

$$+(a + \gamma_1)\left(a + \frac{1}{\bar{\gamma}_1}\right) \dots \left(a + \gamma_g\right)\left(a + \frac{1}{\bar{\gamma}_g}\right) \quad (11)$$

Заметим, что если  $P(a) = 0$ , то  $P(-a) = 0$  и  $P(\tau a) = 0$ . Тем самым в качестве  $a_i, i = 1 \dots g$  следует выбрать корнями полинома  $P(a)$  для некоторого набора  $\gamma_i, i = 1 \dots g$ , и тогда условие леммы 2 будет удовлетворено автоматически.

Согласно лемме 1:

$$e^u = \frac{1}{2i \sum_{i=1}^g \eta_i \bar{w} + 1}.$$

Коэффициенты  $\eta_i(w, \bar{w})$  однозначно находятся из решения системы линейных уравнений, заданных равенствами  $\hat{\psi}_1(a_i) = \hat{\psi}_1(-a_i), i = 1 \dots g$ , возникающими из условия совпадения значений функций  $\hat{\psi}_1$  в точках  $a_i$  и  $-a_i, i = 1 \dots g$ . В качестве простой проверки знака  $e^u$  можно вычислить его значение в точке  $w = 0$ . Это значение, как нетрудно проверить, равно  $\frac{a_1^2 \dots a_g^2}{\bar{\gamma}_1^2 \dots \bar{\gamma}_g^2}$ , и подставляя вместо  $a_i, i = 1 \dots g$  корни полинома (11), получаем  $\frac{2(-1)^g}{|\gamma_1|^2 \dots |\gamma_g|^2}$ . Таким образом,  $e^u$  отрицательно для нечетных  $g$ . Во избежание громоздкости случая  $g \geq 3$ , приведем в явном виде лишь случай  $g = 1$ .

В простейшем случае  $g = 1$ , полином (11) имеет вид  $a^2 + \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}$ , и полагая  $\gamma = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$ , получаем, что  $a = -\sin \phi + i \cos \phi$ . Пусть  $\tau(x, y) = \sin \phi x + \cos \phi y$ , где  $w = x + iy$  и тогда

$$e^u = -\frac{(\cos(\tau(x, y)) + \rho \sin(\tau(x, y)))^2}{(\sin(\tau(x, y)) - \rho \cos(\tau(x, y)))^2}.$$

## Литература

- [1] Бердинский, Д. А. *Поверхности в трехмерных группах Ли* / Д. А. Бердинский, И. А. Тайманов // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1248 – 1264.
- [2] Бердинский, Д. А. *О поверхностях постоянной средней кривизны в группе Гейзенберга* / Д. А. Бердинский // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 1 – 7.
- [3] Бобенко, А. И. *Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения* / А. И. Бобенко // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, № 4. – С. 3 – 42.
- [4] Тайманов, И. А. *Гладкие вещественные конечнозонные решения уравнений типа sin-Gordon* / И. А. Тайманов // Математические заметки. – 1990. – Т. 47, № 1. – С. 147 – 156.

УДК 515.162.8

## ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ И ГРУППЫ КОКСЕТЕРА

А. Ю. Веснин

## INVARIANTS OF SPATIAL GRAPHS AND COXETER GROUPS

A. Yu. Vesnin

*В работе обсуждаются инварианты пространственных графов. Строится инвариант, имеющий структуру группы Коксетера. Приводятся примеры распознавания пространственных графов с помощью этого инварианта.*

*We discuss some invariants of spatial graphs. We construct an invariant which has a structure of a Coxeter group. We give examples to show that this invariant distinguishes some spatial graphs.*

**Ключевые слова:** пространственный граф, инвариант, преобразования Рейдемейстера, группы Коксетера.

**Keywords:** spatial graph, invariant, Reidemeister moves, Coxeter groups.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00642, 10-01-91056-НЦНИ-а) и интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН.

### 1. Пространственные графы, диаграммы и движения Рейдемейстера

В работе обсуждаются инварианты пространственных графов, т. е. вложений графов в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ . В последние годы многие методы построения и исследования инвариантов узлов переносятся на случай пространственных графов. Мы приводим пример построения инварианта, связанного с распутывающими соотношениями и инварианта, связанного с расстановкой

меток на дугах диаграммы. В обоих случаях даются примеры вычисления инвариантов для пространственных вложений тэта-графа.

Пусть  $G = (V, E)$  – конечный граф с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ , возможно, имеющий петли и кратные ребра. Пусть  $\mathcal{G} = f(G)$  – его пространственное вложение (т. е. отображение  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$  является вложением, которое мы всегда предполагаем конечно-звенным полигональным). Граф  $\mathcal{G} = f(G)$ , вложенный в  $\mathbb{R}^3$ , будем называть пространственным графом. В частности,

если  $G$  является циклом, то  $\mathcal{G}$  есть узел, а если  $G$  является объединением конечного числа попарно непересекающихся циклов, то  $\mathcal{G}$  есть зацепление. Очевидно, что теория пространственных графов сочетает в себе черты и методы как теории графов, так и теории узлов. Отметим, что графы, достаточно сложные в комбинаторном смысле, в топологическом смысле также устроены достаточно сложно. Проиллюстрируем это следующими результатами.

Обозначим через  $K_n$  полный граф на  $n \geq 3$

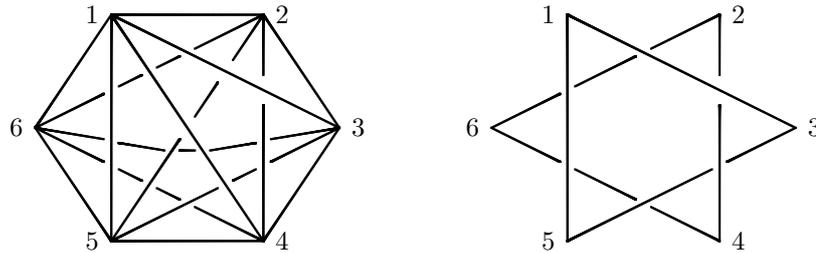


Рис. 1. Вложение графа  $K_6$  и нетривиальное двухкомпонентное зацепление  $(123) \cup (246)$

Кроме того, в [1] доказан следующий результат о заузленности циклов в пространственных вложениях полного графа.

**Теорема 2.** Любое пространственное вложение полного графа  $K_7$  содержит нетривиальный узел.

Поскольку полный граф  $K_n$ ,  $n \geq 7$ , содержит  $K_6$  и  $K_7$ , то очевидно, что любое пространственное вложение  $K_n$  содержит как нетривиальный узел, так и нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

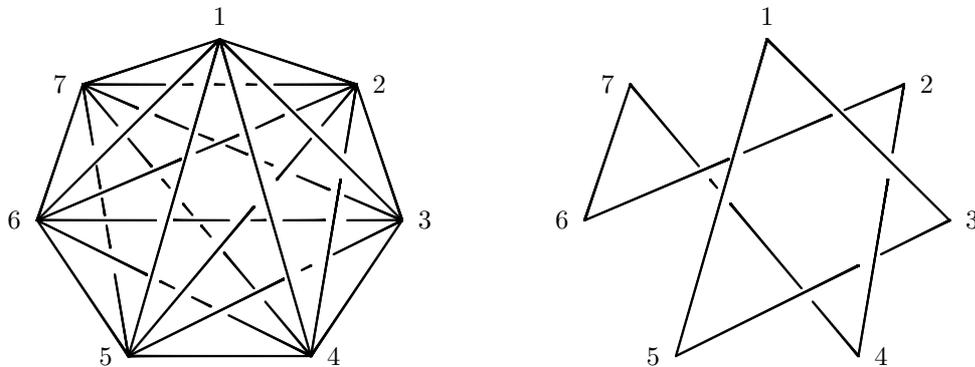


Рис. 2. Вложение графа  $K_7$  и нетривиальное двухкомпонентное зацепление  $(135) \cup (2476)$

вершинах. Конвей и Гордон в [1] и Закс в [2] доказали следующий результат о зацепленности пар циклов в пространственных вложениях полных графов.

**Теорема 1.** Любое пространственное вложение полного графа  $K_6$  содержит нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

Одно из пространственных вложений графа  $K_6$  приведено на рис. 1, где также указано содержащееся в нем нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

Часто в приложениях теории графов возникает вопрос о нахождении цикла, проходящего через все вершины графа. Простой цикл  $\gamma$  в  $G$ , содержащий все вершины графа, назовем гамильтоновым, а пару непересекающихся простых циклов  $(\alpha, \beta)$ , объединение которых содержит все вершины графа, – гамильтоновой парой циклов.

Рассмотрим полный граф  $K_7$ , изображенный на рис. 2.

Из приведенных выше результатов следует, что в любом пространственном вложении  $K_7$  найдется пара циклов, образующих нетривиальное двухкомпонентное зацепление. А именно – такая пара найдется в любом подграфе  $K_6$  графа  $K_7$ . Однако такая пара циклов не будет являться гамильтоновой парой. Вопрос о существовании в пространственных вложениях полных графов зацепленных гамильтоновых пар циклов был решен в [3].

**Теорема 3.** При  $n \geq 7$  любое пространственное вложение графа  $K_n$  содержит нетривиальное зацепление, являющееся вложением гамильтоновой пары циклов.

Одно из пространственных вложений графа  $K_7$  приведено на рис. 2, где также указана содержащаяся в нем гамильтонова пара циклов, реализующаяся при данном вложении как нетривиальное двухкомпонентное зацепление.

Существенное различие между теорией графов и теорией пространственных графов заключается в том, что вложения графов, достаточно простых с комбинаторной точки зрения, могут быть устроены весьма сложно. Пусть, например,  $\Theta$  – мультиграф, состоящий из двух вершин, соединенных тремя ребрами, изображенный на рис. 3 слева. Такой граф будем называть тэта-графом.

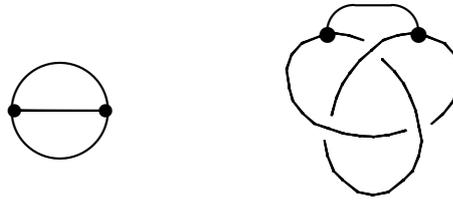


Рис. 3. Тэта-граф  $\Theta$  и его нетривиальное вложение

Обозначим его ребра через  $e_1$ ,  $e_2$  и  $e_3$ . Тогда  $S_1 = e_2 \cup e_3$ ,  $S_2 = e_1 \cup e_3$  и  $S_3 = e_1 \cup e_2$  – три цикла в  $\Theta$ . При каждом вложении  $f : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^3$  множества  $f(S_1)$ ,  $f(S_2)$  и  $f(S_3)$  являются узлами в  $\mathbb{R}^3$ , про которые мы будем говорить, что они ассоциированы с вложением. Например, для вложения, представленного на рис. 3 справа, одним из ассоциированных узлов является узел трилистник, а два других узла – тривиальные. Как установила Волкот, для любых трех заданных графов  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  найдется такое вложение  $f$  тэта-графа  $\Theta$ , что данные узлы являются его ассоциированными узлами:  $f(S_1) = K_1$ ,  $f(S_2) = K_2$  и  $f(S_3) = K_3$ . При этом вложение  $f$  не определяется узлами  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  однозначно.

Центральное место в теории пространственных графов занимает следующий вопрос: для двух заданных пространственных графов определить, являются ли они эквивалентными или нет? В отличие от понятия эквивалентности узлов, понятие эквивалентности пространственных графов является более деликатным.

Напомним, что под диаграммой узла (или зацепления) понимают его регулярную проекцию на плоскость (не пересекающую узел), оснащенную в каждой двойной точке информацией о том, какая дуга узла проходит дальше (выше), а какая – ближе (ниже), относительно выбранной плоскости. Обычно эта информация указывается на диаграмме прерыванием в окрестности двойной точки

проекции дуги, проходящей ниже. Типичные примеры диаграмм зацеплений приведены на рис. 1 и 2 справа. Диаграммы пространственных графов будут определены аналогично; их примеры приведены на этих же рисунках слева.

Говорят, что два узла  $K_1$  и  $K_2$  в  $\mathbb{R}^3$  эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изотопия  $\mathbb{R}^3$ , при которой  $K_1$  переходит в  $K_2$ . Классический результат Рейдемейстера [4] позволяет решать вопрос об эквивалентности узлов посредством изучения их диаграмм. А именно: узлы  $K_1$  и  $K_2$  эквивалентны тогда и только тогда, когда от диаграммы  $D_1$  первого узла можно перейти к диаграмме  $D_2$  второго узла с помощью плоских изотопий и конечной последовательности преобразований диаграмм, называемых сейчас преобразованиями Рейдемейстера. Эти преобразования приведены на рис. 4 под номерами (I), (II) и (III).

Ситуация с понятием эквивалентности для пространственных графов несколько сложнее. Дадим два определения изотопности графов в зависимости от ситуации в окрестности каждой вершины.

**Определение 1.** Пространственные графы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  гибко изотопны, если существует такая изотопия  $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \in [0, 1]$ , что  $h_0 = id$  и  $h_1(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$ .

Если для каждой вершины  $v$  пространственного графа  $\mathcal{G}$  существует шар  $B_v \subset \mathbb{R}^3$  с центром

в  $v$  и плоский диск  $P_v$  с центром в  $v$ , такие, что  $\mathcal{G} \cap B_v \subset P_v$ , то назовем  $\mathcal{G}$  плосковершинным графом.

и  $\mathcal{G}_2$  плоско изотопны, если существует такая изотопия  $h_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \in [0, 1]$ , что  $h_0 = id$ ,  $h_1(\mathcal{G}_1) = \mathcal{G}_2$  и  $h_t(\mathcal{G}_t)$  – плосковершинный граф для каждого  $t \in [0, 1]$ .

**Определение 2.** Плосковершинные графы  $\mathcal{G}_1$

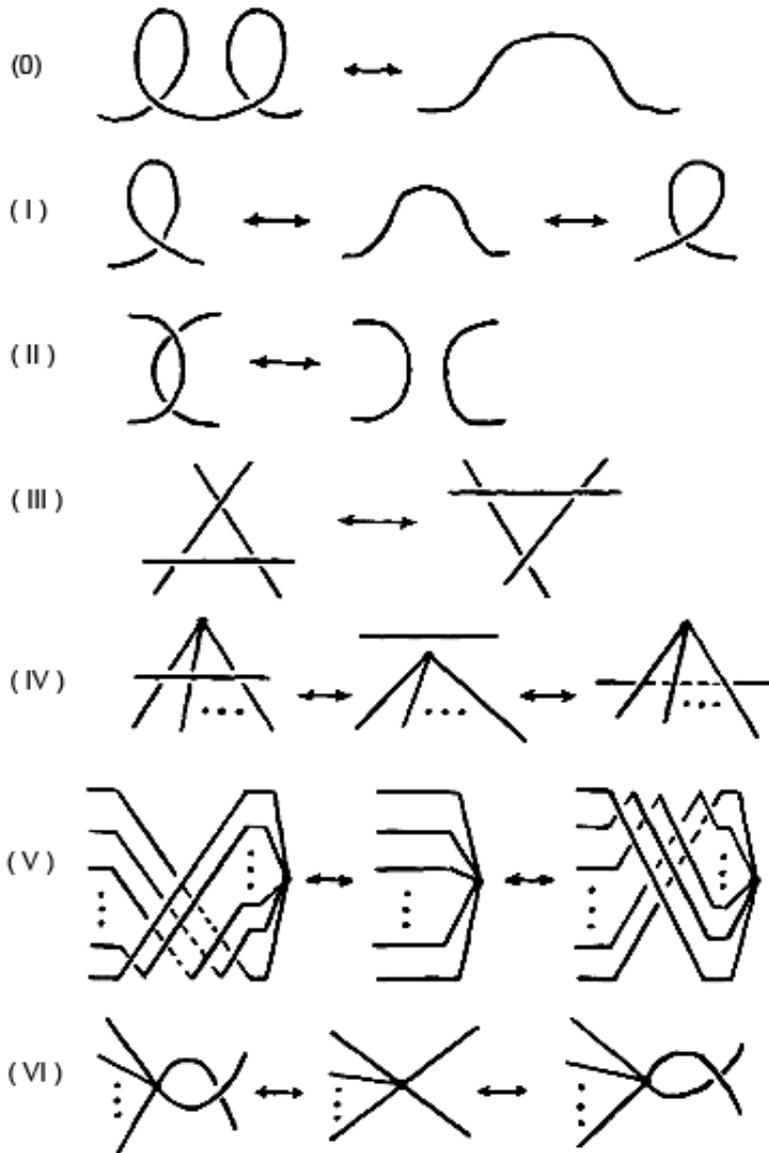


Рис. 4. Расширенные преобразования Рейдемейстера

Укажем связь между введенными понятиями изотопии пространственных графов и преобразованиями их диаграмм.

Пусть  $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}^3$  – пространственный граф. Отображение  $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  назовем регулярной проекцией, если образ каждой точки графа  $\mathcal{G}$  имеет либо один прообраз, либо два прообраза, лежащих на двух трансверсально проходящих одно под другим ребрах  $\mathcal{G}$ , причем число точек в  $p(\mathcal{G})$ , имеющих два прообраза (называемых двойными точками)

конечно. Очевидно, для пространственного графа  $\mathcal{G}$  всегда можно добиться малыми шевелениями, чтобы проекция  $p$  являлась регулярной.

Диаграммой пространственного графа  $\mathcal{G}$  называется образ  $p(\mathcal{G})$  с информацией о том, какое ребро проходит сверху в каждой двойной точке. Аналогично случаю узлов, пространственные графы также можно перечислять и классифицировать по минимальному числу двойных точек среди всех диаграмм. Пространственные вложения тэта-

графа  $\Theta$  принято называть тэта-кривыми. Диаграммы тэта-кривых, для которых минимальное число двойных точек в диаграмме не превосходит 5, приведены на рис. 5.

Рассмотрим элементарные преобразования диаграмм, приведенные на рис. 4. Эти преоб-

разования содержат преобразования Рейдемейстера диаграмм узлов и зацеплений (они указаны под номерами (I) – (III)). Множество преобразований (0) – (VI) будем называть расширенными преобразованиями Рейдемейстера.

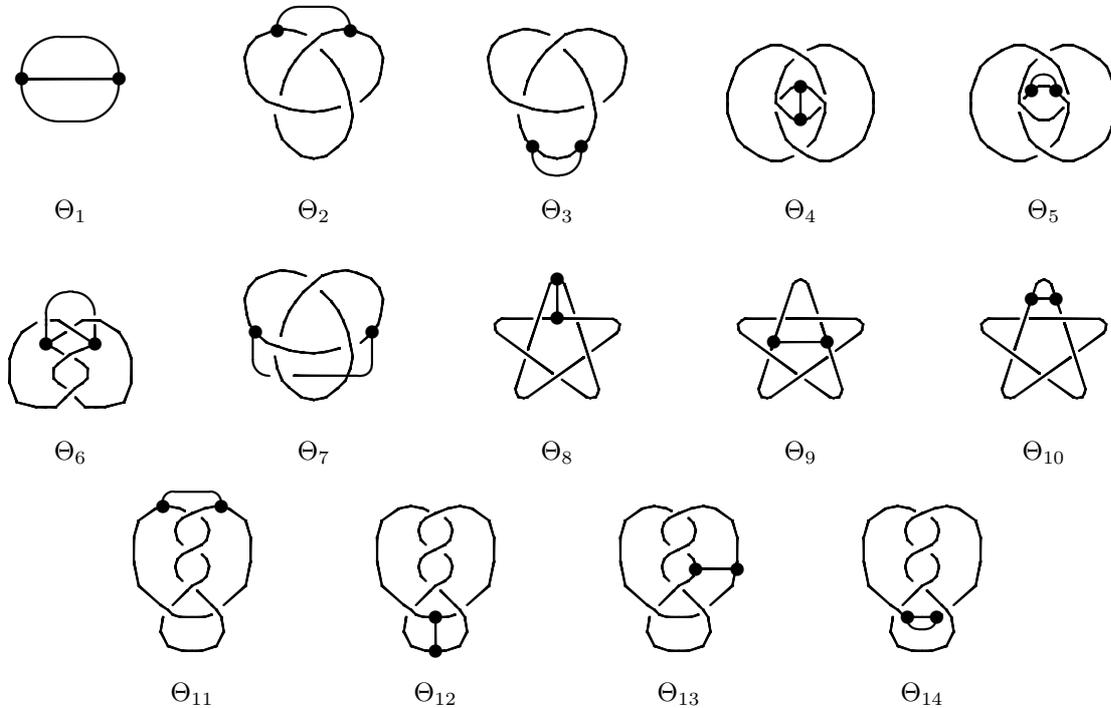


Рис. 5. Диаграммы тэта-кривых с не более, чем 5 двойными точками

Очевидно, преобразование (0) обобщается преобразованием (I); преобразование (I) является частным случаем преобразования (VI); преобразование (II) является частным случаем преобразования (IV); преобразование (V) является частным случаем комбинации преобразований (II), (III) и (VI).

Мы будем использовать следующую терминологию.

- Определение 3.** (1) Преобразования (I) – (VI) называются *гибкими деформациями*.  
 (2) Преобразования (I) – (V) называются *плоскими деформациями*.  
 (3) Преобразования (0) и (II) – (VI) называются *регулярными деформациями*.

Естественная связь между данными выше определениями следует из следующего результата, доказанного Кауффманом в [5].

**Лемма 1.** (1) *Пространственные графы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  гибко изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы связаны конечной последовательностью гибких деформаций и плоских изотопий.*  
 (2) *Плосковершинные пространственные графы  $\mathcal{G}_1$  и  $\mathcal{G}_2$  плоско изотопны тогда и только тогда, когда их диаграммы связаны конечной последова-*

*тельностью плоских деформаций и плоских изотопий.*

Этот результат открывает возможности изучения пространственных графов по их диаграммам, в частности, построения инвариантов, определяемых по диаграмме пространственного графа.

### 3. Полиномиальные инварианты пространственных графов

Направление, связанное с построением полиномиальных инвариантов, широко представлено в теории узлов. Прежде всего здесь нужно упомянуть полином Александера [6], полином Конвея [7], полином Джонса [8] и HOMFLY полином [9]. Как правило, полиномиальные инварианты строятся по диаграммам узлов или зацеплений, и доказательство инвариантности сводится к проверке инвариантности при преобразованиях Рейдемейстера.

Представляется естественным реализовать аналогичный подход и для построения полиномиальных инвариантов пространственных графов. Опираясь на расширенные преобразования Рейдемейстера, полиномиальные инварианты построили Ямада [10] и Йошинага [11]. Однако, как

оказалось, эти полиномы пересчитываются один через другой [12]. Интересный подход для построения инвариантов тэта-кривых предложил Йокота [13].

В этом параграфе мы обсудим построение полиномиального инварианта из [10]. Прежде всего отметим, что инвариант пространственного графа должен являться инвариантом абстрактного (обычного) графа.

Пусть  $G = (V, E)$  – граф, возможно с петлями и кратными ребрами, с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ . Введем следующие обозначения:  $p(G)$  – число вершин графа,  $q(G)$  – число ребер графа,  $\omega(G)$  – число компонент связности графа,  $\beta(G) = q(G) - p(G) + \omega(G)$  – первое число Бетти. Определим для графа  $G = (V, E)$  полином  $h(G)(x, y)$  от двух переменных:

$$h(G)(x, y) = \sum_{F \subset E} (-x)^{-|F|} x^{\omega(G-F)} y^{\beta(G-F)},$$

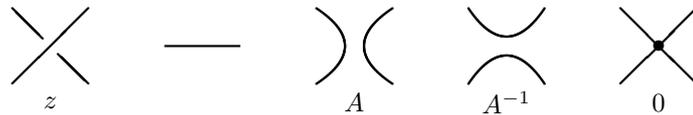


Рис. 6. Три типа разводки в двойной точке

Пусть плоский граф  $S$  получен из  $g$  применением к каждой двойной точке одной из операций разводки. Обозначим через  $U(g)$  множество всех плоских графов, полученных из диаграммы  $g$  таким образом. Графу  $S \in U(g)$  поставим в соответствие моном  $c(g|S) = A^{m_1 - m_2}$ , где  $m_1$  и  $m_2$  – число  $A$ -разводок и  $A^{-1}$ -разводок, соответственно примененных к  $g$  для получения  $S$ .

**Определение 4.** Полиномом Ямады диаграммы  $g = g(\mathcal{G})$  заузленного графа  $\mathcal{G}$  называется лорановский полином от переменной  $A$ , задаваемый выражением:

$$R(g)(A) = \sum_{S \in U(g)} c(g|S)H(S).$$

$$(1) R(\text{crossing}) = AR(\text{cusp}) + A^{-1}R(\text{self-intersection}) + R(\text{crossing with dot}).$$

$$(2) R(\text{edge with dot}) = R(\text{two arrows}) + R(\text{crossing with dots}).$$

где ребро  $e$  не является петлей.

(3)  $R(g_1 \perp g_2) = R(g_1)R(g_2)$ , где  $g_1 \perp g_2$  обозначает несвязное объединение диаграмм  $g_1$  и  $g_2$ .

(4)  $R(B_n) = -(-A - 1 - A^{-1})^n$ , где  $B_n$  – одновршинный граф с  $n$  петлями; в частности, при  $n = 0$  имеем  $R(\cdot) = -1$ .

(5)  $R(\emptyset) = 1$ .

где  $F$  пробегает все подмножества ребер из  $E$ ,  $|F|$  – мощность множества  $F$ , а  $G - F$  – граф с множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E - F$ . Как показано в [10], полином  $h(G)$  – такой инвариант графа, который является и его топологическим инвариантом, то есть выдерживает вставку и стягивание двухвалентных вершин на его ребрах. Полиномом Ямады для абстрактного графа  $G$  назовем лорановский полином:

$$H(G)(A) = h(G)(-1, -A - 2 - A^{-1}).$$

Свойства полиномов  $h(G)$  и  $H(G)$  описаны в [10].

Пусть пространственный граф  $\mathcal{G}$  является вложением графа  $G = (V, E)$  в трехмерное пространство, а  $g = g(\mathcal{G})$  – его диаграмма. Для произвольной двойной точки  $z \in g$  определим три операции:  $A$ -разводка,  $A^{-1}$ -разводка и  $0$ -разводка, как локальные изменения диаграммы  $g$  в окрестности точки  $z$  (см. рис. 6).

Для пустого графа положим  $R(\emptyset) = 1$ . В [10] установлен следующий результат:

**Теорема 4.** Полином  $R(g)(A)$  является инвариантом диаграммы  $g$  заузленного графа  $\mathcal{G}$  при следующих преобразованиях  $g$ :

- (1) при регулярных деформациях;
- (2) при плоских деформациях с точностью до множителя  $(-A)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;
- (3) при гибких деформациях с точностью до множителя  $(-A)^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , для диаграмм графов с максимальной степенью меньше 4.

Из данного выше определения полинома  $R(g)(A)$  следуют следующие пять свойств. Отметим, что эти свойства можно взять за определение полинома  $R(g)(A)$ .

Полиномы Ямады для тэта-кривых, изображенных на рис. 5, вычисленные в [14], приведены ниже в таблице 1. Как видно из таблицы, все рассматриваемые тэта-кривые попарно не гибко изотопны.

Таблица 1

Граф	Полином Ямады
$\Theta_1$	$-A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2}$
$\Theta_2$	$A^6 - A^2 - 1 - A^{-2} - A^{-3} - A^{-4} - A^{-5} - A^{-6}$
$\Theta_3$	$-A^7 + A^4 + 2A^3 + A^2 + A - 1 - A^{-1} - 2A^{-2} - 2A^{-3} - 2A^{-4} - A^{-5} - A^{-6}$
$\Theta_4$	$A^7 - A^5 - A^3 - A^2 - 1 - A^{-2} - A^{-5} - A^{-8}$
$\Theta_5$	$-A^8 + A^4 - A^2 - A - 2 - A^{-1} - A^{-2} + A^{-4} - A^{-8}$
$\Theta_6$	$A^8 + A^7 - A^6 + A^5 + A^4 - A^3 + A + 2A^{-1} + A^{-2} + 2A^{-3} - A^{-5} + A^{-6} - 2A^{-7} - A^{-8} + A^{-9}$
$\Theta_7$	$A^8 + A^7 - 2A^3 - 2A^2 - A - 2 - A^{-2} + A^{-3} + A^{-6} - A^{-7} - A^{-8}$
$\Theta_8$	$-A^{11} - A^9 + A^7 + A^5 + A^3 + A^{-3} + A^{-4} + A^{-5} + A^{-6} + A^{-7}$
$\Theta_9$	$-A^9 + A^8 + A^5 + A^3 + A - A^{-1} - A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} - A^{-5} - A^{-6} - A^{-7} - A^{-8}$
$\Theta_{10}$	$-A^{11} - A^9 + A^7 + A^6 + 2A^5 + A^4 + A^3 - A^{-2} - A^{-3} - 2A^{-4} - 2A^{-5} - 2A^{-6} - A^{-7} - A^{-8}$
$\Theta_{11}$	$A^8 - A^6 - A^3 + A^2 + A + A^{-1} - A^{-2} - 2A^{-4} - A^{-5} - 2A^{-7} - A^{-8} - A^{-10}$
$\Theta_{12}$	$-A^9 - A^6 + A^4 + A^2 + 2A + A^{-1} - A^{-2} + A^{-3} + 2A^{-6} + A^{-9}$
$\Theta_{13}$	$-A^9 + A^7 + 2A^4 + A - 1 - 2A^{-2} - A^{-4} - 2A^{-5} - A^{-7} - 2A^{-8} - A^{-7} - 2A^{-8}$
$\Theta_{14}$	$-A^9 + A^5 + A^4 + A^2 + A + A^{-1} - A^{-2} - 2A^{-4} - 2A^{-5} - A^{-6} - 2A^{-7} - A^{-8} - A^{-10}$

#### 4. Инвариант пространственных графов

Другое направление построения инвариантов узлов и зацеплений, также связанное с преобразованиями Рейдемейстера, – это построение инвариантного дистрибутивного группоида Матвеевым в [15] и построение инвариантного квандла Джойсом в [16]. Эти инварианты являются полными инвариантами узлов, но проблема изоморфизма для рассматриваемых объектов слишком сложна. Таким образом, на практике приходится пользоваться не столь сильными, но легче сравниваемыми инвариантами.

В этом параграфе мы опишем инвариант пространственных графов, связанный с разметкой дуг диаграммы. Рассматриваемый в этом и следующем параграфах подход был реализован в дипломной работе Кушнира [17], но так и остался неопубликованным. Доказательство инвариантности сводится к проверке инвариантности при расширенных преобразованиях Рейдемейстера и плоских изотопиях.

Здесь и далее мы будем предполагать, что каждой вершине графа инцидентны, по крайней мере, три ребра. Дугой на диграмме пространственного графа будем называть часть проекции, концами которой являются вершины графа или двойные точки, в которые дуга приходит «под», и внутренность которой не содержит других вершин графа или проходимых «под» двойных точек. Для заданного пространственного графа  $\mathcal{G}$  обозначим через  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  множество всех его диаграмм. Как было отмечено выше, любые две диаграммы из  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$  связаны между собой конечной последовательностью преобразований, каждое из которых является одним из преобразований Рейдемейстера (I) –

(VI) или плоской изотопией.

Пусть  $g_0 = g_0(\mathcal{G})$  – некоторая фиксированная диаграмма из множества  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ . Каждой дуге диаграммы  $g_0$  сопоставим метку, то есть элемент из некоторого множества  $M$ . Предположим, что на множестве  $M$  определена бинарная операция  $f : M \times M \rightarrow M$ . Мы потребуем, чтобы эта операция удовлетворяла приведенным ниже условиям.

Пусть  $P$  – двойная точка диаграммы  $g_0$  и в ней встречаются дуги с метками  $a$  и  $c$ , которые подходят «под», и дуга с меткой  $b$ , которая проходит «над». В этом случае потребуем, чтобы выполнялось условие  $f(a, b) = c$  (здесь равенство означает, что  $f(a, b)$  и  $c$  – это один и тот же элемент множества  $M$ ) и, в силу равноправности  $a$  и  $c$  в наших рассуждениях, потребуем, чтобы  $f(c, b) = a$  (см. рис. 7).

$$\begin{array}{c} \left. \begin{array}{l} a = f(c, b) \\ c = f(a, b) \end{array} \right\} \\ b \end{array}$$

Рис. 7. Соотношения в двойной точке

Из соотношений  $a = f(c, b)$  и  $c = f(a, b)$  следует соотношение  $f(f(a, b), b) = a$ , которое мы будем рассматривать как уравнение на  $f$ . Аналогичное уравнение запишем для каждой двойной точки диаграммы  $g_0$ .

Пусть  $g$  – произвольная диаграмма из множества  $\mathcal{C}(\mathcal{G})$ . Чтобы определить метки на дугах диаграммы  $g$ , напомним, что от диаграммы  $g_0$  можно перейти к  $g$  при помощи конечного числа преобразований Рейдемейстера (I) – (VI) и плоских изотопий. Положим, что при плоских изотопиях метки на дугах сохраняются, т. е. при плоской изотопии дуге и ее образу соответствует один и тот же эле-

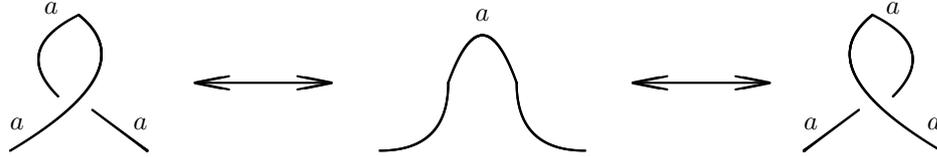
мент из  $M$ .

Опишем правила изменения меток при расширенных преобразованиях Рейдемейстера. Начнем с преобразований Рейдемейстера (I) – (III).

**Лемма 2.** *Множество меток  $M$  с бинарной функцией  $f : M \times M \rightarrow M$  является инвариантом при преобразованиях Рейдемейстера (I), (II) и (III), если выполнены следующие свойства:*

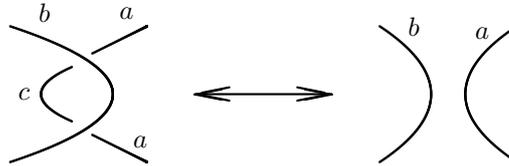
- (A1)  $f(a, a) = a$  для любого  $a \in M$ ;
- (A2)  $f(f(a, b), b) = a$  для любых  $a, b \in M$ ;
- (A3)  $f(f(c, b), a) = f(f(c, a), f(b, a))$  для любых  $a, b, c \in M$ .

*Доказательство.* Рассмотрим преобразование Рейдемейстера (I) с расставленными на дугах диаграммы метками:



Очевидно, инвариантность при преобразовании Рейдемейстера (I) будет иметь место тогда и только тогда, когда для каждого  $a \in M$  выполнено свойство  $f(a, a) = a$ .

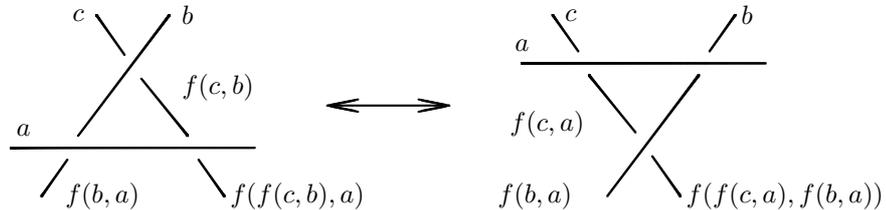
Рассмотрим преобразование Рейдемейстера (II):



Запишем соотношения в двойных точках:  $c = f(a, b)$  и  $a = f(c, b)$ , откуда:

$$(A2) \quad f(f(a, b), b) = a.$$

Рассмотрим преобразование Рейдемейстера (III):



Сопоставив соответствующие метки на дугах, которые состыкуются с дугами, лежащими вне окрестности локального преобразования (III), получаем следующее соотношение:

$$(A3) \quad f(f(c, b), a) = f(f(c, a), f(b, a)).$$

Отметим, что объекты, удовлетворяющие условиям (A1) – (A3) леммы 2 были ранее построены Матвеевым [15] и Джойсом [16] и назывались инволютивным дистрибутивным группоидом или инволютивным квандлом.

Рассмотрим расширенные преобразования Рейдемейстера, в которых участвуют вершины графа. Напомним, что мы рассматриваем графы, у которых степень каждой вершины не менее трех. Наложим на  $M$  дополнительные требования, чтобы добиться инвариантности при преобразованиях Рейдемейстера (IV) – (VI).

Введем множество предикатов  $\varphi_n : M^n \rightarrow \{0, 1\}$ , где  $n \geq 3$ . Если на рассматриваемой диаграмме графа есть вершина степени  $n \geq 3$ , в которой сходятся дуги с метками  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , пе-

речисленные по направлению часовой стрелки, то положим  $\varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$ . В силу произвольности выбора первой дуги при обходе вершины, сформулируем следующее условие.

Потребуем, чтобы выполнялось условие:

$$(B) \quad \varphi_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_2, a_3, \dots, a_1) = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \varphi_n(a_n, a_1, \dots, a_{n-1}) = 1, \text{ где } a_1, \dots, a_n \text{ — циклически перечисленные метки ребер инцидентных } n\text{-валентной вершине.}$$

Посмотрим как меняются метки на дугах при расширенных преобразованиях Рейдемейстера (IV) – (VI).

**Лемма 3.** *Множество меток  $M$  с бинарной функцией  $f : M \times M \rightarrow M$  и множеством предикатов  $\varphi_n$  является инвариантом при плоских изотопиях и преобразованиях Рейдемейстера (IV), (V) и (VI), если выполнены следующие свойства:*

- (C1)  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(f(a_1, b), \dots, (a_n, b)) = 1$  для любого  $b \in M$ ;
- (C2)  $f(\dots f(f(b, a_n), a_{n-1}) \dots, a_1) = b$  для лю-

бого  $b \in M$  и  $a_1, \dots, a_n$  из  $M$  таких, что  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1$ ;

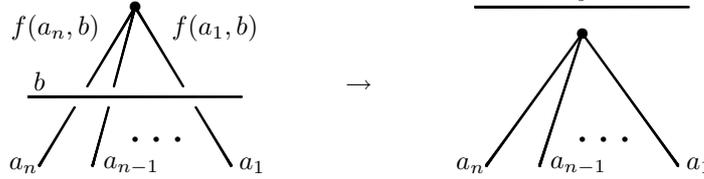
(C3)  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(b_n, \dots, b_1) = 1$ , где  $b_1 = a_1$ ,  $b_k = f(b'_{k-1}, b_{k-1})$ ,  $k = 2, \dots, n$ , и формула для  $b'_{k-1}$  отличается от формулы для  $b_k$  тем, что все  $a_{k-1}$  заменяются на  $a_k$ ;

(C4)  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(c_n, \dots, c_1) = 1$ , где  $c_n = a_n$ ,  $c_k = f(c'_{k+1}, c_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ ,

и формула для  $c'_{k+1}$  отличается от формулы для  $c_k$  тем, что все  $a_{k+1}$  заменяются на  $a_k$ ;

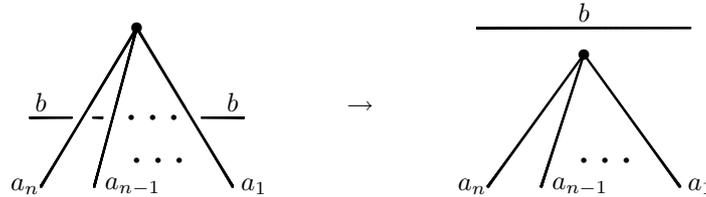
(C5)  $\varphi_n(f(a_2, a_1), a_1, a_3, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_2, f(a_1, a_2), a_3, \dots, a_n) = 1$ .

*Доказательство.* Рассмотрим первую часть преобразования (IV):



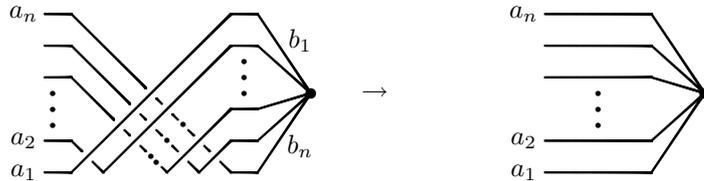
Соотношения в вершине и в двойных точках выписываются очевидным образом. Потребуем, чтобы для любого  $b \in M$  выполнялось  $\varphi_n(f(a_1, b), \dots, (a_n, b)) = 1$  тогда и только тогда, когда  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1$ .

Рассмотрим вторую часть преобразования (IV):



Выписав соотношения в вершине и в двойных точках, потребуем, чтобы для любого  $b \in M$  выполнялось  $f(\dots f(f(b, a_n), a_{n-1}) \dots, a_1) = b$ , где  $a_1, \dots, a_n$  такие, что  $\varphi(a_1, \dots, a_n) = 1$ .

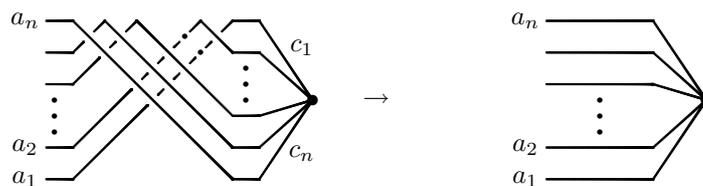
Рассмотрим первую часть преобразования (V):



Используя соотношение в двойной точке и индукцию, можно показать, что  $b_k = f(b'_{k-1}, b_{k-1})$ , где  $b_1 = a_1$  и формула для  $b'_{k-1}$ ,  $k \geq 2$ , отличается от формулы для  $b_k$  тем, что вместо всех вхождений  $a_{k-1}$  стоит  $a_k$ . Действительно, ребро, которое начинается с метки  $a_k$ , на левой картинке проходит под теми же дугами, что и ребро, на-

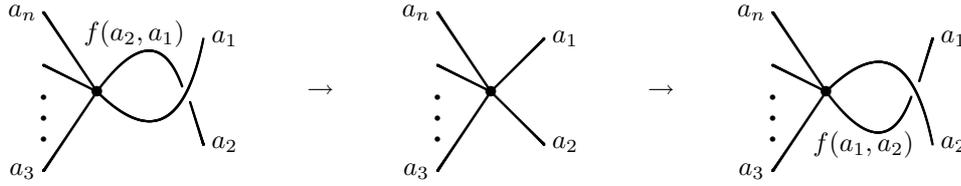
чинающееся с метки  $a_{k-1}$ , до последней двойной точки, из этих соображений получаем рекуррентную формулу на  $b_k$ . Потребуем, чтобы выполнялось итоговое соотношение:  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(b_n, \dots, b_1) = 1$ .

Рассмотрим вторую часть преобразования (V):



По аналогии с предыдущим случаем получаем  $c_k = f(c'_{k+1}, c_{k+1})$ , в формуле для  $c'_{k+1}$  вместо всех вхождений  $a_{k+1}$  стоит  $a_k$  и  $c_n = a_n$ . Потребуем, чтобы выполнялось итоговое соотношение:  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1 \Leftrightarrow \varphi_n(c_n, \dots, c_1) = 1$ .

Рассмотрим преобразование (VI):



Выписав соотношения в вершинах и в двойных точках диаграмм, потребуем выполнения условий:  $\varphi_n(f(a_2, a_1), a_1, a_3, \dots, a_n)=1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_1, \dots, a_n)=1 \Leftrightarrow \varphi_n(a_2, f(a_1, a_2), a_3, \dots, a_n)=1$ .

Доказательство леммы завершено.

Из лемм 1, 2 и 3 вытекает следующий результат.

**Теорема 5.** Пусть  $g(\mathcal{G})$  – диаграмма пространственного графа  $\mathcal{G}$ . Пусть  $M$  – множество меток дуг диаграммы с такой бинарной функцией  $f : M \times M \rightarrow M$ , что если дуги с метками  $a, b, c$  сходятся в двойной точке, причем дуга с меткой  $b$  подходит «над», то  $f(a, b) = c$ ; и множеством предикатов  $\varphi_n : M^n \rightarrow \{0, 1\}, n \geq 3$ , где  $n$  пробегает множество валентностей вершин графа, таких, что если дуги с метками  $a_1, \dots, a_n$  сходятся в вершине степени  $n$  по ходу часовой стрелки, то  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1$ . Если при этом  $f$  и  $\varphi_n$  таковы, что выполнены условия (A1) – (A3), (B), (C1) – (C5), то  $M$  является инвариантом графа  $\mathcal{G}$  при гибких изотопиях.

### 5. Инвариантная группа

Рассмотрим частный случай введенного выше инварианта. А именно, зафиксируем диаграмму  $g = g(\mathcal{G})$  пространственного графа  $\mathcal{G}$ . Положим, что

- 1) множество  $M$  является группой  $\Gamma$  порождающие которой соответствуют меткам на дугах диаграммы  $g$ , а определяющие соотношения задаются бинарной операцией  $f$  и предикатами  $\varphi_n$ ;
- 2) порождающие группы  $\Gamma$  являются элементами второго порядка;
- 3) бинарная операция  $f : \Gamma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$  записывается через групповое умножение следующим образом:  $f(a, b) = ba^{-1}b$ ;
- 4)  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1$  означает, что элементы  $a_1, \dots, a_n$  попарно коммутируют и  $a_1 \cdots a_n = 1$ , где  $1$  – единичный элемент группы.

**Лемма 4.** Группа  $\Gamma$ , описанная в 1)–4), корректно определена и введенные бинарная операция  $f$  и множество предикатов  $\varphi_n$  удовлетворяют условиям из теоремы 5.

*Доказательство.* Если  $a$  элемент второго порядка, то можем записать  $f(a, b) = bab$ .

Если дуги с метками  $a, b, c$  сходятся в двойной точке так, что  $f(a, b) = bab = c$ , то  $c$  должен быть тоже второго порядка. Действительно,  $c^2 = babbab = baab = bb = 1$ .

Заметим, что если  $a, b$  коммутируют, то  $f(a, b) = bab = abb = a$ . Убедимся, что выполнены соотношения из теоремы 5:

- (A1)  $f(a, a) = aa^{-1}a = a$ .
- (A2)  $f(f(a, b), b) = f(ba^{-1}b, b) = bb^{-1}ab^{-1}b = a$ .
- (A3) поскольку

$$f(f(c, b), a) = f(bc^{-1}b, a) = ab^{-1}cb^{-1}a$$

и

$$f(f(c, a), f(b, a)) = f(ac^{-1}a, ab^{-1}a) = (ab^{-1}a)(ac^{-1}a)^{-1}(ab^{-1}a) = ab^{-1}cb^{-1}a.$$

(B)  $a_1 \cdots a_{n-1}a_n = 1 \Leftrightarrow a_2 \cdots a_n a_1 = 1 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow a_n, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} = 1$  выполнено в силу попарной коммутативности элементов  $a_1, \dots, a_{n-1}$  и  $a_n$ .

(C1) по определению,  $\varphi_n(f(a_1, b), \dots, f(a_n, b))=1$  означает, что

$$1 = f(a_1, b) \cdots f(a_n, b) = (ba_1^{-1}b) \cdots (ba_n^{-1}b) = b(a_1 \cdots a_n)b^{-1},$$

где мы воспользовались тем, что порождающие  $b, a_1, \dots, a_n$  являются элементами второго порядка. Таким образом,  $\varphi_n(f(a_1, b), \dots, f(a_n, b)) = 1$  тогда и только тогда, когда  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1$ .

(C2) поскольку  $b, a_1, \dots, a_n$  являются элементами второго порядка, имеем:

$$f(\dots f(f(b, a_n), a_{n-1}) \dots, a_1) = a_1 \cdots a_n b a_n \cdots a_1 = a_1 \cdots a_n b a_n^{-1} \cdots a_1^{-1} = (a_1 \cdots a_n) b (a_1 \cdots a_n)^{-1} = b,$$

так как  $\varphi_n(a_1, \dots, a_n) = 1$ .

(C3) Покажем, что  $b_k = a_k, k = 1, \dots, n$ , индукцией по  $k$ . По условию,  $b_1 = a_1$ . Тогда  $b'_1 = a_2$ . По индукционному предположению,  $b_{k-1} = a_{k-1}$  и  $b'_{k-1} = a_k$ . Тогда  $b_k = f(b'_{k-1}, b_{k-1}) = b_{k-1} b'_{k-1} b_{k-1} = a_{k-1} a_k a_{k-1} = a_k$ . Таким образом,  $b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$  в силу попарной коммутативности элементов  $a_1, \dots, a_n$ .

(C4) Доказывается аналогично (C3), замечая, что  $c_k = a_k, k = 1, \dots, n$  и  $c_n \cdots c_1 = a_n \cdots a_1$ .

(C5) Заметим, что

$$f(a_2, a_1) a_1 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 a_1 a_1 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$$

и

$$a_2 f(a_1, a_2) a_3 \cdots a_n = a_2 a_2 a_1 a_2 a_3 \cdots a_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n.$$

Чтобы убедиться в корректности определения  $\varphi_n$ , покажем, что попарная коммутативность элементов  $a_1, \dots, a_n$  влечет, что  $a_1 \cdots a_n = 1 \Leftrightarrow a_{i_1} \cdots a_{i_n} = 1$  для любой перестановки  $i_1, \dots, i_n$  на элементах  $1, \dots, n$ . В самом деле, симметрическая группа порождается инверсиями  $(i, i + 1)$ ,  $i = 1, \dots, n - 1$ . Такие инверсии соответствуют коммутативности  $a_i$  и  $a_{i+1}$ .  $\square$

Как следствие теоремы 5 и леммы 4 получаем следующий результат.

**Теорема 6.** Пусть  $\mathcal{G}$  – пространственный граф, а  $g$  – его диаграмма. Пусть порождающими группы  $\Gamma$  являются метки на дугах диаграммы. Положим, что порождающие являются элементами второго порядка и в каждой двойной точке диаграммы удовлетворяют соотношению  $bab = c$ , где  $b$  – это метка дуги проходящей «над»; кроме того, имеют место соотношения  $a_1 \dots a_n = 1$  и элементы  $a_1, \dots, a_n$  попарно коммутируют, если дуги с метками  $a_1, \dots, a_n$  инцидентны одной вершине. Тогда группа  $\Gamma$  является инвариантом пространственного графа  $\mathcal{G}$  при гибких изотопиях.

Далее группу  $\Gamma$  будем называть инвариантной группой пространственного графа  $\mathcal{G}$ .

### 6. Примеры вычисления инвариантной группы

В качестве иллюстрации полученных результатов вычислим инвариантные группы для некоторых тэта-кривых. Напомним, что диаграммы тэта-кривых с малым числом двойных точек были приведены на рис. 5.

Рассмотрим тэта-кривую  $\Theta_1$ , которая представляет собой тривиальное вложение тэта-графа  $\Theta$ . Пусть метки на дугах диаграммы расставлены как на рисунке 8.

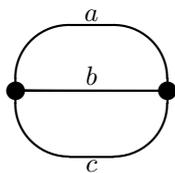


Рис. 8. Тэта-кривая  $\Theta_1$

Тогда инвариантная группа  $\Gamma_1$  графа  $\Theta_1$  порождена тремя элементами второго порядка:  $a, b, c$ . Диаграмма не имеет двойных точек. Граф имеет две вершины и в каждой из них соотношение имеет вид  $abc = 1$ . Условия коммутирования порождающих имеют вид  $ab = ba, ac = ca, bc = cb$ . Получаем следующее представление:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \langle a, b, c \mid a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1, abc = 1, \\ &\quad ab = ba, ac = ca, bc = cb \rangle. \\ &\cong \langle a, b \mid a^2 = b^2 = 1, ab = ba \rangle. \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2. \end{aligned}$$

Рассмотрим тэта-кривую  $\Theta_2$  с метками на дугах как указано на рис. 9.

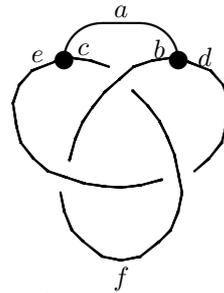


Рис. 9. Тэта-кривая  $\Theta_2$

Инвариантная группа  $\Gamma_2$  тэта-кривой  $\Theta_2$  порождается элементами второго порядка  $a, b, c, d, e$  и  $f$ . Диаграмма имеет три двойных точки, которым соответствуют соотношения  $bc b = f, e b e = f$  и  $f e f = d$ . Граф имеет две вершины: одной из них соответствуют соотношения  $a c e = 1, a c = c a, c e = e c$  и  $a e = e a$ , а другой – соотношения  $b a d = 1, b a = a b, a d = d a$  и  $b d = d b$ . Таким образом, группа  $\Gamma_2$  имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \langle a, b, c, d, e, f : \\ &\quad a^2 = b^2 = c^2 = d^2 = e^2 = f^2 = 1, \\ &\quad b c b = f, e b e = f, f e f = d, a c e = 1, \\ &\quad a c = c a, c e = e c, a e = e a, b a d = 1, \\ &\quad b a = a b, a d = d a, b d = d b \rangle. \end{aligned}$$

Выражая часть порождающих через остальные, а именно:  $e = a c, d = a b, f = b c b$ , получим представление:

$$\begin{aligned} \Gamma_2 &= \{ a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, \\ &\quad a b = b a, a c = c a, (b c)^3 = 1 \}. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что группа  $\Gamma_2$  изоморфна группе, порожденной отражениями в сторонах сферического треугольника с углами  $\pi/2, \pi/2, \pi/3$ .

Рассмотрим тэта-кривую  $\Theta_4$ , приведенную на рис. 10.

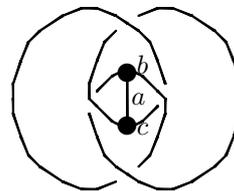


Рис. 10. Тэта-кривая  $\Theta_4$

Порождающие инвариантной группы  $\Gamma_4$  пространственного графа  $\Theta_4$  соответствуют меткам на дугах диаграммы. Нетрудно заметить, что все метки могут быть выражены через метки  $a, b, c$ , указанные на рисунке. Представление группы  $\Gamma_4$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \{ a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, \\ &\quad a b = b a, a c = c a, (b c)^5 = 1 \}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что группа  $\Gamma_4$  изоморфна группе, порожденной отражениями в сторонах сферического треугольника с углами  $\pi/2$ ,  $\pi/2$ ,  $\pi/5$ .

Из рассмотренных примеров видно, что группы  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_4$  попарно не изоморфны, а значит, и пространственные графы  $\Theta_1$ ,  $\Theta_2$ ,  $\Theta_4$  попарно не гибко изотопны.

### Литература

- [1] Conway, J. H. *Knots and links in spatial graphs* / J. H. Conway, C. McA. Gordon // J. Graph Theory. – 2003. – Vol. 7. – P. 445 – 453.
- [2] Sachs, H. *On spatial representations of finite graphs* / H. Sachs, A. Hajnal, L. Lovasz, V.T. Sos (Eds.) // Colloquia Mathematica Soc. Janos Bolyai, Vol. 37. – North-Holland; Amsterdam, 1984 – P. 649 – 662.
- [3] Веснин, А. Ю. *О зацепленности гамильтоновых пар циклов в пространственных графах* / А. Ю. Веснин, А. В. Литвинцева // Сибирские электронные математические известия. – 2010. - Т. 7. – С. 383 – 393.
- [4] Reidemeister, K. *Knot Theory* / K. Reidemeister // Chelsea Publ. Co. – N. Y., 1948.
- [5] Kauffman, L. H. *Invariants of graphs in three-space* / L. H. Kauffman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – Vol. 311. – P. 697 – 710.
- [6] Alexander, J. W. *Topological invariants of knots and links* / J. W. Alexander // Trans. Amer. Math. Soc. – 1923. – Vol. 20. – P. 275 – 306.
- [7] Conway, J. H. *On enumeration of knots and links and some of their algebraic properties* / J. H. Conway // Computational Problems in Abstract Algebra. – New York: Pergamon Press. 1970. – P. 329 – 358.
- [8] Jones, V. F. R. *A polynomial invariant for links via von Neumann algebras* / V. F. R. Jones // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 129. – P. 103 – 112.
- [9] Freyd, P. *A new polynomial invariant of knots and links* / P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu // Bull. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 12. – P. 239 – 246.
- [10] Yamada, S. *An invariant of spatial graphs* / S. Yamada // J. Graph Theory. – 1989. – Vol. 13. – P. 537 – 551.
- [11] Yoshinaga, S. *An invariant of spatial graphs associated with  $U_q(sl(2, C))$*  / S. Yoshinaga // Kobe J. Math. – 1991. – Vol. 8. – P. 25 – 40.
- [12] Dobrynin, A. A. *On the Yoshinaga polynomial of spatial graphs* / A. A. Dobrynin, A. Yu. Vesnin // Kobe J. Math. – 2003. – Vol. 20. – P. 31 – 37.
- [13] Yokota, Y. *Polynomial invariants of  $\theta_m$ -curves in 3-space* / Y. Yokota // a lecture given at 7th Japan-Korea School of Knots and Links. – Kobe, 1999.
- [14] Веснин, А. Ю. *Полином Ямады для графов, заузленно вложенных в трехмерное пространство* / А. Ю. Веснин, А. А. Добрынин // Выч. системы. Теория графов и ее применения. – 1996. – Т. 155. – С. 37 – 86.
- [15] Матвеев, С. В. *Дистрибутивные группоиды в теории узлов* / С. В. Матвеев // Матем. сборник. – 1982. – Т. 119. N. 1. – С. 78 – 88.
- [16] Joyce, D. *A classifying invariant of knots: the knot quandle* / D. Joyce // Jour. Pure Appl. Alg. – 1982. – Vol. 23. – P. 37 – 65.
- [17] Кушнир, Д. Ю. *Инварианты пространственных заузленных графов* / Д. Ю. Кушнир // Выпускная квалификационная работа бакалавра. – Новосибирск: НГУ, 2008. – 18 с.