

Modena. – 2001. – Vol. II. – P. 177 – 215.

[14] Mulazzani, M. *Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of (1,1) knots* / M. Mulazzani // Bull. Korean Math. Soc. – 2003. – Vol. 40, №. 1. – P. 101 – 108.

[15] Recognizer *Three-manifold Recognizer*, the computer program developed by members of the

topology group of Chelyabinsk State University.

[16] Singer, J. *Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams* / J. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – Vol. 35, №. 1. – P. 88 – 111.

[17] Weber, C. *Die Beiden Dodekaederäume* / C. Weber, H. Seifert // Math. Z. – 1933. – Vol. 37. – P. 237 – 253.

УДК 515.162.8

ПРИМАРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ

Ф. Г. Кораблев

PRIME DECOMPOSITIONS OF VIRTUAL KNOTS

Ph. G. Korablev

Доказывается, что произвольный виртуальный узел представляется в виде связной суммы нескольких примарных и тривиальных виртуальных узлов, причем примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, то есть определяются только исходным виртуальным узлом. Для этого на множестве узлов в утолщенных поверхностях вводятся два типа редукций и доказывается, что результат применения этих редукций к произвольному узлу в утолщенной поверхности существует и однозначно определен.

We prove that any virtual knot can be presented as a connected sum of several prime and trivial virtual knots. Prime summands of the presentation are defined uniquely, i.e. they are determined by the original knot. We introduce two types of reductions on the set of knots in thickened surfaces and prove that the result of any sequence of reductions exists and is defined uniquely.

Ключевые слова: виртуальный узел, связная сумма, теория корней.

Keywords: virtual knot, connected sum, root theory.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение и предварительные сведения

Под *узлом в утолщенной поверхности* понимается простая замкнутая кривая K в прямом произведении $F \times I$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность, $I = [0; 1]$ — отрезок. Удобно понимать такие узлы, как пары $(F \times I, K)$. Все узлы в утолщенных поверхностях рассматриваются с точностью до гомеоморфизмов, сохраняющих основания прямого произведения и рассматриваемых как гомеоморфизмы пар. Пусть $(F \times I, K)$ — узел в утолщенной поверхности. Выберем такую пару непересекающихся дисков $D_1, D_2 \subset F$, что $(D_i \times I) \cap K = \emptyset$, $i = 1, 2$. Операция *стабилизации* узла $(F \times I, K)$ состоит в вырезании из многообразия $F \times I$ цилиндров $D_i \times I$, $i = 1, 2$ и склеивании копий колец $\partial D_i \times I$ на крае получившегося многообразия по такому гомеоморфизму $\partial D_1 \times I \rightarrow \partial D_2 \times I$, чтобы в результате получился узел в утолщенной поверхности. Операция, обратная стабилизации, называется *дестабилизацией* и состоит в уменьшении рода поверхности F без изменения кривой K .

Два узла в утолщенных поверхностях $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ эквивалентны, если от одного к другому можно перейти с помощью последовательности преобразований стабилизации и дестабилизации. *Виртуальным узлом* называется класс эквивалентности узлов в утолщенных поверхностях (см. [1, 2, 3]).

Пусть $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ — два узла в утолщенных поверхностях. Для каждого $i = 1, 2$ выберем такой диск $D_i \subset F_i$, что пересечение $l_i = (D_i \times I) \cap K_i$ является тривиальной дугой в топологическом шаре $D_i \times I$. Склеим пары $((F_i \setminus \text{Int } D_i) \times I, K_i \setminus \text{Int } l_i)$ по такому обращающему индуцированные ориентации гомеоморфизму $\varphi: \partial D_1 \times I \rightarrow \partial D_2 \times I$, что $\varphi(\partial D_1 \times \{0\}) = \partial D_2 \times \{0\}$ и $\varphi(\partial l_1) = \partial l_2$. Получившийся в результате узел в утолщенной поверхности $(F \times I, K)$ называется *кольцевой связной суммой* узлов $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (также см. [4, 5]). Операция кольцевой связной суммы является прямым обобщением операции связного суммирования классических узлов в S^3 на случай узлов в утолщенных поверхностях.

Операция кольцевой связной суммы узлов в

утолщенных поверхностях индуцирует операцию *связного суммирования* виртуальных узлов. Результат связного суммирования $v_1 \# v_2$ зависит как от выбора конкретных реализаций виртуальных узлов v_1, v_2 узлами в утолщенных поверхностях, так и от выбора дисков D_1, D_2 , необходимых для задания кольцевой связной суммы. Будем говорить, что разложение $v = v_1 \# v_2$ одного виртуального узла в связную сумму двух других *тривиально*, если один из узлов v_1, v_2 совпадает с узлом v , а второй тривиален. Нетривиальный виртуальный узел v называется *примарным*, если его нельзя представить в виде нетривиальной связной суммы.

Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Любой виртуальный узел раскладывается в связную сумму нескольких примарных и нескольких тривиальных виртуальных узлов. При этом примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, т. е. зависят только от исходного виртуального узла.*

Тривиальные виртуальные узлы выделяются отдельно в силу того, что существуют нетривиаль-

ные виртуальные узлы, являющиеся связной суммой тривиальных (см. [6]).

Пусть $(F \times I, K)$ – узел. Собственное кольцо $A \subset F \times I$ называется *вертикальным*, если оно изотопно кольцу вида $c \times I$, где $c \subset F$ – простая замкнутая кривая на поверхности F . Определим два типа редукций узлов в утолщенных поверхностях.

1. Пусть $A \subset F \times I$ – вертикальное кольцо, трансверсально пересекающее кривую K в двух точках. *Редукция типа 1* вдоль кольца A состоит в разрезании пары $(F \times I, K)$ по кольцу A и заклеивании двух получившихся копий кольца A ручками индекса 2 с тривиальными дугами в них. В результате получаются две пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (рис. 1(а)).

2. Пусть $A_1, A_2 \subset F \times I$ – такая пара непересекающихся вертикальных колец, что их объединение разбивает многообразие $F \times I$ на две части, и каждое из колец пересекается с кривой K в одной точке. *Редукция типа 2* вдоль колец A_1, A_2 состоит в разрезании пары $(F \times I, K)$ по кольцам A_1, A_2 и склеивании копий этих колец на крае каждой части так, чтобы получились две пары $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (рис. 1(б)).

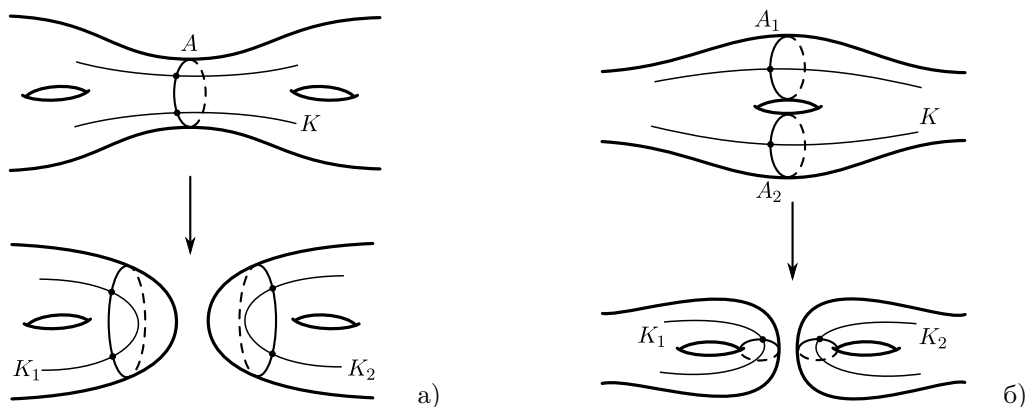


Рис. 1. Редукция типа 1 (а) и редукция типа 2 (б).

Отметим, что если узлы в утолщенных поверхностях $(F \times I, K)$, $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ являются реализациями виртуальных узлов v, v_1 и v_2 соответственно, и узлы $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ получаются в результате редукции типа 1 или 2 из узла $(F \times I, K)$, то $v = v_1 \# v_2$. Это следует из того, что редукция типа 1 является операцией, обратной кольцевой связной сумме, а редукция типа 2 является суперпозицией стабилизации и редукции типа 1. Отметим также, что редукция типа 1 вдоль сжимаемого кольца эквивалентна *сферической редукции* (также см. [7]), которая состоит в вырезании заузленной дуги кривой $K \subset F \times I$ в некотором шаре $B \subset F \times I$ (локального узла). В результате сферической редукции получается узел $(F \times I, K_1)$ в той же самой утолщенной поверхности $F \times I$ и некоторый узел в утолщенной сфере $(S^2 \times I, K_2)$. Удобно все редукции типа 1 вдоль

сжимаемых колец заменять на соответствующие им сферические редукции. Дестабилизация узла $(F \times I, K)$ задается несжимаемым вертикальным кольцом, которое не пересекается с кривой K .

Редукция типа 1 или 2 называется *тривиальной*, если в результате нее один из получившихся узлов совпадает с исходным. Узел в утолщенной поверхности *примарен*, если он не допускает дестабилизаций и нетривиальных редукций типа 1 и 2.

Реализация $(F \times I, K)$ узлом в утолщенной поверхности виртуального узла v называется *минимальной*, если она не допускает дестабилизаций (также см. [2]). Из работы [2] следует, что для произвольного виртуального узла его минимальная реализация существует и определена однозначно.

Лемма 1. *Пусть v – виртуальный узел, $(F \times I, K)$ – его минимальная реализация. Тогда узел v примарен тогда и только тогда, когда узел*

$(F \times I, K)$ примарен.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству теоремы 5 работы [3]. Пусть виртуальный узел v представляется в виде связной суммы (возможно тривиальной) $v = v_1 \# v_2$. Основным моментом в доказательстве леммы 1 состоит в том, что если неминимальная реализация $(F \times I, K)$ узла v допускает редукцию типа 1 или 2, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2 , то узел в утолщенной поверхности, получающийся из $(F \times I, K)$ в результате одной дестабилизации, также допускает редукцию типа 1 или 2, в результате которой получаются реализации узлов v_1 и v_2 .

Для доказательства теоремы 1 будем использовать методы теории корней, разработанной в [7]. Построим ориентированный граф Γ с множеством вершин $\mathbb{V}(\Gamma)$ и множеством ребер $\mathbb{E}(\Gamma)$. Каждая его вершина $V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ является либо парой вида $(F \times I, K)$, либо набором нескольких таких пар, рассматриваемых с точностью до добавления и удаления тривиальных узлов в $S^2 \times I$. Две вершины $U, V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ соединены ориентированным ребром $\overrightarrow{UV} \in \mathbb{E}(\Gamma)$, если набор узлов V получается из набора узлов U с помощью дестабилизации или нетривиальной редукции типа 1 или 2. Если различные редукции пар вершины U приводят к одной и той же вершине V , то мы проводим одно ребро $\overrightarrow{UV}$, запрещая тем самым двойные ребра. Вершина $V \in \mathbb{V}(\Gamma)$ называется *корнем* вершины $U \in \mathbb{V}(\Gamma)$, если существует ориентированный путь по ребрам графа Γ из вершины U в вершину V и из вершины V не исходит ни одного ребра.

На множестве пар ребер с общим началом

$$\mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) = \{(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) | U \in \mathbb{V}(\Gamma), \overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2} \in \mathbb{E}(\Gamma)\}$$

определим функцию $\mu: \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ правилом:

$$\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = \min_{X_1, X_2} \#(X_1 \cap X_2),$$

где минимум числа компонент связности $\#(X_1 \cap X_2)$ берется по всем поверхностям X_1, X_2 , задающим ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ соответственно. Отметим, что $\mu(\overrightarrow{UV}, \overrightarrow{UV}) = 0$.

Приведем два условия на граф Γ , достаточные как для существования, так и для единственности корня любой его вершины (эти условия предложил С. В. Матвеев).

(FC): (от слов Finiteness Condition). Любой ориентированный путь по ребрам графа Γ имеет конечную длину;

(MF): (от слов Mediator Function). Для любой пары ребер $(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) \in \mathbb{E}^{(2)}(\Gamma)$ выполнены следующие два условия:

(MF1): если $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$, то найдется вершина $W \in \mathbb{V}(\Gamma)$, в которую можно проложить ориентированные пути по ребрам гра-

фа Γ как из вершины V_1 , так и из вершины V_2 ;

(MF2): если $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) > 0$, то найдется такое ребро $\overrightarrow{UW}$ с той же начальной вершиной, что $\mu(\overrightarrow{UV_i}, \overrightarrow{UW}) < \mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2})$ при $i = 1, 2$.

Лемма 2. Если граф Γ удовлетворяет условиям (FC) и (MF), то корень любой его вершины существует и единствен.

Эта лемма аналогична теореме 1 из [7]. Конечность произвольного пути по ребрам гарантирует существование корня, а справедливость свойства (MF) – его единственность.

Из леммы 1 следует, что для доказательства теоремы 1 достаточно доказать существование и единственность корня произвольной вершины графа Γ .

2. Существование корня

Пусть $\mathcal{K}$ – множество всех пар вида $(F \times I, K)$, и пусть Ω – вполне упорядоченное множество, состоящее из троек вида (g, s, w) , где g, s – неотрицательные числа, w – лексикографически упорядоченная конечная последовательность неотрицательных чисел. На множестве Ω также вводится лексикографический порядок. Построим такую функцию сложности $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \Omega$, что для любой пары $(F' \times I, K') \in \mathcal{K}$, получающейся из пары $(F \times I, K) \in \mathcal{K}$ в результате дестабилизации или нетривиальной редукции типа 1 или 2, справедливо соотношение $\varphi(F \times I, K) > \varphi(F' \times I, K')$.

Пусть $(F \times I, K)$ – узел. Числом Шуберта $s(F \times I, K)$ называется максимальное число таких попарно не пересекающихся трехмерных шаров $B_1, B_2, \dots$ в $F \times I$, что для каждого $i = 1, 2, \dots$ пересечение $K \cap B_i$ является заузленной дугой в B_i . Из результатов работы [8] следует, что число Шуберта $s(F \times I, K)$ конечно и однозначно определяется парой $(F \times I, K)$. Это следует также из теоремы 7 работы [7].

Пусть $(F \times I, K)$ – узел, $g(F)$ – род поверхности F , и $c_1, \dots, c_{2g(F)}$ – такой упорядоченный набор простых замкнутых кривых на F , что каждая следующая кривая трансверсально пересекает предыдущую ровно в одной точке. Упорядоченный набор $\mathcal{C} = \{C_i \subset F \times I \mid 1 \leq i \leq 2g(F)\}$ трансверсальных кривой K вертикальных колец называется *контрольным*, если каждое кольцо C_i изотопно кольцу $c_i \times I$, $i = 1, \dots, 2g(F)$. Весом узла $(F \times I, K)$ называется величина $w(F \times I, K) = \min_{\mathcal{C}} (\#(C_1 \cap K), \dots, \#(C_{2g(F)} \cap K))$, где минимум берется по всем возможным контрольным наборам колец, а на множестве всех упорядоченных последовательностей вида $(\#(C_1 \cap K), \dots, \#(C_{2g(F)} \cap K))$, где $\#(C_i \cap K)$ – число точек пересечения кольца C_i и кривой K , вводится лексикографический порядок.

Опишем функцию $\varphi: \mathcal{K} \rightarrow \Omega$ следующим образом:

$$\varphi(F \times I, K) = (g(F), s(F \times I, K), w(F \times I, K)),$$

где $g(F)$ — род поверхности F , $s(F \times I, K)$ — число Шуберта пары $(F \times I, K)$, и $w(F \times I, K)$ — вес узла $(F \times I, K)$. Значением $\varphi(F \times I, K)$ является тройка, где первые два элемента — неотрицательные числа, а третий — упорядоченная последовательность длины $2g(F)$.

Лемма 3. Пусть узел $(F' \times I, K')$ получается из узла $(F \times I, K)$ в результате дестабилизации или нетривиальной редукции типа 1 или 2. Тогда $\varphi(F \times I, K) > \varphi(F' \times I, K')$.

Непосредственно проверяется, что при дестабилизации, редукции типа 1 вдоль несжимаемого кольца и редукции типа 2 вдоль пары непараллельных колец уменьшается род поверхности F . При редукции типа 1 вдоль сжимаемого кольца уменьшается число Шуберта, а при редукции типа 2 вдоль пары параллельных колец уменьшается вес узла $(F \times I, K)$.

Из леммы 3 следует, что произвольная последовательность $\xi_1, \xi_2, \dots$, состоящая из дестабилизаций и нетривиальных редукций типов 1 и 2, конечна. Отсюда следует, что граф Γ удовлетворяет свойству (FC).

3. Единственность корня

Лемма 4. Граф Γ удовлетворяет свойствам (MF1) и (MF2).

В самом деле, пусть поверхности X_1, X_2 задают такие ребра $\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2} \in \mathbb{E}(\Gamma)$ соответственно, что $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$. Каждая из поверхностей X_1, X_2 задает либо дестабилизацию, либо нетривиальную редукцию типа 1 или 2. Так как $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) = 0$, то можно считать, что $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Предположим, что копия поверхности X_2 задает либо дестабилизацию, либо редукцию типа 1 или 2 некоторого узла, составляющего вершину V_1 , а поверхность X_1 задает дестабилизацию или редукцию некоторого узла, составляющего вершину V_2 . В этом случае непосредственно проверяется, что если каждая из поверхностей X_1, X_2 задает нетривиальную редукцию или дестабилизацию узлов, составляющих V_2 и V_1 соответственно, то искомая вершина W получается из V_1 с помощью редукции или дестабилизации вдоль X_2 (та же самая вершина получается из V_2 с помощью редукции или дестабилизации вдоль X_1). Если X_1 задает тривиальную редукцию типа 1 или 2 узла, составляющего вершину V_2 , то искомая вершина W совпадает с V_2 .

Сформулированное выше условие на существование редукций вдоль поверхностей X_1, X_2 нарушается только в случае, если обе поверхности

лежат в одной и той же утолщенной поверхности $F \times I$, каждая из них является парой колец, и при обходе вдоль кривой K кольца из X_1, X_2 встречаются поочередно. Тогда искомая вершина W получается из каждой вершины V_i , $i = 1, 2$, двумя редукциями по образам соседних колец из $X_1 \cup X_2$.

Предположим теперь, что $\mu(\overrightarrow{UV_1}, \overrightarrow{UV_2}) > 0$. Пусть $(F \times I, K)$ — один из узлов, составляющих вершину U , и пусть $X_1, X_2 \subset F \times I$ — поверхности, задающие ребра $\overrightarrow{UV_1}$ и $\overrightarrow{UV_2}$ соответственно. Основным момент в доказательстве свойства (MF2) состоит в построении поверхности-посредника $X \subset F \times I$, которая задает дестабилизацию или нетривиальную редукцию типа 1 или 2 узла $(F \times I, K)$, и $\#(X \cap X_i) < \#(X_1, X_2)$, $i = 1, 2$. Для этого используется стандартная техника устранения пересечений поверхностей подобно тому, как это описано в [7].

Из лемм 3 и 4 следует, что каждая вершина графа Γ имеет единственный корень. Покажем справедливость теоремы 1. Предположим противное, пусть v — виртуальный узел, и пусть $v_1, \dots, v_n$ и $v'_1, \dots, v'_l$ — два разных набора примарных виртуальных узлов, являющиеся слагаемыми в разложении узла v в связную сумму. Пусть $\mathcal{F} = \{(F_1 \times I, K_1), \dots, (F_n \times I, K_n)\}$ — минимальные реализации виртуальных узлов $v_1, \dots, v_n$ соответственно, и $\mathcal{F}' = \{(F'_1 \times I, K'_1), \dots, (F'_l \times I, K'_l)\}$ — минимальные реализации виртуальных узлов $v'_1, \dots, v'_l$ соответственно. Тогда некоторая реализация $(F \times I, K)$ виртуального узла v получается из набора узлов $\mathcal{F}$ с помощью операций стабилизации, дестабилизации и кольцевой связной суммы, и некоторая другая реализация $(F' \times I, K')$ того же узла v получается из набора узлов $\mathcal{F}'$ с помощью тех же операций.

В силу леммы 1, каждый из узлов наборов $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$ является примарным, следовательно набор узлов $\mathcal{F}$ является корнем вершины V графа Γ , состоящей из одного узла $(F \times I, K)$, а набор узлов $\mathcal{F}'$ является корнем вершины V' графа Γ , состоящей из одного узла $(F' \times I, K')$. Так как при стабилизации корень не меняется, то корни вершин V и V' совпадают. Следовательно наборы $v_1, \dots, v_n$ и $v'_1, \dots, v'_l$ также совпадают.

Литература

- [1] Carter, J. S. *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms* / Carter J. S., Kamada S., Saito M. // J. Knot Theory Ramifications — 2002. — Vol. 11. — P. 311 — 322.
- [2] Kuperberg, G. *What is a virtual link?* / G. Kuperberg // Algebraic and Geometric Topology. — 2003. — Vol. 13 — P. 587 — 591.
- [3] Кауффман, Л. *Виртуальные узлы и зацепления* / Л. Кауффман, В. О. Мантуров // Труды МИРАН — 2006. — Т. 252, no 1. — С. 114 — 134.
- [4] Матвеев, С. В. *Разложение гомологически*

тривиальных узлов в $F \times I$ /С. В. Матвеев// Доклады Академии наук. – 2010. – Т. 433, по. 1. – С. 13 – 15.

[5] Кораблев, Ф. Г. *Редукции узлов в утолщенных поверхностях и виртуальные узлы* / Ф. Г. Кораблев, С. В. Матвеев // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 437, по. 6. – С. 748 – 750.

[6] Kishino, T. *A note on non-classical virtual knots* /T. Kishino, S. Satoh//J. of Knot Theory and Its Ramifications. – 2004. – Vol. 13, no. 7. – P. 845 –

856.

[7] Matveev, S. *Roots in 3-manifold topology* /C. Hog-Angelony, S. Matveev// Geometry and Topology Monograph. – 2008. – Vol. 14. – P. 295–319.

[8] Miyazaki, K. *Conjugation and prime decomposition of knots in closed, oriented 3-manifolds* /K. Miyazaki// Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 313. – P. 785 – 804.

УДК 515.162.3

О ПРИМАРНЫХ РАЗЛОЖЕНИЯХ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

С. В. Матвеев

ON PRIME DECOMPOSITIONS OF KNOTS IN THICKENED SURFACES

S. V. Matveev

Хорошо известно, что любой узел в сфере S^3 можно представить в виде связной суммы примарных слагаемых, причем такое представление единственно. Это – знаменитая теорема Х. Шуберта 1949 года. Верен ли аналогичный результат для узлов в утолщенных поверхностях, то есть в многообразиях вида $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность? Оказывается, теорема существования примарного разложения верна, а теорема единственности – нет (построены контрпримеры). В настоящей статье описывается структура множества всех возможных контрпримеров.

It is well known that any knot in S^3 can be represented as a connected sum of prime summands. Moreover, the summands are determined uniquely. This is the famous theorem of H. Schubert (1949). Is a similar result true for knots in thickened surfaces, that is, in 3-manifolds of the type $F \times I$, where F is a closed orientable surface? It turns out that the existence theorem is true but the uniqueness theorem is false (there are counterexamples). In the paper we describe the general structure of all possible counterexamples.

Ключевые слова: узел, связная сумма, утолщенная поверхность, примарное разложение.

Keywords: knot, connected sum, thickened surface, prime decomposition .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение

Утолщенные поверхности, то есть многообразия вида $F \times I$, где F – замкнутая ориентируемая поверхность, являются самыми простыми трехмерными многообразиями после сферы S^3 . Поэтому не удивительно, что теория узлов в утолщенных поверхностях имеет много общего с теорией классических узлов. В частности, теории узлов в S^3 и $S^2 \times I$ эквивалентны, поскольку второе многообразие получается из первого вырезанием двух шаров, а это ни на что не влияет. Как и в классическом случае, узлы в $F \times I$ задаются своими диаграммами, то есть проекциями на F . В каждой двойной точке проекции должно быть указано, какой из проходящих через нее участков узла расположен выше, какой – ниже (в смысле величины координаты $t \in I$). При этом роль преобразований Райдемайлера сохраняется: они реализуют

изотопии узлов. Многие инварианты классических узлов (например, полиномы Кауффмана и Джонса) обобщаются на случай узлов в утолщенных поверхностях.

Напомним, что на множестве классических узлов определена операция связного суммирования $\#$, относительно которой они образуют свободную абелеву полугруппу с тривиальным элементом, но без нетривиальных обратимых элементов. Это следует из теоремы Х. Шуберта [1], которая утверждает, что любой узел в S^3 можно разложить в связную сумму однозначно определенных слагаемых, не допускающих нетривиальных разложений. По аналогии с простыми числами, неразложимые слагаемые называются примарными (от английского слова *prime* – простой). Операция связного суммирования определена и для узлов в утолщенных поверхностях. На уровне диа-