

Если $(p+1, q+1) = 1$, то

$$G(p, q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)} *_{\mathbb{Z}_{p-q}} \mathbb{Z}_{q(p-q)} \right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Если же $(p+1, q+1) \neq 1$, то надо взять такое число D , для которого $(p+1, (p-q)/D) = 1$. Ясно, что в этом случае $(q+1, (p-q)/D) = 1$, а потому

$$G(p, q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)/D} *_{\mathbb{Z}_{(p-q)/D}} \mathbb{Z}_{q(p-q)/D} \right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили частичный ответ на сформулированный выше вопрос. Вопрос о том, существует ли аналогичное разложение для произвольной группы $G(m, n, p, q)$ остается открытым. Также сформулируем и такой

Вопрос. При каких наборах (m, n, p, q) группа $G(m, n, p, q)$ тривиальна?

Отметим, что этот вопрос тесно связан с проблемой Уайтхеда об асферических комплексах из гомотопической топологии (см. [10]).

Литература

[1] Линдон, Р. *Комбинаторная теория групп* / Р. Линдон, П. Шупп. – М.: Мир, 1980.

[2] Фоменко, А. Т. *Курс гомотопической топологии* / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1989.

[3] Rapaport, E. S. *On the defining relations of a free product* / E. S. Rapaport // Pacific J. Math. – 1964. – Vol. 14, no. 4. – P. 1389 – 1393.

[4] Wall, C. T. C. *Finiteness conditions for CW-complexes* / C. T. C. Wall // Ann. of Math. – 1965. – Vol. 81, no. 1. – P. 56 – 69.

[5] Epstein, D. B. A. *Finite presentations of groups and 3-manifolds* / D. B. A. Epstein // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1961. – Vol. 12 – P. 205 – 212.

[6] M. Bestvina, M. *Morse theory and finiteness conditions of groups* / M. Bestvina and N. Brady // Invent. of Math. – 1997. – Vol. 129. – P. 445 – 470.

[7] Gruenberg, K. W. *Generation gaps and abelianized defects of free products* / K. W. Gruenberg, P. A. Linnell // J. Group Theory. – 2008. – Vol. 11, no. 5. – P. 587 – 608.

[8] Hog, C. *Presentation classes, 3-manifolds and free products* / C. Hog, M. Lustig, W. Metzler // Geometry and topology. – Berlin, 1985.

[9] Bridson, M. *Deficiency and abelianized deficiency of some virtually free groups* / M. Bridson, M. Tweedale // Math. Proc. – Cambridge Philos. Soc., 2007. – Vol. 143, no. 2 – P. 257 – 264.

[10] Mikhailov, R. *Lower central and dimension series of groups, Lecture Notes in Mathematics* / R. Mikhailov, I. B. S. Passi. – Berlin, 2009.

[11] Jaco, W. *Heegaard splittings and splitting homomorphisms* / W. Jaco // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 365 – 379.

УДК 514.772.22

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. А. Бердинский

ON MINIMAL SURFACES IN HEISENBERG GROUP

D. A. Berdinsky

В работе предложен метод построения минимальных поверхностей в группе Гейзенберга, наделенной метрикой Терстона. Конструкция основана на представлении типа Вейерштрасса, и порождающие спиноры поверхности выражены в терминах функций Бейкера–Ахиезера.

It's proposed the method for constructing minimal surfaces in Heisenberg group, endowed with Thurston's metric. The construction is based on Weierstrass type representation, and generating spinors of surface are expressed in terms of Baker-Akhiezer functions.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, минимальные поверхности, функции Бейкера–Ахиезера.

Keywords: Heisenberg group, minimal surfaces, Baker-Akhiezer functions.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-91056).

1. Введение

В данной работе изложен метод построения минимальных поверхностей в группе Гейзенберга с терстоновской метрикой, основанный на исполь-

зовании представлений типа Вейерштрасса минимальных поверхностей в этой группе [1].

Предложенный метод находится в русле работы Бобенко [3], где описываются торы постоянной средней кривизны в трехмерном евклидовом про-

странстве.

Как и в евклидовом случае, здесь возникает эллиптическое уравнение типа sine-Gordon:

$$v_{z\bar{z}} + 2 \sinh v = 0,$$

но записанное не для логарифма конформного фактора, а для логарифма потенциала оператора Дирака, возникающего из представления Вейерштрасса [2]. В геометрических терминах этот потенциал также можно представить как $e^v = \frac{i}{4} n_3 e^\alpha$ [1], где n_3 — скалярное произведение вектора нормали к поверхности с выделенным направлением e_3 в группе Гейзенберга, а $e^{2\alpha}$ — это фактор метрики на поверхности по отношению к конформному параметру z .

Все это позволяет применить методы теории конечнозонного интегрирования [3],[4] к построению минимальных поверхностей в группе Гейзенберга. В данной работе мы не касаемся вопроса о замыкании поверхностей и вопроса об их особенностях.

Следует также отметить связь минимальных поверхностей в группе Гейзенберга с известным в физике уравнением электролитического типа:

$$\Delta \sigma - \sinh \sigma = 0.$$

Действительно, поскольку e^v чисто мнимое, то взяв $Re[v]$, после соответствующей замены, получим в точности уравнение электролитического типа.

2. Группа Гейзенберга

Группа Гейзенберга Nil образована всеми матрицами вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

с обычным матричным умножением и левоинвариантной метрикой вида:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2.$$

Алгебра Ли образована элементами:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0.$$

В нашем случае удобно перейти к экспоненциальным координатам x^1, x^2, x^3 , которые связаны с исходными следующим образом:

$$x = x^1, y = x^2, z = x^3 + \frac{1}{2} x^1 x^2.$$

В экспоненциальных координатах метрика имеет вид:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \left(\frac{1}{2} x^2 dx^1 - \frac{1}{2} x^1 dx^2 + dx^3\right)^2.$$

3. Представление Вейерштрасса минимальных поверхностей в группе Гейзенберга

В этом разделе мы кратко напомним представление Вейерштрасса для минимальных поверхностей в группе Nil [1]. Всякую поверхность в группе Nil локально можно представить следующим образом:

$$x^1(z, \bar{z}) = \int_{z_0}^z Z_1 dz + \bar{Z}_1 d\bar{z},$$

$$x^2(z, \bar{z}) = \int_{z_0}^z Z_2 dz + \bar{Z}_2 d\bar{z},$$

$$x^3(z, \bar{z}) = \int_{z_0}^z (Z_3 dz + \bar{Z}_3 d\bar{z}) + \frac{1}{2} \int_{z_0}^z x^1 (Z_2 dz + \bar{Z}_2 d\bar{z}) - \frac{1}{2} \int_{z_0}^z x^2 (Z_1 dz + \bar{Z}_1 d\bar{z}),$$

где z — конформный параметр, а $Z_1(z, \bar{z})$, $Z_2(z, \bar{z})$ и $Z_3(z, \bar{z})$ выражаются через спинорные функции $\psi_1(z, \bar{z})$, $\psi_2(z, \bar{z})$ следующим образом:

$$Z_1 = \frac{i}{2} (\bar{\psi}_2^2 + \psi_1^2), \quad Z_2 = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_2^2 - \psi_1^2), \quad Z_3 = \psi_1 \bar{\psi}_2.$$

При этом сами спинорные функции $\psi_1(z, \bar{z})$, $\psi_2(z, \bar{z})$ удовлетворяют нелинейному уравнению Дирака:

$$\mathcal{D}_{Nil} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ -\bar{\partial} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{Nil} & 0 \\ 0 & V_{Nil} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1)$$

$$U_{Nil} = V_{Nil} = \frac{H}{2} (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) + \frac{i}{4} (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2),$$

где $H(z, \bar{z})$ — средняя кривизна поверхности. Для минимальных поверхностей $H = 0$, и потенциал $U_{Nil} = V_{Nil} = \frac{i}{4} (|\psi_2|^2 - |\psi_1|^2)$ является чисто мнимым.

4. Дериационные уравнения поверхностей постоянной средней кривизны в терминах спинорных функций

На поверхности постоянной средней кривизны квадратичный дифференциал $\tilde{A}dz^2$, заданный следующим выражением, является голоморфным [1]:

$$\tilde{A} := \bar{\psi}_2 \partial \psi_1 - \psi_1 \partial \bar{\psi}_2 + \frac{2Hi}{2H+i} \psi_1^2 \bar{\psi}_2^2. \quad (2)$$

Далее положим $U_{Nil} = e^v$ и, используя (1), получим следующее выражение для производной потенциала U_{Nil} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} U_{Nil} &= v_z e^v = \\ &= \frac{1}{4}(2H+i)\psi_2 \partial \bar{\psi}_2 + \frac{1}{4}(2H-i)\bar{\psi}_1 \partial \psi_1 - \frac{iH}{2} \psi_1 \bar{\psi}_2 |\psi_2|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Объединяя (2), (3) и (1), мы получим уравнения Гаусса–Вейнгартена в терминах спинорных функций ψ_1, ψ_2 :

$$\begin{aligned} \partial_z \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_z & B e^{-v} \\ -e^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_{\bar{z}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ -\bar{B} e^{-v} & v_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где $B = \frac{1}{4}(2H+i)\tilde{A}$. Поскольку мы считаем, что $H = 0$, то B —голоморфная функция, и условие совместности уравнений Гаусса–Вейнгартена принимает вид:

$$v_{z\bar{z}} + e^{2v} - |B|^2 e^{-2v} = 0. \quad (4)$$

Далее будем предполагать, что решение (1) периодическое по некоторой решетке и $B \neq 0$. С помощью замены координат можем считать, что $|B| = 1$. В этом случае, уравнение (4) примет вид:

$$v_{z\bar{z}} + e^{2v} - e^{-2v} = 0. \quad (5)$$

Для того чтобы решение (5) отвечало некоторой минимальной поверхности, необходимо потребовать, чтобы функция e^v являлась чисто мнимой. Необходимость этого условия очевидно следует из вида потенциала (1), достаточность см. [2].

Без ограничения общности будем считать, что $B = -1$. Теперь задачу можно сформулировать следующим образом — построить нетривиальные периодические решения $\psi_1(z, \bar{z}), \psi_2(z, \bar{z})$ следующей системы:

$$\begin{aligned} \partial_z \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_z & -e^{-v} \\ -e^v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_{\bar{z}} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & e^v \\ e^{-v} & v_{\bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6)$$

так, чтобы e^v являлась чисто мнимой функцией.

5. Решение уравнений Гаусса–Вейнгартена в терминах функций Бейкера–Ахиезера

Положим $v = -\frac{u}{2}$ и $\hat{\psi}_1 = i\psi_1, \hat{\psi}_2 = e^{-v}\psi_2$. Сделав замену аргумента $z = \frac{1}{2}w$, можно убедиться, что в новых обозначениях $\hat{\psi}_1(w, \bar{w})$ и $\hat{\psi}_2(w, \bar{w})$ система (6) принимает вид:

$$\begin{aligned} \partial_w \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{u_w}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & \frac{u_w}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_{\bar{w}} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2}e^{-u} \\ -\frac{i}{2}e^u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система (7) допускает возможность введения спектрального параметра следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_w \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{u_w}{2} & -\frac{i}{2} \\ -\frac{i}{2}\lambda & \frac{u_w}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}, \\ \partial_{\bar{w}} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2\lambda}e^{-u} \\ -\frac{i}{2}e^u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что (8) совпадает с (7) при $\lambda = -1$. Условие совместности (8) принимает вид:

$$u_{w\bar{w}} + \sinh u = 0. \quad (9)$$

Пусть Γ — риманова поверхность, для которой существует мероморфная функция λ , обладающая нулем второго порядка в точке $P_1 \in \Gamma$ и полюсом второго порядка в точке $P_2 \in \Gamma$. Пусть k_1^{-1} и k_2^{-1} локальные параметры в окрестностях точек P_1 и P_2 соответственно, такие, что $\lambda = k_1^{-2}$ в окрестности P_1 и $\lambda = k_2^2$ в окрестности P_2 . Пусть $D = \gamma_1 + \dots + \gamma_g$ —дивизор степени g , где g —род Γ .

Далее мы позволим себе пропустить элементы теории функций Бейкера–Ахиезера и ограничимся лишь необходимыми для нашего случая определениями.

Определение. Функцией Бейкера–Ахиезера, отвечающей спектральным данным

$$\{\Gamma, P_1, P_2, k_1^{-1}, k_2^{-1}, D\},$$

будем называть функцию $\psi(w, \bar{w}) : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ заданную на Γ и зависящую от $w, \bar{w}$, такую, что:

- 1) ψ мероморфна на поверхности Γ всюду, кроме точек P_1, P_2 , и имеет на $\Gamma \setminus \{P_1, P_2\}$ простые полюса лишь в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ дивизора D .
- 2) в окрестностях точек P_1 и P_2 функция ψ имеет существенные особенности, такие, что произведения $\psi \exp(\frac{i}{2}k_1 \bar{w})$ и $\psi \exp(\frac{i}{2}k_2 w)$ являются аналитическими функциями в окрестностях точек P_1 и P_2 соответственно.

Функция Бейкера–Ахиезера с такими данными существует и единственна с точностью до умножения на константу. Тем самым функция

$\hat{\psi}_1(w, \bar{w})$, обладающая простыми полюсами в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ и асимптотикой в точке P_1 , вида:

$$\hat{\psi}_1(w, \bar{w}) = \exp\left(-\frac{i}{2}k_1\bar{w}\right)\left(c_1(w, \bar{w}) + \frac{d_1(w, \bar{w})}{k_1} + o(k_1^{-1})\right),$$

а в точке P_2 вида:

$$\hat{\psi}_1(w, \bar{w}) = \exp\left(-\frac{i}{2}k_2w\right)\left(1 + \frac{f_1(w, \bar{w})}{k_2} + o(k_2^{-1})\right),$$

существует и единственна.

Определим $\hat{\psi}_2(w, \bar{w})$ следующим образом:

$$\hat{\psi}_2(w, \bar{w}) = 2i\left(\psi_{1w} - \psi_1 \frac{c_{1w}}{c_1}\right).$$

Асимптотика $\hat{\psi}_2(w, \bar{w})$ в окрестности точки P_1 имеет вид:

$$\hat{\psi}_2(w, \bar{w}) = \exp\left(-\frac{i}{2}k_1\bar{w}\right)k_1^{-1}\left(c_2(w, \bar{w}) + \frac{d_2(w, \bar{w})}{k_1} + o(k_1^{-1})\right),$$

и в точке P_2 вид:

$$\hat{\psi}_2(w, \bar{w}) = \exp\left(-\frac{i}{2}k_2w\right)k_2\left(1 + \frac{f_2(w, \bar{w})}{k_2} + o(k_2^{-1})\right).$$

Лемма 1. Полагая $u = \ln\left(-\frac{i}{2f_{1\bar{w}}}\right)$, вектор-функция $\begin{pmatrix} \hat{\psi}_1 \\ \hat{\psi}_2 \end{pmatrix}$ является решением системы (8).

Доказательство леммы почти сразу вытекает из вида существенных особенностей левых и правых частей равенств системе (8). Также легко заметить, что $c_1 = Ke^{-\frac{u}{2}}$ и $c_2 = Ke^{\frac{u}{2}}$ для некоторой константы K .

Поскольку для минимальных поверхностей e^u чисто мнимая функция, то e^u является вещественной и отрицательной функцией. Для того чтобы e^u была вещественной функцией, необходимо наложить дополнительную редукцию. Такая редукция сформулирована в следующей лемме.

Лемма 2. Предположим, что $\tau : \Gamma \rightarrow \Gamma$ допускает антиголоморфную инволюцию, такую, что τ переставляет местами точки P_1 и P_2 , при этом $\tau(k_1^{-1}) = \bar{k}_2^{-1}$ и $\tau(k_2^{-1}) = \bar{k}_1^{-1}$. Предположим также, что существует мероморфная 1-форма Ω , обладающая нулями в точках $\gamma_1, \dots, \gamma_g, \tau\gamma_1, \dots, \tau\gamma_g$ и простыми полюсами в P_1, P_2 . Тогда c_1 является вещественной функцией.

Действительно, рассмотрим мероморфную 1-форму $\Omega_1 = \hat{\psi}_1(P)\hat{\psi}_2(\tau P)\Omega$. Форма Ω_1 , очевидно, обладает простыми полюсами лишь в точках P_1 и P_2 . Сумма вычетов Ω_1 равна:

$$Res_{P_1}\Omega_1 + Res_{P_2}\Omega_2 = c_1 Res_{P_1}\Omega + \bar{c}_1 Res_{P_2}\Omega = 0.$$

Но, поскольку $Res_{P_1}\Omega + Res_{P_2}\Omega = 0$, то $c_1 - \bar{c}_1 = 0$, т. е. c_1 вещественная функция. Тем самым лемма доказана.

Но из того факта, что $c_1 = Ke^u$ и e^u удовлетворяет (5), следует что e^u либо чисто мнимая и либо вещественная функция и, следовательно, e^u является вещественной функцией.

Примером, удовлетворяющим нашим требованиям, может послужить гиперэллиптическая кривая $\mu^2 = \nu \prod_{i=1}^{2g}(\nu - \nu_i)$. В качестве точек P_1 и P_2 следует рассматривать нулевую $\mu = 0, \nu = 0$ и бесконечно удаленную точку соответственно. В качестве мероморфной функции λ следует рассматривать проекцию $\lambda : (\mu, \nu) \mapsto \nu$. Антиголоморфная инволюция τ будет иметь вид $\tau : \nu \mapsto \frac{1}{\bar{\nu}}$, при этом нужно потребовать, чтобы $\nu_i, i = 1 \dots 2g$ разбивались на пары таким образом, чтобы под действием τ точки ветвления переходили в точки ветвления. Для более подробного рассмотрения случая гладкой спектральной кривой Γ см. [3],[4].

В следующем разделе мы рассмотрим, пожалуй, самый простой случай, когда спектральная кривая Γ является сферой со склеенными точками. В этом случае решение (9) выражается в элементарных функциях.

6. Простейший случай, отвечающий сингулярной спектральной кривой

Пусть Γ — сфера $\mathbb{CP}^1$ с отождествленными g парами точек $a_i \sim -a_i, i = 1, \dots, g$. Тогда функция Бейкера–Ахиезера $\hat{\psi}_1$ имеет вид:

$$\hat{\psi}_1(w, \bar{w}, \nu) = e^{-\frac{i}{2}\frac{1}{\bar{\nu}}\bar{w} - \frac{i}{2}\nu w} \left(1 + \frac{\eta_1(w, \bar{w})}{\nu - \gamma_1} + \dots + \frac{\eta_g(w, \bar{w})}{\nu - \gamma_g}\right),$$

где ν — параметр на сфере. Функцию λ положим равной ν^2 , так, что она принимает одинаковые значения на отождествленных точках. Антиголоморфную инволюцию τ явно зададим отображением $\tau : \nu \mapsto \frac{1}{\bar{\nu}}$.

Пусть Ω — мероморфная 1-форма вида:

$$\Omega = \frac{\prod_{i=1}^g (\nu - \gamma_i)(\nu - \frac{1}{\bar{\gamma}_i})}{\nu \prod_{i=1}^n (\nu - a_i)(\nu + a_i)} d\nu.$$

Форма Ω имеет простые полюса в точках P_1, P_2 и $a_i, -a_i, i = 1 \dots g$, и нули в точках $\gamma_i, \tau\gamma_i, i = 1 \dots g$. Для регулярности Ω на Γ потребуем выполнения равенств

$$Res_{a_i}\Omega + Res_{-a_i}\Omega = 0, i = 1 \dots g. \quad (10)$$

Нетрудно проверить, что равенства (10) справедливы, если и только если $a_i, i = 1 \dots g$ является корнем полинома $P(a)$ степени $2g$:

$$P(a) = (a - \gamma_1)(a - \frac{1}{\bar{\gamma}_1}) \dots (a - \gamma_g)(a - \frac{1}{\bar{\gamma}_g}) +$$

$$+(a + \gamma_1)(a + \frac{1}{\gamma_1}) \dots (a + \gamma_g)(a + \frac{1}{\gamma_g}) \quad (11)$$

Заметим, что если $P(a) = 0$, то $P(-a) = 0$ и $P(\tau a) = 0$. Тем самым в качестве $a_i, i = 1 \dots g$ следует выбрать корнями полинома $P(a)$ для некоторого набора $\gamma_i, i = 1 \dots g$, и тогда условие леммы 2 будет удовлетворено автоматически.

Согласно лемме 1:

$$e^u = \frac{1}{2i \sum_{i=1}^g \eta_{i\bar{w}} + 1}.$$

Коэффициенты $\eta_i(w, \bar{w})$ однозначно находятся из решения системы линейных уравнений, заданных равенствами $\hat{\psi}_1(a_i) = \hat{\psi}_1(-a_i), i = 1 \dots g$, возникающими из условия совпадения значений функций $\hat{\psi}_1$ в точках a_i и $-a_i, i = 1 \dots g$. В качестве простой проверки знака e^u можно вычислить его значение в точке $w = 0$. Это значение, как нетрудно проверить, равно $\frac{a_1^2 \dots a_g^2}{\gamma_1^2 \dots \gamma_g^2}$, и подставляя вместо $a_i, i = 1 \dots g$ корни полинома (11), получаем $\frac{2(-1)^g}{|\gamma_1|^2 \dots |\gamma_g|^2}$. Таким образом, e^u отрицательно для нечетных g . Во избежание громоздкости случая $g \geq 3$, приведем в явном виде лишь случай $g = 1$.

В простейшем случае $g = 1$, полином (11) имеет вид $a^2 + \frac{\gamma}{\bar{\gamma}}$, и полагая $\gamma = \rho(\cos \phi + i \sin \phi)$, получаем, что $a = -\sin \phi + i \cos \phi$. Пусть $\tau(x, y) = \sin \phi x + \cos \phi y$, где $w = x + iy$ и тогда

$$e^u = -\frac{(\cos(\tau(x, y)) + \rho \sin(\tau(x, y)))^2}{(\sin(\tau(x, y)) - \rho \cos(\tau(x, y)))^2}.$$

Литература

- [1] Бердинский, Д. А. *Поверхности в трехмерных группах Ли* / Д. А. Бердинский, И. А. Тайманов // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 6. – С. 1248 – 1264.
- [2] Бердинский, Д. А. *О поверхностях постоянной средней кривизны в группе Гейзенберга* / Д. А. Бердинский // Математические труды. – 2010. – Т. 13, № 2. – С. 1 – 7.
- [3] Бобенко, А. И. *Поверхности постоянной средней кривизны и интегрируемые уравнения* / А. И. Бобенко // Успехи математических наук. – 1991. – Т. 46, № 4. – С. 3 – 42.
- [4] Тайманов, И. А. *Гладкие вещественные конечнозонные решения уравнений типа sin-Gordon* / И. А. Тайманов // Математические заметки. – 1990. – Т. 47, № 1. – С. 147 – 156.

УДК 515.162.8

ИНВАРИАНТЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФОВ И ГРУППЫ КОКСЕТЕРА

А. Ю. Веснин

INVARIANTS OF SPATIAL GRAPHS AND COXETER GROUPS

A. Yu. Vesnin

В работе обсуждаются инварианты пространственных графов. Строится инвариант, имеющий структуру группы Коксетера. Приводятся примеры распознавания пространственных графов с помощью этого инварианта.

We discuss some invariants of spatial graphs. We construct an invariant which has a structure of a Coxeter group. We give examples to show that this invariant distinguishes some spatial graphs.

Ключевые слова: пространственный граф, инвариант, преобразования Рейдемейстера, группы Коксетера.

Keywords: spatial graph, invariant, Reidemeister moves, Coxeter groups.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00642, 10-01-91056-НЦНИ-а) и интегративного проекта СО РАН и УрО РАН.

1. Пространственные графы, диаграммы и движения Рейдемейстера

В работе обсуждаются инварианты пространственных графов, т. е. вложений графов в трехмерное пространство $\mathbb{R}^3$. В последние годы многие методы построения и исследования инвариантов узлов переносятся на случай пространственных графов. Мы приводим пример построения инварианта, связанного с распутывающими соотношениями и инварианта, связанного с расстановкой

меток на дугах диаграммы. В обоих случаях даются примеры вычисления инвариантов для пространственных вложений тэта-графа.

Пусть $G = (V, E)$ – конечный граф с множеством вершин V и множеством ребер E , возможно, имеющий петли и кратные ребра. Пусть $\mathcal{G} = f(G)$ – его пространственное вложение (т. е. отображение $f : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ является вложением, которое мы всегда предполагаем конечно-звенным полигональным). Граф $\mathcal{G} = f(G)$, вложенный в $\mathbb{R}^3$, будем называть пространственным графом. В частности,