узлов $(F'_P \times I, K'_P), (F''_P \times I, K''_P)$, получающихся редукцией по P, отлично от объединения примарных слагаемых узлов $(F'_Q \times I, K'_Q), (F''_Q \times I, K''_Q)$, получающихся редукцией по Q. Будем называть такие пары колец исключительными.

Опишем два типа базисных контрпримеров. Пусть S – двумерная сфера и U, V, W – такие компактные ориентируемые поверхности, что край ∂U состоит из одной компоненты, а края ∂V, ∂W – из двух компонент каждый. Рассмотрим две окружности $p, q \subset S$, которые пересекаются в четырех точках. Выберем в S диск u и две пары дисков (v_1, v_2), (w_1, w_2) так, чтобы u лежал в одном из двух четырехугольников, составленных из дуг окружностей p, q, диски каждой пары лежали по одну сторону от каждой из этих окружностей, а диски различных пар – по разные стороны от каждой из них. Перестроим сферу S, вырезав из нее диск u, пару (v_1, v_2), пару (w_1, w_2) и вклеив вместо них поверхности U, V, W, соответственно. Получим поверхность F с двумя нетривиальными разбивающими окружностями p, q, см. рис. 2 слева. Справа показан частный случай этой конструкции, когда поверхность U– диск. В этом случае для построения поверхности F вырезать диск u и заменять его на диск U не нужно.

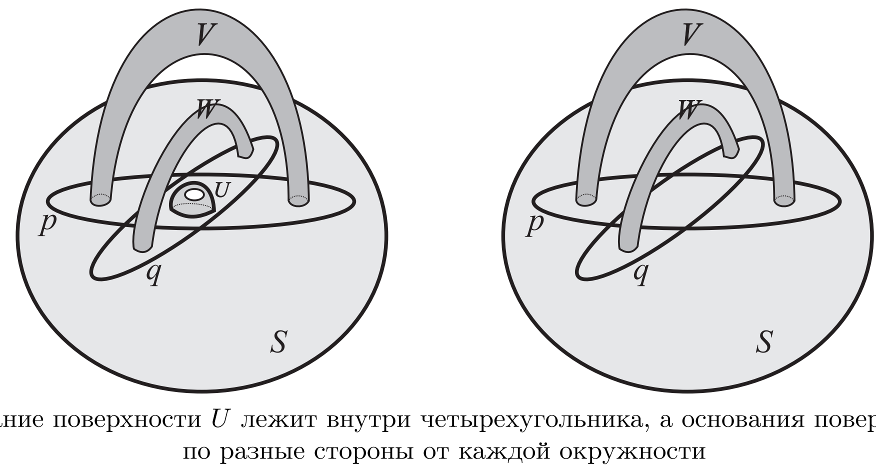

Рис. 2. Основание поверхности U лежит внутри четырехугольника, а основания поверхностей V, W – по разные стороны от каждой окружности

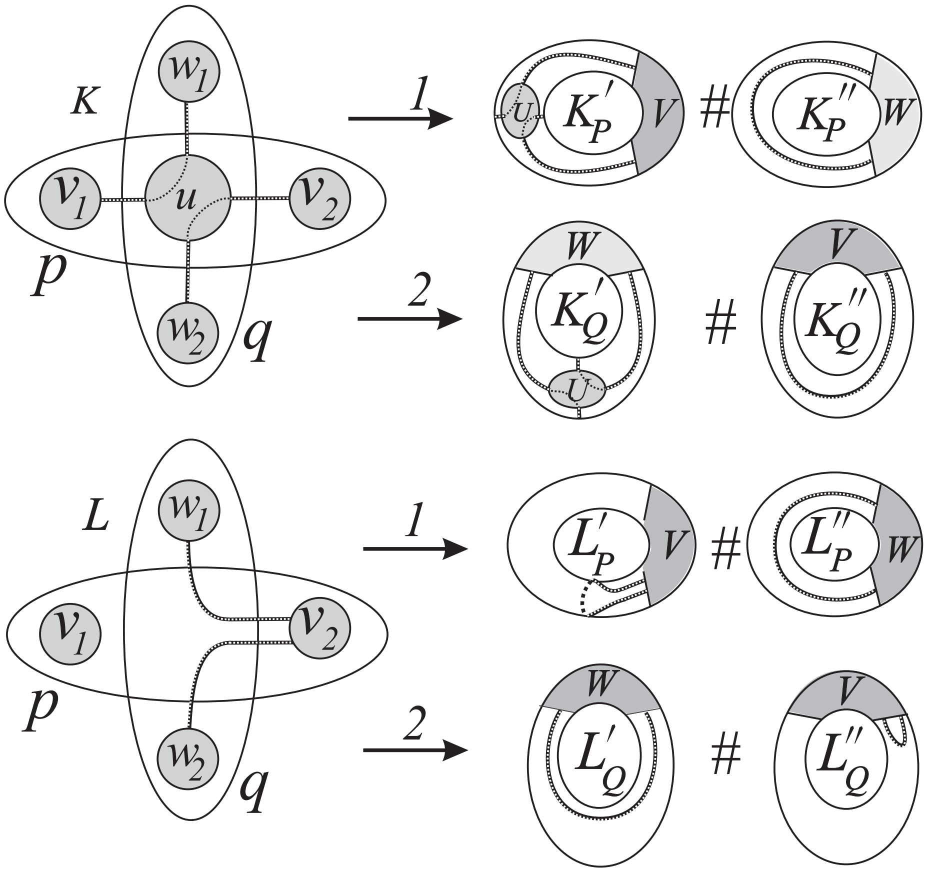

Рис. 3. Все слагаемые узла K различны, тогда как среди слагаемых узла L есть два совпадающих слагаемых – L''_P и L'_Q

Умножая F на отрезок, получим утолщенную поверхность $F \times I$ и два вертикальных кольца $P = p \times I, Q = q \times I$ в ней. Теперь построим узлы K, L так, как это изображено на рис. 3. Верхняя часть рисунка относится к общему случаю, когда поверхность U отлична от диска, нижняя – к частному случаю, когда U является диском и поэтому не использована при построении. Каждый из узлов пересекает каждое из колец P, Q в двух точках, причем его пересечение с каждым из многообразий $V \times I, W \times I$ состоит из одной дуги. Пересечение $K \cap (U \times I)$ должно состоять из двух дуг, возможно заузленных и зацепленных. Оба узла должны проходить по многообразиям $V \times I$, $W \times I$, а узел K – еще и по многообразию $U \times I$, достаточно сложным образом, чтобы все показанные справа слагаемые, которые получаются редукциями 1 и 2 по кольцам P и Q, были примарными и различными, кроме совпадающих слагаемых L''_P и L'_Q.

4. Доказательство основной теоремы

Приведенная в предыдущем разделе конструкция позволяет построить две серии базисных контрпримеров за счет варьирования как поверхностей U, V, W, так и поведения узлов в $U \times I, V \times I, W \times I$. Такие контрпримеры назовем модельными.

Теорема 2. *Любой базисный контрпример является модельным.*

Пусть $(F \times I, K)$ – произвольный базисный контрпример. Тогда в $F \times I$ найдется хотя бы одна пара исключительных колец. Среди всех таких пар выберем пару $P, Q \subset F \times I$, которая является минимальной в том смысле, что число $n = \#(P \cap Q)$ компонент связности пересечения $P \cap Q$ принимает наименьшее возможное значение. Напомним, что собственная дуга в кольце называется радиальной, если ее концы лежат на различных окружностях края кольца.

Лемма 1. *Если пара $P, Q \subset F \times I$ исключительных колец для узла $(F \times I, K)$ является минимальной, то $P \cap Q$ состоит из четырех радиальных отрезков.*

Доказательство. Связная компонента трансверсального пересечения двух допустимых колец может быть либо тривиальной или нетривиальной окружностью, либо тривиальной или нетривиальной (радиальной) дугой.

Шаг 1. Стандартная техника перестроек по самой внутренней тривиальной или самой внешней нетривиальной окружности, а также по самой внешней дуге, позволяет доказать, что в $P \cap Q$ нет ни окружностей, ни тривиальных дуг. Если бы такая окружность или дуга существовала, то одно из колец (пусть кольцо Q) можно было бы заменить на такое допустимое кольцо $Q' \subset F \times I$, что $\#(P \cap Q') < \#(P \cap Q)$ и $\#(Q \cap Q') = \emptyset$ (см. рис. 4) для случая самой внутренней окружности $C \subset P \cap Q$. Поскольку пара P, Q исключительна, то пара (P, Q') тоже является исключительной. Это противоречит минимальности пары P, Q. Подробности см. в [4, 5].

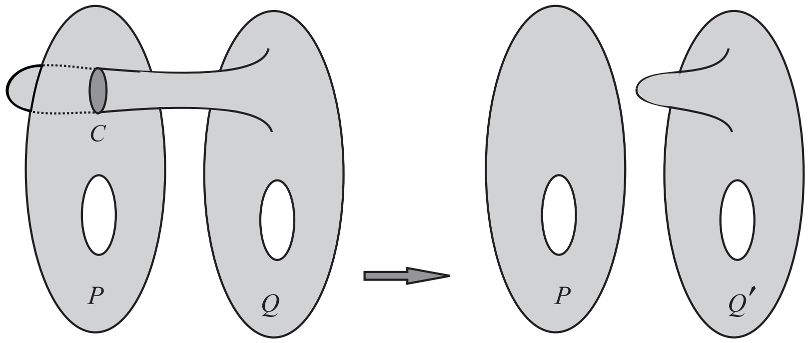

Рис. 4. Устранение тривиальной окружности

Предположим, что $P \cap Q$ состоит только из радиальных дуг. Тогда кольца имеют вид $P = p \times I, Q = q \times I$, где p и q – разбивающие простые замкнутые кривые в F. Поэтому про кольца можно временно забыть и оперировать только с кривыми в F, рассматривая вместо узла K его проекцию $\bar{K}$ на F. Так как кольца допустимы, то $\bar{K}$ пересекает каждую кривую ровно в двух точках.

Шаг 2. Допустим, что $p \cap q$ состоит из $n \geq 5$ точек. Они разбивают каждую окружность на n дуг. Поскольку $n \geq 5$, на каждой из окружностей (например, на p) найдется пара соседних дуг α, β, не пересекающих $\bar{K}$. Перестроив q по дуге α, получим объединение двух непересекающихся окружностей, которые обозначим q', q''. Затем перестроим $q' \cup q''$ по параллельной копии β' дуги β, соединяющей q' с q''. В результате получится такая нетривиальная разбивающая окружность $c \subset F$, что $c \cap \bar{K}$ состоит из двух точек и $\#(c \cap p) = n - 2 < 5$, $\#(c \cap q) = 4 < 5$, см. рис. 5. Поскольку пара P, Q исключительна, то одна из пар $(P, c \times I)$, $(Q, c \times I)$, тоже исключительна. Как и выше, это противоречит минимальности пары P, Q.

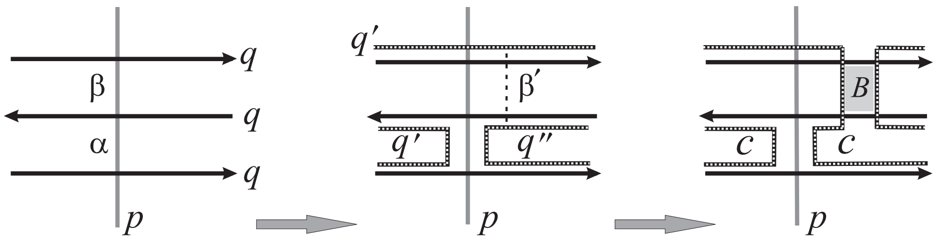

Рис. 5. Двойная перестройка по соседним дугам

Ниже нам понадобится следующее наблюдение: все четыре точки пересечения окружностей c и q расположены в вершинах четырехугольника B, который составлен из дуг этих окружностей и не пересекает проекции узла. На рис. 5 этот четырехугольник выделен.

Шаг 3. Так как окружности p, q разбивающие, то их пересечение состоит из четного числа точек. Нетрудно показать, что исключительных пар колец, пересекающихся по двум радиальным дугам, не бывает. Поэтому $n = 4$. Лемма 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $(F \times I, K)$ – произвольный базисный контрпример. Из леммы 1 следует, что в $F \times I$ найдется такая пара $P = p \times I, Q = q \times I$ исключительных колец, где p, q – окружности в F, что пересечения $P \cap Q$ и $p \cap q$ состоят из четырех радиальных дуг и из четырех точек, соответственно.

Допустим, что на окружностях p и q нет соседних дуг, не пересекающих узла. Тогда при обходе этих окружностей дуги, пересекающие и не пересекающие узел, чередуются. См. рис. 6a,b (других случаев чередования нет). Области B на рис. 6a,b и четырехугольная область на рис. 6b, к которой присоединена поверхность U, обязаны быть дисками, так как в противном случае рассматриваемые контрпримеры не были бы базисными. Нетрудно проверить, что редукции по окружностям p, q примера на рис. 6b дают одни и те же слагаемые, поэтому он не является базисным контрпримером. Отметим, что рис. 6a определяет первую серию модельных контрпримеров.

Теперь предположим, что на одной из окружностей p, q найдутся две соседние дуги α, β, не пересекающие проекции узла. Применяя прием двойной перестройки, мы получим новую пару исключительных колец, которые по-прежнему будем обозначать P, Q и представлять в виде $P = p \times I$,

$Q = q \times I$. Согласно приведенному выше наблюдению, четыре дуги окружностей p, q ограничивают четырехугольник B, стороны которого не пересекают проекции узла. Простой перебор показывает, что в этом случае $\bar{K}$ может пересекать оставшиеся четыре дуги окружностей p, q одним из трех способов, см. рис. 6a,c,d. Случай 6a уже рассмотрен, в случае 6c базисного контрпримера опять не получается, так как редукции по p, q дают одно и то же. Случай 6d сводится к случаю 6e путем замены кольца Q и окружности q на новое кольцо $Q' = q' \times I$ и новую окружность q', которая на рис. 6d показана пунктиром. При этом поверхность U присоединяется к поверхности V. Остается заметить, что рис. 6e определяет вторую серию модельных контрпримеров.

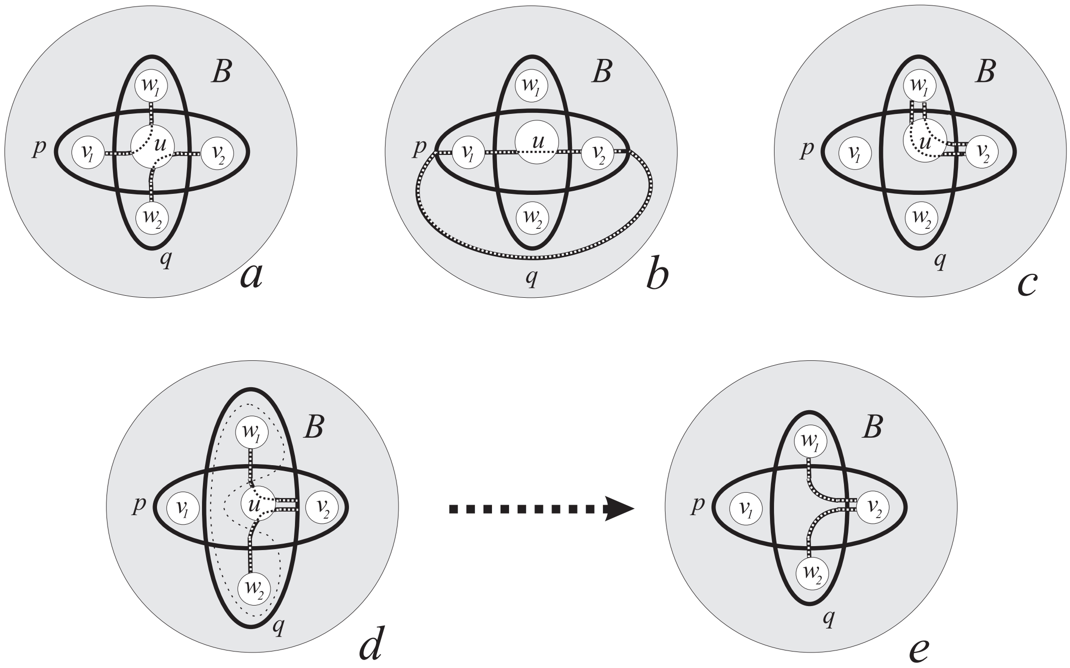

Рис. 6. Заготовки 6a и 6e порождают все базисные контрпримеры

Литература

[1] Schubert, H. *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten* / H. Schubert // S.B.-Heidelberger Akad. Wiss. Math. Natur. Kl. – 1949. – Vol. 3. – P. 57 – 104.

[2] Матвеев, С. В. *Разложение гомологически тривиальных узлов в* $F \times I$ / С. В. Матвеев // Доклады РАН. – 2010. – Том 433, № 1. – С. 13 – 15.

[3] Кораблев, Ф. Г. *Редукции узлов в расширенных поверхностях и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев, С. В. Матвеев // Доклады РАН. – 2011. – Том 437, № 1. – С. 748 – 750.

[4] Hog-Angeloni, C. *Roots in 3-manifold topology* / C. Hog-Angeloni, S. Matveev // Geometry & Topology Monographs. – 2008. – Vol. 14. – P. 295 – 319.

[5] Кораблев, Ф. Г. *Единственность корней узлов в* $F \times I$ *и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев // Труды ИММ. – 2011. – Том 17, № 4. – С. 1 – 18.