

УДК 519.177, 512.541

О СТРУКТУРЕ ГРУППЫ ПИКАРА ДЛЯ ЛЕСТНИЦЫ МЕБИУСА И ПРИЗМАТИЧЕСКОГО ГРАФА

М. А. Зиндинова, И. А. Медных

ON THE STRUCTURE OF PICARD GROUP FOR MOEBIUS LADDER GRAPH AND PRISM GRAPH

M. A. Zindinova, I. A. Mednykh

Понятие группы Пикара для графа, которую также называют якобианом или критической группой, было независимо введено многими авторами. Она является важным алгебраическим инвариантом конечного графа. В частности, ее порядок совпадает с числом порождающих деревьев. Последнее число хорошо известно для некоторых простейших семейств графов, таких как колесо, веер, призма, лестница и лестница Мебиуса. В то же время структура группы Пикара известна только в некоторых случаях. Цель данной статьи – определить структуру группы Пикара для двух характерных случаев: лестницы Мебиуса и призматического графа.

The notion of the Picard group of graph (also known as Jacobian group, sandpile group, critical group) was independently given by many authors. This is a very important algebraic invariant of a finite graph. In particular, the order of the Picard group coincides with the number of spanning trees for a graph. The latter number is known for the simplest families of graphs such as Wheel, Fan, Prism, Ladder and Moebius ladder graphs. At the same time the structure of the Picard group is known only in several cases. The aim of this paper is to determine the structure of the Picard group of the Moebius ladder and Prism graphs.

Ключевые слова: граф, группа Пикара, абелева группа, полиномы Чебышева.

Keywords: Graph, Picard group, Abelian group, Chebyshev polynomial.

Работа поддержана грантами РФФИ (09-01-00255, 10-01-00642), грантом АБЦП развития научного потенциала высшей школы (2.1.1/3707) и Федеральной целевой программой "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (02.740.11.0457).

1. Введение

Представим лестницу Мебиуса M_n порядка n как циклический граф $C_{2n}(1, n)$. В этом случае M_n может быть рассмотрена как правильный $2n$ -угольник, у которого n пар противоположных вершин соединены ребром (см. рис. 1). Можно также представить M_n как лестницу с n ступеньками на листе Мебиуса. Призма $Pr(n)$ представляет собой граф с $2n$ вершинами, соединенных так, как показано на рис. 2.

Цель данной статьи – найти структуру группы Пикара для лестницы Мебиуса M_n и призматического графа $Pr(n)$.

Понятие группы Пикара для графа (которую также называют якобианом или критической группой) было независимо введено многими авторами ([1], [2], [3], [4]). Она является важным алгебраическим инвариантом конечного графа. В частности, ее порядок совпадает с числом порождающих деревьев графа. Последнее число хорошо известно для некоторых простейших семейств графов, таких, как колесо, веер, призма, лестница и лестница Мебиуса [5]. В то же время структура группы Пикара известна только в некоторых случаях (см. список литературы в [6]).

Следуя Бейкеру и Норину [2], определим группу Пикара (или якобиан) для графа следующим образом.

Рассмотрим конечный, связный граф G , до-

пускающий кратные ребра, но не допускающий петли. Пусть $V(G)$ и $E(G)$ – это множества вершин и ребер G соответственно. Обозначим через $Div(G)$ свободную абелеву группу на $V(G)$. Элементы $Div(G)$ являются целочисленными линейными комбинациями элементов $V(G)$, то есть для любого $D \in Div(G)$ существует единственное представление $D = \sum_{x \in V(G)} D(x)(x)$, $D(x) \in \mathbb{Z}$. По аналогии с теорией римановых поверхностей элементы $Div(G)$ будем называть дивизорами на графе G . Определим степень элемента D следующей формулой: $deg(D) = \sum_{x \in V(G)} D(x)$. Обозначим через $Div^0(G)$ подгруппу группы $Div(G)$, состоящую из дивизоров нулевой степени.

Пусть f – $\mathbb{Z}$ -значная функция на $V(G)$. Определим дивизор f по следующей формуле:

$$div(f) = \sum_{x \in V(G)} \sum_{xy \in E(G)} (f(x) - f(y))(x).$$

Дивизор $div(f)$ естественным образом может быть отождествлен с оператором Лапласа функции f на графе G . Дивизоры вида $div(f)$, где f как описано выше, называются главными дивизорами. Обозначим через $Prin(G)$ группу главных дивизоров на G . Нетрудно заметить, что каждый главный дивизор имеет степень 0, поэтому группа $Prin(G)$ является подгруппой группы $Div^0(G)$.

Определим группу $Jac(G)$, называемую группой Пикара (или якобианом) графа G , как

фактор-группу

$$Jac(G) = Div^0(G)/Prin(G).$$

Группа $Jac(G)$ является конечной абелевой группой порядка t_G , где t_G – число порождающих деревьев графа G . (Это напрямую следует из теоремы Кирхгоффа, приведенной, например, в §14 в [7]). Более того, любая конечная абелева группа является группой Пикара некоторого графа.

Для фиксированной точки $x_0 \in V(G)$ определим отображение Абеля – Якоби $S_{x_0} : G \rightarrow Jac(G)$ следующей формулой: $S_{x_0}(x) = [(x) - (x_0)]$, где $[d]$ – это класс эквивалентности дивизора d .

Зададим на каждом ребре графа G одну из двух возможных ориентаций. Так как G не имеет петель, такая операция определена корректно. Пусть $\vec{E} = \vec{E}(G)$ – множество ориентированных ребер графа G . Для $e \in \vec{E}$ обозначим начальную вершину $o(e)$ и конечную вершину $t(e)$ соответственно. Определим поток e по формуле $\omega(e) = [t(e) - o(e)]$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \omega(e) &= [(t(e) - x_0) - (o(e) - x_0)] = \\ &= [[t(e) - x_0] - [o(e) - x_0]] = S_{x_0}(t(e)) - S_{x_0}(o(e)) \end{aligned}$$

не зависит от выбора исходной точки x_0 . В силу Леммы 1.8 в [2] (см. также [4]) группа Пикара $Jac(G)$ является абелевой группой, порожденной потоками $\omega(e)$, $e \in \vec{E}$, подчиняющимся следующим двум законам Кирхгоффа:

(I) Поток через каждую вершину графа G равен нулю. Это означает, что

$$\sum_{e \in \vec{E}, t(e)=x} \omega(e) = 0 \text{ для всех } x \in V(G).$$

(II) Поток вдоль каждого замкнутого ориентированного пути W в G равен нулю, то есть

$$\sum_{e \in W} \omega(e) = 0.$$

Напомним, что замкнутый ориентированный путь в G – это последовательность ориентированных ребер $e_i \in \vec{E}(G)$, $i = 1, \dots, n$, таких, что $t(e_i) = o(e_{i+1})$ для $i = 1, \dots, n-1$ и $t(e_n) = o(e_1)$.

2. Предварительные сведения

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$. Обозначим через $GCD(a_1, a_2, \dots, a_m) = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ наибольший общий делитель $a_1, a_2, \dots, a_m$ в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$. Мы будем использовать следующие очевидные свойства наибольшего общего делителя.

$$(i) \quad (a, a+b) = (a, b) = (a, a-b);$$

$$(ii) \quad (a, b, c) = (a, (b, c));$$

$$(iii) \quad (ka, kb) = k(a, b).$$

Введем полиномы Чебышева первого и второго рода:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)),$$

$$U_{n-1}(x) = \sin(n \arccos(x)) / \sin(\arccos(x)).$$

Приведем следующие основные свойства этих полиномов.

$$1^\circ \quad T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$2^\circ \quad U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x.$$

В данной статье мы преимущественно будем интересоваться значениями полиномов Чебышева в точке $x = 2$. В этом случае

$$T_n(2) = ((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n) / 2 \quad \text{и}$$

$$U_{n-1}(2) = ((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n) / (2\sqrt{3}).$$

Будем использовать следующую теорему о строении конечной абелевой группы.

Теорема А. Пусть $\mathcal{A}$ – конечная абелева группа, порожденная элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$ и удовлетворяющая системе уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

где $A = \{a_{ij}\}$ – целочисленная $m \times n$ матрица. Пусть D_j , $j = 1, \dots, r = \min(n, m)$ – это наибольшие общие делители всех $j \times j$ миноров матрицы A . Тогда

$$\mathcal{A} \cong \mathbb{Z}_{D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_2/D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{D_r/D_{r-1}}.$$

Последнее разложение известно также как нормальная форма Смита. Детальное доказательство этой теоремы можно найти в ([8], гл. 3.22).

3. Основной результат

3.1. Вычисление группы Пикара для лестницы Мебиуса

Рассмотрим лестницу Мебиуса M_n как граф, показанный на рис. 1, с пронумерованными вершинами $1, 2, \dots, 2n$. Обозначим через d_i , $i = 1, \dots, n$ поток вдоль ориентированного ребра $(i, i+n)$ с начальной вершиной i и конечной вершиной $i+n$. Также обозначим через x_i и X_i , $i = 1, \dots, n$ потоки вдоль ориентированных ребер $(i-1, i)$ и $(n+i-1, n+i)$ соответственно. Для простоты отождествим вершины 0 и $2n$.

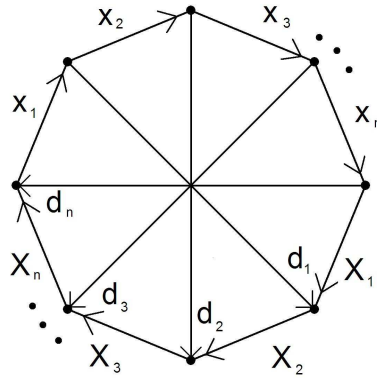


Рис. 1. Лестница Мёбиуса

Из первого закона Кирхгоффа имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} d_i = x_i - x_{i+1}, i = 1, \dots, n-1, d_n = x_n - X_1, \\ d_i = X_{i+1} - X_i, i = 1, \dots, n-1, d_n = x_1 - X_n. \end{cases} \quad (1)$$

Используя второй закон Кирхгоффа для замкнутых путей $W_i = (i, n+i, n+i+1, i+1)$, мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_{i+1} + d_{i+1} - X_{i+1} - d_i = 0, i = 1, \dots, n-1 \\ X_1 - d_1 - x_1 - d_n = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Выразим d_i для $i = 1, \dots, n-1$ из уравнений $d_i = x_i - x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. Подставим их в уравнения $x_{i+1} + d_{i+1} - X_{i+1} - d_i = 0$, $i = 1, \dots, n-2$. При этом мы получим представления для X_i , $i = 2, \dots, n-1$ через x_i , $i = 1, \dots, n$. Теперь, используя полученные выражения X_i , $i = 2, \dots, n-1$, а также уравнения $d_{n-1} = X_n - X_{n-1} = x_{n-1} - x_n$ и $d_1 = X_2 - X_1 = x_1 - x_2$, получим аналогичные представления для X_n и X_1 соответственно.

Имеем следующие соотношения между X_i и x_i .

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Подставляя эти тождества в уравнения вида $x_i - x_{i+1} = X_{i+1} - X_i$, $i = 2, \dots, n-2$, получим $n-3$ соотношения на $x_1, x_2, \dots, x_n$. Запишем их в первые $n-3$ строчки матрицы (4).

Используя уравнение $x_n + d_n - X_n - d_{n-1} = 0$ и вспоминая, что $d_n = x_1 - X_n$, $d_{n-1} = x_{n-1} - x_n$, получим следующее: $x_1 + 2x_{n-2} - 9x_{n-1} + 6x_n = 0$.

Теперь, используя $X_1 - d_1 - x_1 - d_n = 0$ и замечая, что $d_1 = x_1 - x_2$, $d_n = x_n - X_1$, имеем $6x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_n = 0$.

Рассмотрим второй закон Кирхгоффа для контура $(0, 1, 2, \dots, n)$, он запишется следующим образом: $x_1 + x_2 + \dots + x_n + d_n = 0$. Откуда извлекаем еще одно выражения для d_n . Подставляем его в уравнение $x_n + d_n - X_n - d_{n-1} = 0$. В результате получим еще одно соотношение на $x_1, x_2, \dots, x_n$. Оно записано в последней строчке матрицы (4).

Таким образом, получаем, что группа Пикара $Jac(M_n)$ порождена элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & -9 & 6 \\ 6 & -9 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \quad (4)$$

Теперь сократим число порождающих группы $Jac(M_n)$ с n до 3. А именно – покажем, что группа $Jac(M_n)$ порождена элементами x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющими трем линейным уравнениям.

Для этого, заметим, что порождающие

$x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению:

$$x_j - 5x_{j+1} + 5x_{j+2} - x_{j+3} = 0, j = 1, 2, \dots, n-3.$$

Характеристический многочлен этого уравне-

ния равен $1 - 5q + 5q^2 - q^3 = 0$.

Числа $q_1 = 1$, $q_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$ являются корнями этого многочлена. Отсюда общее решение рекурсии задается формулой $x_j = C_1 + C_2 q^j + C_3 q^{-j}$, где $q = 2 + \sqrt{3}$ и C_1, C_2, C_3 – константы, зависящие только от начальных значений x_1, x_2, x_3 . В результате мы получаем $x_4, x_5, \dots, x_n$ как линейную комбинацию x_1, x_2 и x_3 , коэффициенты которой могут быть явно найдены.

Подставляя полученные соотношения в последние три строки системы (4), имеем:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что $T_n(2) = (q^n + q^{-n})/2$ и $U_{n-1}(2) = (q^n - q^{-n})/(2\sqrt{3})$. Вычисляя напрямую, получаем следующие явные формулы для

a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$.

$$a_{11} = \frac{3}{2}T - \frac{5}{2}U, \quad a_{12} = -2T + 3U, \quad a_{13} = \frac{1}{2}T - \frac{1}{2}U,$$

$$a_{21} = \frac{11}{2}T - \frac{19}{2}U, \quad a_{22} = -7T + 12U, \quad a_{23} = \frac{3}{2}T - \frac{5}{2}U,$$

$$a_{31} = 2T - \frac{7}{2}U - \frac{n}{2}, \quad a_{32} = -\frac{5}{2}T + \frac{9}{2}U + 2n,$$

$$a_{33} = \frac{1}{2}T - U - \frac{n}{2},$$

где $T = 1 + T_n(2)$ и $U = U_{n-1}(2)$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 1. Пусть D_1 – наибольший общий делитель a_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Тогда

$$D_1 = GCD(n, T, U) / GCD(2, n).$$

Доказательство леммы 1. Имеем:

$$\begin{aligned} D_1 &= GCD(a_{ij}) = GCD(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}) = \\ &= GCD(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, T, -U, a_{31}, a_{32}, a_{33}) = \\ &= GCD(T, U, \frac{1}{2}(T - U), -\frac{1}{2}(U + n), \frac{1}{2}(-T + U) + 2n, \frac{1}{2}(T - n)) = \\ &= GCD(T, U, \frac{1}{2}(T - U), \frac{1}{2}(T - n) - \frac{1}{2}(U + n) + \frac{1}{2}(-T + U), \frac{1}{2}(-T + U) + 2n, \frac{1}{2}(T - n)) = \\ &= GCD(T, U, -n, \frac{1}{2}(T - U), \frac{1}{2}(-T + U) + 2n, \frac{1}{2}(T - n)) = GCD(T, U, n, \frac{1}{2}(T - U), \frac{1}{2}(T - n)). \end{aligned}$$

Из основных рекурсивных соотношений для полиномов Чебышева 1° и 2°, имеем следующие свойства. Числа $T = 1 + T_n(2)$ и $U = U_{n-1}(2)$ той же четности, что и n . Более того, если n четно, то $\frac{T-n}{2}$ нечетно.

Рассмотрим два случая: n нечетно и n четно. В первом случае мы имеем:

$$\begin{aligned} D_1 &= GCD(T, U, n, \frac{1}{2}(T - U), \frac{1}{2}(T - n)) = \\ &= GCD(T, U, n, T - U, T - n) = \\ &= GCD(T, U, n) = GCD(n, T, U) / GCD(2, n). \end{aligned}$$

Во втором случае:

$$D_1 = GCD(T, U, n, \frac{1}{2}(T - U), \frac{1}{2}(T - n)).$$

Так как $\frac{T-n}{2}$ нечетно, получим:

$$\begin{aligned} D_1 &= GCD(\frac{1}{2}T, \frac{1}{2}U, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(T - U), \frac{1}{2}(T - n)) = \\ &= GCD(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}T, \frac{1}{2}U) = GCD(n, T, U) / 2 = \\ &= GCD(n, T, U) / GCD(2, n). \end{aligned}$$

Теперь наша цель – найти наибольший общий делитель всех миноров порядка 2 матрицы $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Обозначим через m_{ij} минор порядка 2, полученный удалением i -ой строки и j -ого столбца матрицы A . В результате вычислений имеем:

$$m_{11} = -m_{22} = \frac{1}{2}((n+1)T) - nU,$$

$$m_{12} = -m_{23} = (-\frac{1}{2} - 2n)T + \frac{7n}{2}U,$$

$$m_{13} = \frac{1}{2}(1 + 15n)T - 13nU, \quad m_{21} = \frac{1}{2}T - \frac{n}{2}U,$$

$$m_{31} = -m_{32} = m_{33} = T.$$

Докажем также следующую лемму.

Лемма 2. Пусть D_2 – наибольший общий делитель миноров m_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Тогда

$$D_2 = GCD(T, nU) / GCD(2, n).$$

Доказательство леммы 2. Из явного вида формул для m_{ij} имеем:

$$\begin{aligned} D_2 &= GCD(m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{33}) = GCD(m_{11}, m_{12} + m_{21}, m_{13}, m_{21}, m_{33}) = \\ &= GCD(m_{11}, m_{12} + m_{21} + 2nm_{33}, m_{13} - 7nm_{33} + m_{11} - (n+1)m_{33}, m_{21}, m_{33}) = \end{aligned}$$

$$= GCD(\frac{1}{2}((n+1)T) - nU, 3nU, -14nU, \frac{1}{2}T - \frac{n}{2}U, T) = GCD(\frac{1}{2}((n+1)T) - nU, nU, \frac{1}{2}T - \frac{n}{2}U, T).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $n = 2m$ четно.

$$\begin{aligned} D_2 &= GCD(\frac{1}{2}((2m+1)T) - 2mU, 2mU, \frac{1}{2}T - \frac{2m}{2}U, T) = \\ &= GCD(\frac{1}{2}T, 2mU, \frac{1}{2}T - mU, T) = GCD(\frac{1}{2}T, 2mU, -mU) = \\ &= GCD(\frac{1}{2}T, mU) = GCD(\frac{1}{2}T, \frac{2m}{2}U) = GCD(T, nU)/2 = GCD(T, nU)/GCD(2, n). \end{aligned}$$

С другой стороны, когда $n = 2m + 1$ нечетно, оба T и U нечетны. Получим:

$$Jac(M(n)) = \mathbb{Z}_{D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_2/D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2}.$$

$$\begin{aligned} D_2 &= GCD((m+1)T - (2m+1)U, \\ &\quad (2m+1)U, \frac{1}{2}T - \frac{2m+1}{2}U, T) = \\ &= GCD((2m+1)U, \frac{1}{2}T - \frac{2m+1}{2}U, T) = \\ &= GCD((2m+1)U, T - (2m+1)U, T) = \\ &= GCD(T, (2m+1)U) = GCD(T, nU). \end{aligned}$$

Пусть D_3 — определитель матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. По теореме Кирхгофа, D_3 совпадает с числом порождающих деревьев лестницы Мебиуса $M(n)$. Это число хорошо известно и было независимо вычислено многими авторами (J. Sedláček, J.W. Moon, N. Biggs и др.) [5]. Приведем этот результат в следующем виде.

Лемма 3. Пусть D_3 — определитель матрицы $\{a_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Тогда D_3 выражается следующей формулой:

$$D_3 = nT,$$

где $T = 1 + T_n(2)$, а $T_n(2) = ((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)/2$ — полином Чебышева первого рода.

Из основной теоремы о конечных абелевых группах (Теорема А) имеем следующее разложение группы Пикара для $M(n)$:

Принимая во внимание леммы 1, 2 и 3, получим следующую теорему.

Теорема 1. Группа Пикара лестницы Мебиуса $M(n)$ имеет следующее представление:

$$Jac(M(n)) = \mathbb{Z}_{\frac{(n,T,U)}{(2,n)}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{(T,nU)}{(n,T,U)}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{(2,n)nT}{(T,nU)}},$$

где $(l, m, n) = GCD(l, m, n)$, $T = 1 + T_n(2)$, $U = U_{n-1}(2)$, а $T_n(2) = ((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)/2$ и $U_{n-1}(2) = ((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n)/(2\sqrt{3})$ — полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно.

3.2. Вычисление группы Пикара для призматического графа

Рассмотрим призму $Pr(n)$ как граф, изображенный на рис. 2, с пронумерованными вершинами $1, 2, \dots, n, n+1, \dots, 2n$. Обозначим через d_i , $i = 1, \dots, n$ поток вдоль ориентированного ребра $(i, i+n)$ с начальной вершиной i и конечной вершиной $i+n$. Также обозначим через X_i и x_i потоки вдоль ориентированных ребер $(i, i+1)$ и $(i+n, i+n+1)$ соответственно.

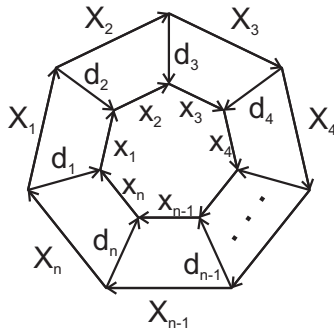


Рис. 2. Призматический граф

Из первого закона Кирхгофа имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} d_1 = x_1 - x_n, & d_i = x_i - x_{i-1}, & i = 2, \dots, n, \\ d_1 = X_n - X_1, & d_i = X_{i-1} - X_i, & i = 2, \dots, n. \end{cases} \quad (6)$$

Используя второй закон Кирхгофа для замкнутых путей $W_i = (i, n+i, n+i+1, i+1)$, мы имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} d_i + x_i - d_{i+1} - X_i = 0, & i = 1, \dots, n-1 \\ d_n + x_n - d_1 - X_n = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Подставляя d_i , $i = 1, \dots, n$, выраженные из первой строки системы (6) в систему (7), имеем следующие соотношения между X_i и x_i .

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Подставляем полученные выражения X_i через x_i в следующие выражения из системы (6): $x_1 - x_n = X_n - X_1$, $x_i - x_{i-1} = X_{i-1} - X_i$, $i = 2, \dots, n-1$, получим $n-1$ соотношения на x_i , $i = 1, \dots, n$. Заметим, что, по второму за-

кону Кирхгоффа, для контура $(n+1, \dots, 2n)$, $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

Таким образом, группа Пикара $Jac(Pr(n))$ порождена элементами $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющими следующим соотношениям:

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & 5 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 5 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -5 & 5 & -1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -5 \\ -5 & 5 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-3} \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

Теперь сократим число порождающих группы $Jac(Pr(n))$ с n до 3. А именно – покажем, что группа $Jac(Pr(n))$ порождена элементами x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющими трем линейным уравнениям.

Для этого, заметим, что порождающие $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют следующему рекурсивному соотношению:

$$x_j - 5x_{j+1} + 5x_{j+2} - x_{j+3} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-3.$$

Характеристический многочлен полученного уравнения равен $1 - 5q + 5q^2 - q^3 = 0$. Числа $q_1 = 1$, $q_{2,3} = 2 \pm \sqrt{3}$ являются корнями этого многочлена. Отсюда, общее решение рекурсии задается формулой $x_j = C_1 + C_2 q^j + C_3 q^{-j}$, где $q = 2 + \sqrt{3}$ и C_1, C_2, C_3 – константы, зависящие только от начальных значений x_1, x_2, x_3 . В результате мы получаем $x_4, x_5, \dots, x_n$ как линейную комбинацию x_1, x_2 и x_3 , коэффициенты которой могут быть явно найдены.

Подставляя полученные соотношения в последние три строки системы (9), имеем:

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11}x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 = 0, \\ \tilde{a}_{21}x_1 + \tilde{a}_{22}x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = 0, \\ \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + \tilde{a}_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Заметим, что $T_n(2) = (q^n + q^{-n})/2$ и $U_{n-1}(2) = (q^n - q^{-n})/(2\sqrt{3})$. Вычисляя напрямую, по-

лучаем следующие явные формулы для $\tilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11} &= -7L + 12U, & \tilde{a}_{12} &= 9L - 15U, \\ \tilde{a}_{13} &= -2L + 3U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{21} &= \frac{11}{2}L - \frac{19}{2}U, & \tilde{a}_{22} &= -7L + 12U, \\ \tilde{a}_{23} &= \frac{3}{2}L - \frac{5}{2}U, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{31} &= -2L + \frac{7}{2}U - \frac{n}{2}, & \tilde{a}_{32} &= \frac{5}{2}L - \frac{9}{2}U + 2n, \\ \tilde{a}_{33} &= -\frac{1}{2}L + U - \frac{n}{2}, \end{aligned}$$

где $L = T_n(2) - 1$ и $U = U_{n-1}(2)$.

Теперь докажем следующую лемму.

Лемма 4. Пусть D_1 – наибольший общий делитель $\tilde{a}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Тогда

$$D_1 = \text{GCD}(n, L, U) / \text{GCD}(2, n).$$

Доказательство леммы 4. Имеем:

$$\begin{aligned}
D_1 &= GCD(\tilde{a}_{ij}) = GCD(\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12} - 5\tilde{a}_{13}, \tilde{a}_{13}, \tilde{a}_{21} - 4\tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{22}, \tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{33}) = \\
&= GCD(\tilde{a}_{11}, -L, \tilde{a}_{13}, -\frac{1}{2}L - \frac{1}{2}U, \tilde{a}_{23}, \tilde{a}_{31}, \tilde{a}_{32}, \tilde{a}_{33}) = \\
&= GCD(-L, 3U, -\frac{1}{2}(L+U), -4U, \frac{1}{2}(7U-n), \frac{1}{2}(L-9U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)+U) = \\
&= GCD(L, U, -\frac{1}{2}(L+U), \frac{1}{2}(U-n), \frac{1}{2}(L-U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, -\frac{1}{2}(L+U), \frac{1}{2}(U-n) - \frac{1}{2}(L+n), \frac{1}{2}(L-U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, -\frac{1}{2}(L+U), -\frac{1}{2}(L-U) - n, \frac{1}{2}(L-U)+2n, -\frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(L+U), \frac{1}{2}(L-U), \frac{1}{2}(L+n)) = GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(U+n), \frac{1}{2}(L+n)).
\end{aligned}$$

Из основных рекурсивных соотношений для j -ого столбца матрицы $\tilde{A}$. В результате непосредственных вычислений имеем:

Теперь рассмотрим два случая: когда n нечетно и когда n четно. В первом случае мы имеем:

$$m_{11} = \frac{1}{2}(n+1)L - nU, \quad m_{12} = (-\frac{1}{2} - 2n)L + \frac{7n}{2}U,$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(U+n), \frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(L, U, n, U+n, L+n) = \\
&= GCD(L, U, n) = GCD(n, L, U)/GCD(2, n).
\end{aligned}$$

Во втором случае, учитывая четность n и свойства 1° и 2° полиномов Чебышева, получим:

$$\begin{aligned}
m_{13} &= \frac{1}{2}(1+15n)L - 13nU, \\
m_{21} &= -(\frac{n}{2}+1)L + \frac{3n}{2}U, \quad m_{22} = (\frac{5n}{2}+1)L - \frac{9n}{2}U, \\
m_{23} &= -(\frac{19n}{2}+1)L + \frac{33n}{2}U, \\
m_{31} &= -m_{32} = m_{33} = L.
\end{aligned}$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 5. Пусть D_2 – наибольший общий делитель миноров m_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$. Тогда

$$D_2 = GCD(T, nU)/GCD(2, n).$$

$$\begin{aligned}
D_1 &= GCD(L, U, n, \frac{1}{2}(U+n), \frac{1}{2}(L+n)) = \\
&= GCD(n, L, U)/2 = GCD(n, L, U)/GCD(2, n).
\end{aligned}$$

Теперь наша цель – найти наибольший общий делитель всех миноров порядка 2 матрицы $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Обозначим через m_{ij} минор порядка 2, полученный удалением i -ой строки и

Доказательство леммы 5. Из свойств явной формулы для m_{ij} имеем:

$$\begin{aligned}
D_2 &= GCD(m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{21}, m_{22}, m_{23}, m_{31}) = \\
&= GCD(m_{11}, m_{12} + 2nm_{31}, m_{13} - 7nm_{31}, m_{21} + m_{31}, m_{22} - (2n+1)m_{31}, m_{23} + (9n+1)m_{31}, m_{31}) = \\
&= GCD(\frac{n+1}{2}L - nU, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U, \frac{n+1}{2}L - 13nU, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U, \frac{n}{2}L - \frac{9n}{2}U, -\frac{n}{2}L + \frac{33n}{2}U, L) = \\
&= GCD(\frac{n+1}{2}L - nU, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U, -12nU, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U, -3nU, 15nU, L) = \\
&= GCD(4nU, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U, -3nU, L) = \\
&= GCD(nU, -\frac{1}{2}L + \frac{7n}{2}U, -\frac{n}{2}L + \frac{3n}{2}U, L) = GCD(nU, -\frac{1}{2}L + \frac{n}{2}U, -\frac{n}{2}L + \frac{n}{2}U, L).
\end{aligned}$$

Вначале рассмотрим случай, когда $n = 2m$ четно.

$$\begin{aligned}
&= GCD(2mU, -\frac{1}{2}L + mU, mU, L) = \\
&= GCD(\frac{1}{2}L, mU) = GCD(\frac{1}{2}L, \frac{2m}{2}U) = \\
&= GCD(L, nU)/2 = GCD(L, nU)/GCD(2, n).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2 &= GCD(nU, -\frac{1}{2}L + \frac{n}{2}U, -\frac{n}{2}L + \frac{n}{2}U, L) = \\
&= GCD(2mU, -\frac{1}{2}L + mU, -mL + mU, L) =
\end{aligned}$$

Пусть теперь $n = 2m + 1$ нечетно, тогда, в си-

лу свойств 1° и 2° , оба числа L и U нечетны. В результате получим:

$$\begin{aligned} D_2 &= GCD(nU, -\frac{1}{2}L + \frac{n}{2}U, -\frac{n}{2}L + \frac{n}{2}U, L) = \\ &= GCD((2m+1)U, -\frac{1}{2}L + \frac{2m+1}{2}U, \\ &\quad -\frac{2m+1}{2}L + \frac{2m+1}{2}U, L) = \\ &= GCD((2m+1)U, -L + (2m+1)U, \\ &\quad -(2m+1)L + (2m+1)U, L) = \\ &= GCD((2m+1)U, L) = GCD(nU, L). \end{aligned}$$

Пусть D_3 – определитель матрицы $\{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. По теореме Кирхгофа, D_3 совпадает с числом порождающих деревьев призматического графа $Pr(n)$. Это число хорошо известно и было независимо вычислено многими авторами (J. Sedláček, J.W. Moon, N. Biggs и др.) [5]. Приведем этот результат в следующем виде.

Лемма 6. Пусть D_3 – определитель матрицы $\{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1,2,3}$. Тогда D_3 выражается следующей формулой

$$D_3 = nL,$$

где $L = T_n(2) - 1$, а $T_n(2) = ((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)/2$ – полином Чебышева первого рода.

Из теоремы о строении конечных абелевых групп (Теорема А) получим разложение для группы Пикара графа $Pr(n)$:

$$Jac(Pr(n)) = \mathbb{Z}_{D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_2/D_1} \oplus \mathbb{Z}_{D_3/D_2}.$$

Принимая во внимание леммы 1, 2 и 3, установим следующую теорему:

Теорема 2. Группа Пикара призматического графа $Pr(n)$ имеет следующее представление:

$$Jac(Pr(n)) = \mathbb{Z}_{\binom{n,L,U}{2,n}} \oplus \mathbb{Z}_{\binom{L,nU}{n,L,U}} \oplus \mathbb{Z}_{\binom{(2,n)nL}{L,nU}},$$

где $(l, m, n) = GCD(l, m, n)$, $L = T_n(2) - 1$, $U = U_{n-1}(2)$, а $T_n(2) = ((2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n)/2$ и $U_{n-1}(2) = ((2 + \sqrt{3})^n - (2 - \sqrt{3})^n)/(2\sqrt{3})$ – полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно.

Литература

- [1] Cori, R. *On the sandpile group of a graph* / R. Cori, D. Rossin // European J. Combin. – 2000. – Vol. 21, no. 4. – P. 447 – 459.
- [2] Baker, M. *Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs* / M. Baker, S. Norine // Int. Math. Res. Notes. – 2009. – Vol. 15. – P. 2914 – 2955.
- [3] Biggs, N. L. *Chip-firing and the critical group of a graph* / N. L. Biggs // J. Algebraic Combin. – 1999. – Vol. 9, no. 1. – P. 25 – 45.
- [4] Bacher, R. *The lattice of integral flows and the lattice of integral cuts on a finite graph* / R. Bacher, P. de la Harpe and T. Nagnibeda // Bulletin de la Société Mathématique de France. – 1997. – Vol. 125. – P. 167 – 198.
- [5] Boesch, F. T. *Spanning tree formulas and Chebyshev polynomials* / F. T. Boesch, H. Prodinger // Graphs and Combinatorics. – 1986. – Vol. 2, №. 1. – P. 191 – 200.
- [6] Lorenzini, D. *Smith normal form and laplacians* / D. Lorenzini // Journal of Combinatorial Theory, Series B. – 2008. – Vol. 98, no. 6. – P. 1271 – 1300.
- [7] Biggs, N. L. *Algebraic potential theory on graphs* / N. L. Biggs // Bulletin of the London Mathematical Society. – 1997. – Vol. 29, no. 6. – P. 641 – 682.
- [8] Marcus, M. *A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities* / M. Marcus, H. Minc. – New York: Dover Publications: Mineola, 1992. – 192 pp.