

УДК 515.162

ОБОБЩЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ ЭВЕРИТА. ДИАГРАММЫ ХЕГОРА.
СЛОЖНОСТЬ

Т. А. Козловская

GENERALIZATION OF EVERITT MANIFOLD. HEEGAARD DIAGRAMS.
COMPLEXITY

T. Kozlovskaya

В данной работе исследуется класс замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p, q)$ ($n \geq 1$, $p \geq 3$, $0 < q < p$ и $(p, q) = 1$), определенных попарными отождествлениями граней фундаментальных многогранников и обладающих циклической симметрией. Найдены верхние оценки сложности (по Матвееву) многообразий $M_n(p, 1)$, заданных их диаграммами Хегора.

In this paper we study a class of closed orientable three-dimensional manifolds $M_n(p, q)$ ($n \geq 1$, $p \geq 3$, $0 < q < p$ and $(p, q) = 1$) defined via pairwise identifications of the faces of fundamental polyhedra and having a cyclic symmetry. Using Heegaard diagram of $M_n(p, 1)$, we obtain upper bounds for their Matveev complexity.

Ключевые слова: сложность многообразия, диаграммы Хегора, трехмерное многообразие.

Keywords: complexity of 3-manifolds, Heegaard diagrams, 3-manifolds.

Работа поддержана РФФИ (гранты № 10-01-00642 и № 10-01-91056) и Интеграционным грантом СО РАН и УрО РАН.

1. Построение многообразий из
многогранников

Любое замкнутое трехмерное многообразие может быть представлено как результат попарного отождествления граней его фундаментального многогранника. Наиболее известными примерами такого рода являются: представление сферы Пуанкаре, как додекаэдра с двугранными углами $2\pi/3$, у которого грани отождествлены по некоторому правилу; представление гиперболического пространства Вебера-Зейферта, как додекаэдра с двугранными углами $2\pi/5$, у которого каждые две противоположные грани отождествлены, и представление линзового пространства как бипирамиды, у которой верхние треугольные грани отождествлены с нижними треугольными гранями. Построению трехмерных многообразий из правильных платоновых тел посвящено много работ. В работе [10] Эверит привел полный список многообразий, получаемых из правильных многогранников. Список содержит сферические многообразия $M_1, \dots, M_8$, евклидовы $M_9, \dots, M_{14}$ и гиперболические $M_{15}, \dots, M_{28}$. Так, например, из додекаэдра с двугранными углами $2\pi/5$ получено восемь многообразий, одно из которых, M_{15} , является многообразием Вебера – Зейферта, построенного в [17]. Из икосаэдра с двугранными углами $2\pi/3$ получено шесть многообразий. В [10] приведено попарное отождествление граней $2\pi/3$ – икосаэдра, приводящее к многообразию M_{24} . Если все двугранные углы икосаэдра равны $2\pi/3$, то он может быть реализован как ограниченный многогранник в пространстве Лобачевского $\mathbb{H}^3$. В работе будет построено семейство замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p, q)$, обобщающих конструкцию гиперболического многооб-

разия M_{24} из списка Эверита.

По построению, гиперболическое многообразие Вебера – Зейферта [17] обладает симметрией пятого порядка, которая позволяет представить это многообразие как 5-листное циклическое накрытие трехмерной сферы, разветвленное над зацеплением Уайтхеда. В [6], как обобщение конструкции Вебера – Зейферта, описаны фундаментальные многогранники многообразий, являющихся n -листными ($n \geq 5$) циклическими накрытиями трехмерной сферы, разветвленными над зацеплением Уайтхеда. Различные способы построения трехмерных многообразий, которые циклически покрывают трехмерную сферу, разветленно над двухмостовыми узлами и зацеплениями приведены в [13]. Трехмерные многообразия, являющиеся циклическими накрытиями линзовых пространств, разветвленными над узлами, исследовались в [14].

Авторы работы [7] строили трехмерные гиперболические многообразия, для которых фундаментальным многогранником является правильный икосаэдр с двугранными углами $2\pi/3$. Они установили, что гиперболическое многообразие M_{24} является трехлистным накрытием линзового пространства $L(3, 1)$, разветвленным над некоторым двухкомпонентным зацеплением.

В работе [1] дано обобщение конструкции из [8], [9]. А именно – в терминах фундаментальных многогранников строится бесконечное семейство замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий, являющихся циклическими накрытиями линзового пространства $L(p, q)$, разветвленными над двухкомпонентными зацеплениями.

2. Построение многообразий $M_n(p, q)$ и их свойства

Введем двухпараметрическое семейство трехмерных многообразий $M_n(p, q)$, определенных попарными отождествлениями граней некоторых симплициальных комплексов, обладающих цикличе-

ской симметрией.

Рассмотрим симплициальный комплекс $\mathcal{P}_n(p)$, где $n \geq 1$, $p \geq 3$, изображенный на рис. 1. Комплекс имеет $6n + 2$ граней, $(7 + p)n$ ребер и $(p + 1)n$ вершин. На каждом ребре $S_i Q_i$, $i = 1, \dots, n$, добавлены вспомогательные точки $T_i^1, T_i^2, \dots, T_i^s$ (нумерация идет от S_i к Q_i), где $s = p - 3$.

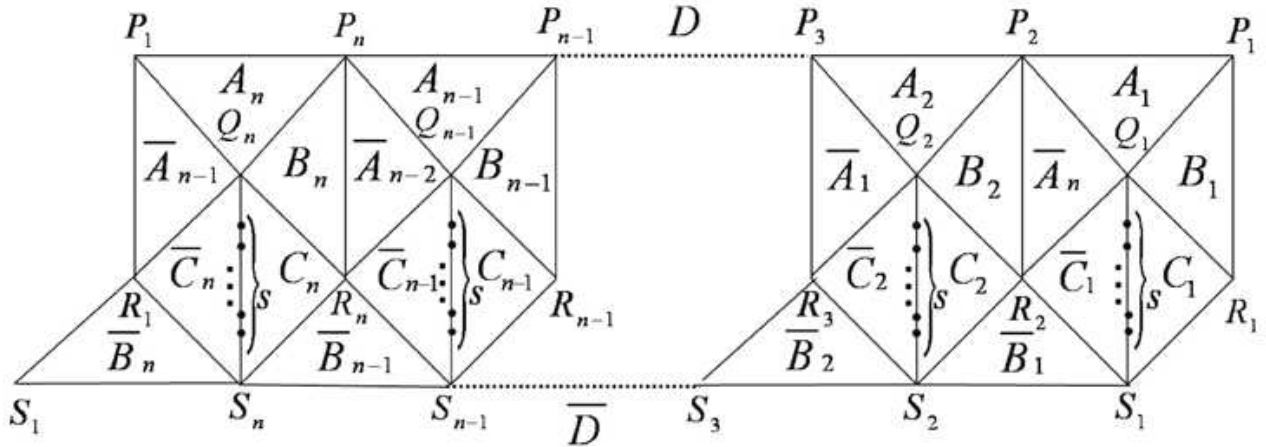


Рис. 1. Построение многообразия $M_n(p, q)$

Положим, что $\varphi_n(p, q)$ отождествляет грани $\mathcal{P}_n(p)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i : \mathbf{A}_i &\rightarrow \bar{\mathbf{A}}_i & [P_i P_{i+1} Q_i \rightarrow R_{i+2} P_{i+2} Q_{i+1}], \\ b_i : \mathbf{B}_i &\rightarrow \bar{\mathbf{B}}_i & [R_i P_i Q_i \rightarrow S_i S_{i+1} R_{i+1}], \\ c_i : \mathbf{C}_i &\rightarrow \bar{\mathbf{C}}_i & [Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow T_i^s Q_i R_{i+1} S_i T_i^1 \dots T_i^{s-1}], \quad \text{если } q = 1; \\ & & [Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow T_i^{s-1} T_i^s Q_i R_{i+1} S_i T_i^1 \dots T_i^{s-2}], \quad \text{если } q = 2; \\ & & \dots \dots \dots \\ & & [Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow T_i^1 \dots T_i^s Q_i R_{i+1} S_i], \quad \text{если } q = p - 3; \\ & & [Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow S_i T_i^1 \dots T_i^s Q_i R_{i+1}], \quad \text{если } q = p - 2; \\ & & [Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow R_{i+1} S_i T_i^1 \dots T_i^s Q_i], \quad \text{если } q = p - 1; \\ d : \mathbf{D} &\rightarrow \bar{\mathbf{D}} & [P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n \rightarrow S_3 S_4 \dots S_1 S_2], \end{aligned}$$

где $i = 1, \dots, n$, все индексы берутся по модулю n и грани отождествляются в соответствии с указанным порядком вершин.

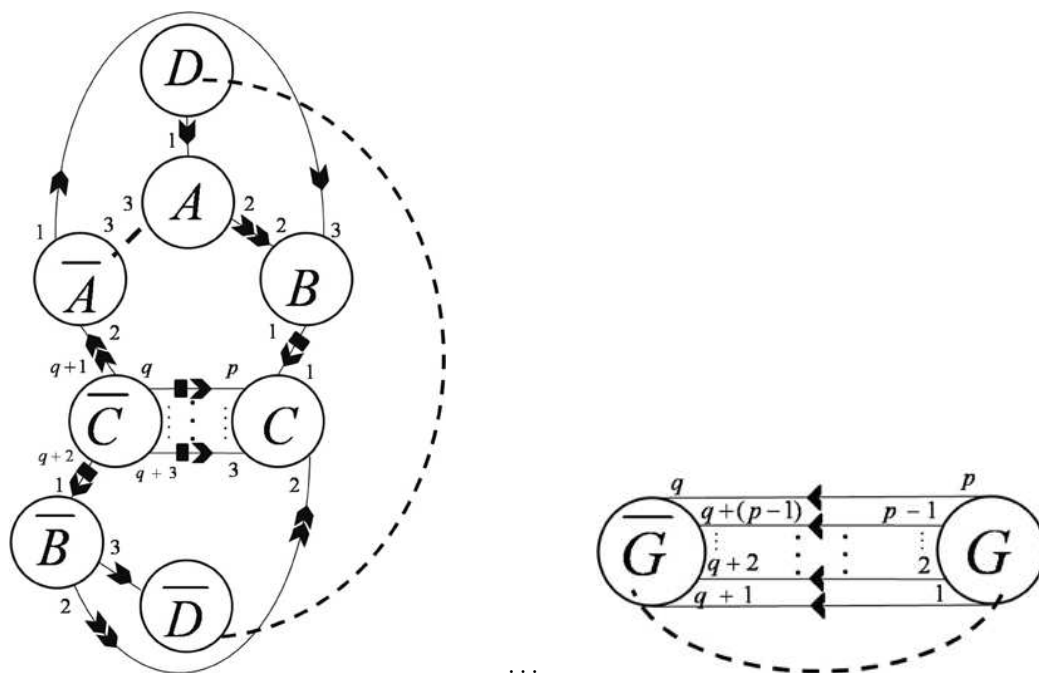
Теорема 1. [1] Факторпространство $M_n(p, q) = \mathcal{P}_n(p)/\varphi_n(p, q)$, где $n \geq 2$, $p \geq 3$, $0 < q < p$, $(p, q) = 1$ является ориентируемым трехмерным многообразием.

Для доказательства теоремы достаточно проверить эйлерову характеристику по теореме Зейферта–Трельфалля: комплекс, получающийся путем попарного отождествления сторон многогранника, является замкнутым трехмерным многообразием в том и только в том случае, когда его эйлерова характеристика равна 0 (см. [2]).

Теорема 2. [1] Многообразия $M_n(p, q)$, где $n \geq 2$, $p \geq 3$, $0 < q < p$, $(p, q) = 1$ являются n -лист-

ными циклическими накрытиями линзового пространства $L(p, q)$, разветвленными над 2-компонентным зацеплением.

Доказательство теоремы основано на построении диаграмм Хегора фактор-многообразий (рис. 2) и их преобразовании к каноническим диаграммам линзовых пространств с помощью последовательности движений Зингера. Хорошо известно, что две диаграммы Хегора представляют одно и то же трехмерное многообразие тогда и только тогда, когда от одной диаграммы к другой можно перейти с помощью конечной последовательности преобразований, каждое из которых является движением Зингера [15].

Рис. 2. Преобразования диаграммы Хегора факторпространства $M_n(p, q)/\rho_n$

Построенный класс многообразий $M_n(p, q)$ содержит, в частности, бесконечные серии многообразий из [7, 8, 9].

3. Оценки сложности для класса замкнутых трехмерных многообразий, обобщающих многообразие Эверита

В последние годы задача вычисления сложности трехмерных многообразий является актуальной и довольно полезной для классификации трехмерных многообразий. Её полезность состоит в том, что значение сложности многообразия показывает, насколько сложно устроено это многообразие. А известно, что обычно классификация геометрических объектов ведется в порядке возрастания их сложности. По настоящее время точные значения сложности известны для табличных многообразий [4], а также для двух бесконечных серий гиперболических многообразий с краем [5], для нескольких бесконечных серий линзовых пространств и для обобщенных пространств кватернионов [11], [12]. Точные значения сложности многообразий Паолуци–Циммермана получены в работе [2]. В данной работе найдены верхние оценки сложности для некоторых многообразий из двухпараметрического класса замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий $M_n(p, q)$ ($n \geq 1$, $p \geq 3$, $0 < q < p$ и $(p, q) = 1$).

Напомним, что разбиение трехмерного многообразия M в объединение двух полных кренделей рода g без общих внутренних точек называется *разбиением Хегора* рода g многообразия M . Род Хегора многообразия определяется как минимальный род его разбиений Хегора. Известно, что любое замкнутое ориентируемое трехмерное мно-

гообразие M можно представить в виде объединения двух полных кренделей H и H' с общим краем: $M = H \cup H'$ и $H \cap H' = \partial H = \partial H'$ (крендели H и H' обязаны иметь одинаковый род). Считается, что, чем больше род, тем многообразие сложнее. Трехмерная сфера S^3 является единственным ориентируемым многообразием с нулевым родом Хегора. Род Хегора равен единице лишь для линзовых пространств, включая многообразие $S^2 \times S^1$.

Пусть H_g — полный крендель рода g , и $D_1, D_2, \dots, D_g$ — собственные непересекающиеся диски в H_g . Говорят, что $D_1, D_2, \dots, D_g$ составляют *систему меридиональных дисков*, если они разбивают H_g до шара, т. е. если $H_g \setminus (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_g) \cong B^3$. Границы меридиональных дисков называются *меридианами*.

Наиболее распространенным способом задания замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий является задание их через диаграммы Хегора. Пусть $M = H_g \cup H'_g$ — разбиение Хегора, $S_g = \partial H_g = \partial H'_g$ — поверхность Хегора, $u = \{u_1, u_2, \dots, u_g\}$ — система меридианов первого кренделя H_g , $v = \{v_1, v_2, \dots, v_g\}$ — система меридианов второго кренделя H'_g . Тройка (S_g, u, v) называется *диаграммой Хегора* многообразия M .

На основе построенной теории спайнов С. В. Матвеевым было введено понятие сложности трехмерного многообразия $s(M)$ [4]. Напомним, что полиэдр $P \subset M$ называется *спайном* многообразия M с краем, если $M \setminus P$ гомеоморфно $\partial M \times (0, 1]$. Полиэдр P называется *спайном* замкнутого многообразия M , если P является спайном многообразия $M \setminus \text{Int} D^3$, где $\text{Int} D^3$ —

открытый трехмерный шар в M .

Простой двумерный полиэдр имеет особенно-сти только двух типов: конус над полным графом с четырьмя вершинами и конус над окружностью с диаметром. В первом случае особая точка называется *истинной* вершиной, во втором – *тройной* точкой. Тройные точки организуются в тройные линии, соединяющие истинные вершины, и тройные окружности. Неособые точки организуются в 2-компоненты. Если спайн имеет хотя бы одну истинную вершину и все его 2-компоненты являются клетками, то полиэдр называется *специальным*.

Почти простой полиэдр получается из простого добавлением графа, валентности вершин которого не меньше двух, и приклеиванием к компонентам связности дуг по обоим концам. Спайн P трехмерного многообразия M называется *специальным*, *простым* или *почти простым*, если он является специальным, простым или почти простым полиэдром соответственно.

Сложность $s(M)$ многообразия M определяется как число истинных вершин его минимального (в смысле числа вершин) почти простого спайна.

Пусть T – произвольная триангуляция замкнутого трехмерного многообразия M , содержащая k тетраэдров. Тогда двумерный остов двойственного разбиения многообразия M на клетки является специальным спайном n раз пунктированного M , то есть многообразия M с удаленными шаровыми окрестностями вершин. Число истинных вершин этого спайна равно k . Удаление 2-компонент, разделяющих различные шаровые окрестности, приводит к почти специальному спайну $s \leq k$ истинными вершинами (см. [4]). Таким образом, сложность $s(M)$ замкнутого трехмерного многообразия M может быть найдена как минимальное число тетраэдров, необходимых для построения многообразия M , попарными отождествлениями их граней.

Например, сложность трехмерной сферы S^3 , проективного пространства RP^3 и линзового пространства $L(3, 1)$ равна 0. Поскольку в первом случае, в качестве ее почти простого спайна, можно взять точку (которая, конечно, не является истинной вершиной), во втором и третьем – их естественные почти специальные спайны представляют собой соответственно проективную плоскость RP^2 и факторпространство диска D^2 по стандартному действию поворотами группы Z^3 на его крае. Оказывается, что это единственные замкнутые неприводимые многообразия сложности 0.

Пусть $(F, \mu_i, \lambda_i, 1 \leq i \leq g)$ – диаграмма Хегора замкнутого трехмерного многообразия M . Здесь F – поверхность в M , разбивающая его на два полных кренделя рода g , а μ_i, λ_i – полные наборы меридианов этих кренделей. Тогда объединение поверхности F с $2g$ меридиональными дисками является простым спайном дважды пунктированного многообразия M . Число истинных вершин этого спайна равно общему числу точек пересечения меридианов. При слиянии двух шаров в один путем удаления одной из областей диаграммы число истинных вершин может только уменьшиться. Так как диаграммная сложность Хегора строится по разбиению Хегора определенного рода, то сложность Хегора определяется только для замкнутых многообразий [4].

Теорема 1. Для сложности многообразий $M_n(3, 1)$ ($n \geq 2$) имеет место следующая оценка $C(M_n(3, 1)) \leq 10(n - 1)$.

Доказательство теоремы состоит в построении диаграммы Хегора H многообразия $M_n(3, 1)$ (рис. 3) и в использовании понятия сложности (по Матвееву), где $10n$ – общее число точек пересечения меридианов, а 10 – число вершин на границе дисков $A_1, B_1, C_1, \bar{C}_1, \bar{A}_n$ в области $(A_1 B_1 C_1 \bar{C}_1 \bar{A}_n)$.

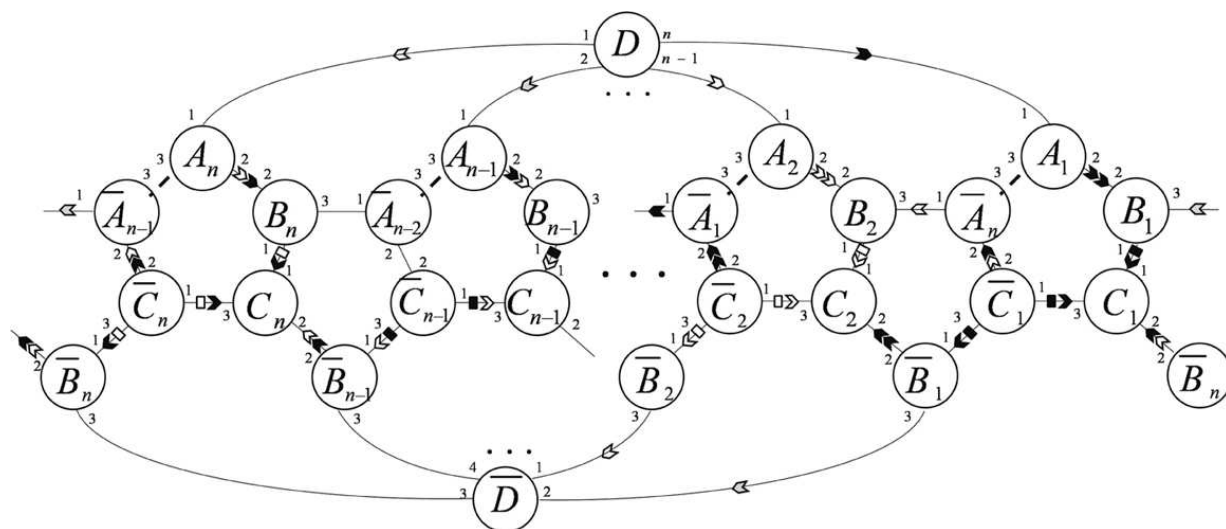


Рис. 3. Диаграмма Хегора многообразия $M_n(3, 1)$

Теорема 2. Для сложности многообразий $M_n(p, 1)$ ($n \geq 2, p \geq 3$) имеет место следующая оценка $C(M_n(p, 1)) \leq 10(n-1) + n(p-3)$.

Аналогично доказательству теоремы 1, мы строим диаграмму Хегора H многообразия $M_n(p, 1)$ (рис. 4) и используем понятие сложности многообразия.

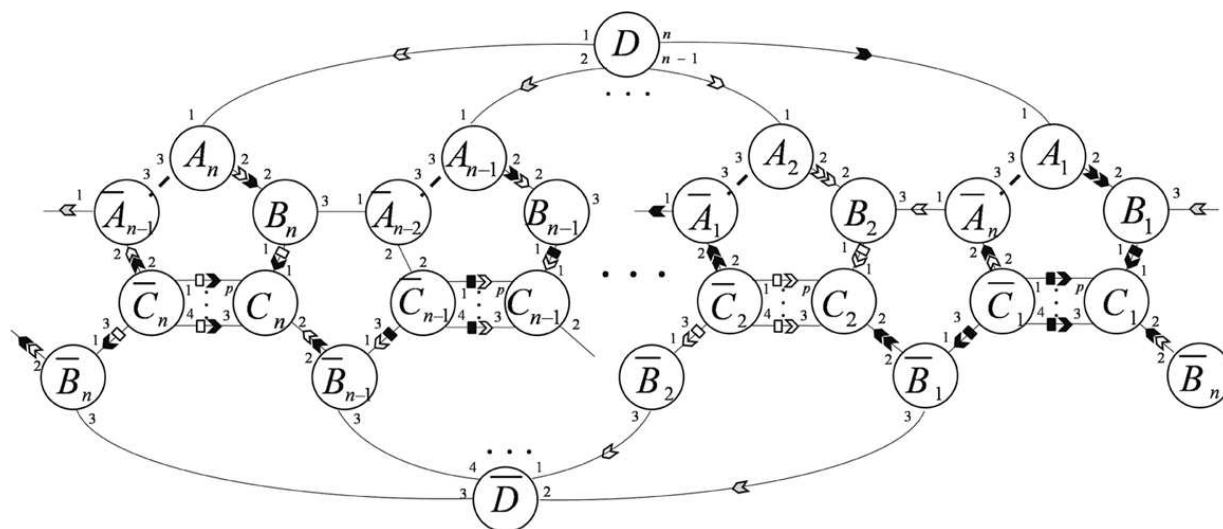


Рис. 4. Диаграмма Хегора многообразия $M_n(p, 1)$

Замечание. Вычисление сложностей многообразий $M_n(3, 1)$ ($n = 2, 3, 4, 5$) и $M_3(5, q)$ ($q = 1, 2, 3, 4$) с помощью программы “Распознава-

тель многообразий” [15] позволило получить следующие верхние оценки:

M	$M_2(3, 1)$	$M_3(3, 1)$	$M_4(3, 1)$	$M_5(3, 1)$	$M_3(5, 1)$	$M_3(5, 2)$	$M_3(5, 3)$	$M_3(5, 4)$
$C(M)$	≤ 6	≤ 15	≤ 22	≤ 29	≤ 21	≤ 18	≤ 18	≤ 21

Литература

- [1] Веснин, А. Ю. Разветвленные циклические накрытия линзовых пространств / А. Ю. Веснин, Т. А. Козловская // Сиб. матем. журн. – 2011. – Т. 52, № 3. – С. 542 – 554.
- [2] Веснин, А. Ю. Точные значения сложности многообразий Паолоуци–Циммермана / А. Ю. Веснин, Е. А. Фоминых // Доклады РАН. – 2011. – Т. 439, № 6. – С. 727 – 729.
- [3] Зейферт, Г. Топология / Г. Зейферт, В. Трельфалль. – Ижевск, 2001. – 448 с.
- [4] Матвеев, С. В. Распознавание и табулирование трехмерных многообразий / С. В. Матвеев // Доклады РАН. – 2005. – Т. 400, № 1. – С. 26 – 28.
- [5] Anisov, S. Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds / S. Anisov // Mosc. Math. J. – 2005. – Vol. 5, № 2. – С. 305 – 310.
- [6] Barbieri, E. Some series of honey-comb spaces / F. Barbieri, A. Cavicchioli, F. Spaggiari, // Rocky Mountain J. Math. – 2009. – Vol. 39, №2. – P. 381 – 398.
- [7] Cavicchioli, A. Topology of compact space forms from Platonic solids. I / A. Cavicchioli, F. Spaggiari, A. Telloni // Topology Appl. – 2009. – Vol. 156. – P. 812 – 822.
- [8] Cavicchioli, A. Topology of compact space forms from Platonic solids. II / A. Cavicchioli, F. Spaggiari, A. Telloni // Topology Appl. – 2010. – Vol. 157. – P. 921 – 931.
- [9] Cristofori, P. Cyclic generalizations of two hyperbolic icosahedral manifolds / P. Cristofori, T. Kozlovskaya, A. Vesnin // Topology Appl. submitted.
- [10] Everitt, B. 3-manifolds from compact space forms from Platonic solids / B. Everitt // Topology Appl. – 2004. – Vol. 138. – P. 253 – 263.
- [11] Jaco, W. Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // J. Topology. – 2009. – Vol. 2, №1. – P. 253 – 263.
- [12] Jaco, W. Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds / W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann // To appear in Algebr. Geom. Topol. – arXiv:0903.0112.
- [13] Mulazzani, M. The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links / M. Mulazzani, A. Vesnin // Atti Sem. Mat. Fis. Univ.

Modena. – 2001. – Vol. II. – P. 177 – 215.

[14] Mulazzani, M. *Cyclic presentation of groups and cyclic branched covering of (1,1) knots* / M. Mulazzani // Bull. Korean Math. Soc. – 2003. – Vol. 40, №. 1. – P. 101 – 108.

[15] Recognizer *Three-manifold Recognizer*, the computer program developed by members of the

topology group of Chelyabinsk State University.

[16] Singer, J. *Three-dimensional manifolds and their Heegaard diagrams* / J. Singer // Trans. Amer. Math. Soc. – 1933. – Vol. 35, №. 1. – P. 88 – 111.

[17] Weber, C. *Die Beiden Dodekaederäume* / C. Weber, H. Seifert // Math. Z. – 1933. – Vol. 37. – P. 237 – 253.

УДК 515.162.8

ПРИМАРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УЗЛОВ

Ф. Г. Кораблев

PRIME DECOMPOSITIONS OF VIRTUAL KNOTS

Ph. G. Korablev

Доказывается, что произвольный виртуальный узел представляется в виде связной суммы нескольких примарных и тривиальных виртуальных узлов, причем примарные слагаемые такого разложения определены однозначно, то есть определяются только исходным виртуальным узлом. Для этого на множестве узлов в утолщенных поверхностях вводятся два типа редукций и доказывается, что результат применения этих редукций к произвольному узлу в утолщенной поверхности существует и однозначно определен.

We prove that any virtual knot can be presented as a connected sum of several prime and trivial virtual knots. Prime summands of the presentation are defined uniquely, i.e. they are determined by the original knot. We introduce two types of reductions on the set of knots in thickened surfaces and prove that the result of any sequence of reductions exists and is defined uniquely.

Ключевые слова: виртуальный узел, связная сумма, теория корней.

Keywords: virtual knot, connected sum, root theory.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект № 10-01-96035) и Программы, выполняемой совместно Институтом математики и механики УрО РАН и Институтом математики СО РАН (проект № 09-С-1-1007).

1. Введение и предварительные сведения

Под узлом в утолщенной поверхности понимается простая замкнутая кривая K в прямом произведении $F \times I$, где F — замкнутая ориентируемая поверхность, $I = [0; 1]$ — отрезок. Удобно понимать такие узлы, как пары $(F \times I, K)$. Все узлы в утолщенных поверхностях рассматриваются с точностью до гомеоморфизмов, сохраняющих основания прямого произведения и рассматриваемых как гомеоморфизмы пар. Пусть $(F \times I, K)$ — узел в утолщенной поверхности. Выберем такую пару непересекающихся дисков $D_1, D_2 \subset F$, что $(D_i \times I) \cap K = \emptyset$, $i = 1, 2$. Операция стабилизации узла $(F \times I, K)$ состоит в вырезании из многообразия $F \times I$ цилиндров $D_i \times I$, $i = 1, 2$ и склеивании копий колец $\partial D_i \times I$ на крае получившегося многообразия по такому гомеоморфизму $\partial D_1 \times I \rightarrow \partial D_2 \times I$, чтобы в результате получился узел в утолщенной поверхности. Операция, обратная стабилизации, называется дестабилизацией и состоит в уменьшении рода поверхности F без изменения кривой K .

Два узла в утолщенных поверхностях $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ эквивалентны, если от одного к другому можно перейти с помощью последовательности преобразований стабилизации и дестабилизации. Виртуальным узлом называется класс эквивалентности узлов в утолщенных поверхностях (см. [1, 2, 3]).

Пусть $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ — два узла в утолщенных поверхностях. Для каждого $i = 1, 2$ выберем такой диск $D_i \subset F_i$, что пересечение $l_i = (D_i \times I) \cap K_i$ является тривиальной дугой в топологическом шаре $D_i \times I$. Склеим пары $((F_i \setminus \text{Int } D_i) \times I, K_i \setminus \text{Int } l_i)$ по такому обращающему индуцированные ориентации гомеоморфизму $\varphi: \partial D_1 \times I \rightarrow \partial D_2 \times I$, что $\varphi(\partial D_1 \times \{0\}) = \partial D_2 \times \{0\}$ и $\varphi(\partial l_1) = \partial l_2$. Получившийся в результате узел в утолщенной поверхности $(F \times I, K)$ называется кольцевой связной суммой узлов $(F_1 \times I, K_1)$ и $(F_2 \times I, K_2)$ (также см. [4, 5]). Операция кольцевой связной суммы является прямым обобщением операции связного суммирования классических узлов в S^3 на случай узлов в утолщенных поверхностях.

Операция кольцевой связной суммы узлов в