

УДК 515.16 + 512.54

О СВЯЗИ НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ТОПОЛОГИИ И КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ГРУПП***В. Г. Бардаков, М. В. Нещадим*****ON CONNECTION BETWEEN SOME PROBLEMS OF HOMOTOPY TOPOLOGY AND COMBINATORIAL GROUP THEORY*****V. G. Bardakov M. V. Neshchadim***

В настоящей работе приводятся основные понятия гомотопической топологии, рассказывается о проблеме Пуанкаре и формулируется $D(2)$ -гипотеза. Затем напоминаются некоторые факты комбинаторной теории групп, формулируется проблема скачка соотношений и проблема минимального нормального порождения. Устанавливается связь между проблемами этой теории и проблемами гомотопической топологии. В частности, дается переформулировка гипотезы Пуанкаре в групповых терминах и отмечается связь проблемы скачка соотношений и $D(2)$ -гипотезы. Далее предлагается метод, позволяющий для некоторых конечных представлений групп показать, что число соотношений не может быть уменьшено (подход к проблеме минимального нормального порождения).

In this paper we formulate basic notions of homotopy topology, tell on hypothesis of Poincare and formulate $D(2)$ -hypothesis. After that we remind some facts from combinatorial group theory, formulate the problem of gap relation and the problem of minimal normal generation. We mention connection between problems of this theory and problems of homotopy topology. In particular, it will be given a reformulation of Poincare's hypothesis in group terms and mention a connection between the problem of gap relation and the $D(2)$ -hypothesis. Then we offer the method that allows to show for some finite representations of groups that the number of relationship can't be reduced (the approach to a problem of the minimum normal generation).

Ключевые слова: многообразие, клеточное пространство, гомотопическая группа, группы гомологий и когомологий, конечно определенная группа, минимальное число соотношений, модуль соотношений, скачек соотношений.

Keywords: manifold, cellular space, homotopy group, homologic groups and cohomologic groups, finitely defining group, minimal number of relations, module of relations, gap of relations.

Работа выполнена при поддержке АБЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт No. 02.740.11.5191).

Введение

Настоящая статья является расширенным вариантом лекции, прочитанной первым автором на конференции «Геометрия и анализ», которая проходила в Кемеровском государственном университете с 19-го по 26-е июня 2011 года.

К сожалению, курс гомотопической топологии не входит в программу большинства университетов. Поэтому мы сочли уместным посвятить первый параграф формулировке основных понятий и результатов этой теории. Второй параграф посвящен некоторым проблемам комбинаторной теории групп. Комбинаторная теория групп изучает группы, заданные порождающими и соотношениями. При этом одна и та же группа может быть задана разными системами порождающих и соотношений. Если зафиксировать множество порождающих некоторой группы, то вопрос о минимальном числе соотношений, задающих эту группу, называется проблемой минимального нормального порождения. Эта проблема равносильна такой проблеме: для заданной нормальной подгруппы R свободной группы F найти минимальное число элементов, нормальное замыкание которых в груп-

пе F порождает R . С проблемой минимального нормального порождения тесно связана проблема скачка соотношений.

Яркий пример связи топологии с комбинаторной теорией групп дает проблема Пуанкаре, решенная недавно Г. Я. Перельманом. Сама гипотеза Пуанкаре формулируется следующим образом: всякое односвязное компактное 3-многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере. Как видим, это чисто топологическая проблема. Тем не менее Столингс и Джако [1, с. 266] показали, что проблема Пуанкаре равносильна следующей гипотезе из комбинаторной теории групп: при $g > 1$ всякий гомоморфизм $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow F_g \times F_g$ из фундаментальной группы компактной ориентируемой поверхности Σ_g рода g на прямое произведение свободных групп $F_g \times F_g$ существенно пропускается через свободное произведение. Так как гипотеза Пуанкаре справедлива, то справедлива и эта гипотеза.

В настоящей работе приводятся основные понятия гомотопической топологии: гомотопическая эквивалентность, гомотопическая группа, груп-

пы гомологий и когомологий, накрытия, расслоения и т.д. Рассказывается о проблеме Пуанкаре и формулируется $D(2)$ -гипотеза. Далее напоминаются некоторые факты комбинаторной теории групп, формулируется проблема скачка соотношений и проблема минимального нормального порождения. Затем устанавливается связь между проблемами этой теории и проблемами гомотопической теории групп. В частности, отмечается, что из положительного решения скачка соотношений для конечно определенных групп следует опровержение $D(2)$ -гипотезы. В заключение предлагается метод, позволяющий для некоторых конечных представлений групп показать, что число соотношений не может быть уменьшено (подход к проблеме минимального нормального порождения). В частности, будет доказано, что если m и n не являются взаимно простыми, то группа $K_{m,n} = \langle x, y, z \mid x^m = y^n = [x, z] = [y, z] = 1 \rangle$ не может быть задана тремя соотношениями в порождающих x, y, z . Если же m и n взаимно просты, то будет доказано, что группа $K_{m,n}$ может быть задана в тех же порождающих тремя соотношениями.

Благодарим организаторов конференции за любезное приглашение принять участие в конференции, пообщаться с коллегами и сделать доклад. Благодарим В. В. Чушева, пожертвовавшего своим докладом в пользу нашего. Особая благодарность за незабываемую экскурсию, организованную во время конференции. Это была одна из самых запоминающихся экскурсий, организованных на аналогичных конференциях.

1. Гомотопическая топология

В этом параграфе мы напомним основные факты из гомотопической топологии, которые можно найти в классическом учебнике [2].

1.1. Многообразие и клеточные комплексы

Топология изучает топологические многообразия, а также их обобщения — клеточные пространства или клеточные комплексы. Хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой называется n -мерным *многообразием*, если каждая его точка обладает окрестностью, гомеоморфной пространству $\mathbb{R}^n$ или полупространству $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \leq 0\}$. Точки n -мерного многообразия, не имеющие окрестности, гомеоморфной $\mathbb{R}^n$, составляют край ∂X многообразия X . Край n -мерного многообразия есть $n-1$ -мерное многообразие без края. Многообразие называется *замкнутым*, если оно компактно и не имеет края.

Примерами многообразий являются n -мерная *сфера*:

$$S^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1\},$$

n -мерный *шар*:

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n \leq 1\}.$$

Таким образом, S^{n-1} есть граница шара D^n в $\mathbb{R}^n$.

Вещественное n -мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ определяется как совокупность проходящих через начало координат прямых пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, топологизированная угловой метрикой: расстояние между двумя прямыми равно углу между ними. Координаты $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ направляющего вектора прямой (определенные, очевидно, с точностью до пропорциональности) называются *однородными координатами* точки проективного пространства; стандартное обозначение $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$. Бесконечномерное проективное пространство $\mathbb{R}P^\infty$ определяется как объединение $\bigcup \mathbb{R}P^i$. Если заменить в определении пространства $\mathbb{R}P^n$ пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ пространством $\mathbb{C}^{n+1}$ и вещественные прямые комплексными прямыми, то получим определение *комплексного проективного пространства* $\mathbb{C}P^n$.

По сравнению с топологическими многообразиями, более общими объектами являются клеточные пространства.

Клеточное пространство — это хаусдорфово топологическое пространство K , представленное в виде объединения

$$\bigcup_{q=0}^{\infty} \bigcup_{i \in I_q} e_i^q$$

попарно непересекающихся множеств e_i^q (*клеток*) таким образом, что для каждой клетки существует отображение f_i^q шара D^q в K (характеристическое отображение, отвечающее клетке e_i^q), сужение которого на внутренность $\text{Int } D^q$ шара D^q представляет собой гомеоморфизм $\text{Int } D^q \simeq e_i^q$. При этом предполагаются выполненными следующие аксиомы.

(C) Граница $\dot{e}_i^q = \bar{e}_i^q - e_i^q$ клетки e_i^q содержится в объединении конечного числа клеток e_j^r с $r < q$.

(W) Множество $F \subset K$ замкнуто тогда и только тогда, когда для любой клетки e_i^q замкнуто пересечение $F \cap \bar{e}_i^q$.

Топология, описываемая аксиомой (W), является слабейшей из топологий, по отношению к которой все характеристические отображения непрерывны. Часто клеточное пространство называют клеточным комплексом или CW -комплексом.

Клеточное подпространство клеточного пространства K — это замкнутое его подмножество, составленное из целых клеток. Важнейшие клеточные подпространства клеточного пространства — его остовы: n -й *остов* есть объединение всех клеток размерности $\leq n$ (по определению, размерность клетки e_i^q равна q). Стандартные обозначения для n -го остова пространства K : K^n или $sk_n K$. Клеточное пространство называется конечным (счетным), если оно состоит из конечного

(счетного) числа клеток. Заметим, что для конечных клеточных пространств аксиомы (C), (W) выполняются автоматически.

Всякое клеточное пространство может быть сконструировано при помощи многократного применения операции приклеивания клеток. При этом остов $sk_n K$ получается приклеиванием n -мерных шаров к остову $sk_{n-1} K$ посредством всех отображений вида $f_i^q|_{\partial D^n}$.

С другой стороны, всякое топологическое многообразие можно разбить на симплексы, т. е. триангулировать. Напомним, что *евклидов симплекс* T^q в $\mathbb{R}^{q+1}$ определяется следующим образом:

$$T^q = \left\{ (t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_0 \geq 0, \dots, t_q \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}.$$

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Под q -мерным *сингулярным симплексом* пространства X понимается непрерывное отображение стандартного q -мерного симплекса T^q в X . Справедлива

Теорема 1. *Всякое компактное гладкое многообразие гомеоморфно триангулированному подмножеству евклидова пространства, причем гомеоморфизм может быть сделан гладким на каждом симплексе триангуляции.*

1.2. Гомотопии

Одной из основных проблем топологии является классификация многообразий с точностью до гомеоморфизма. Можно классифицировать многообразия или клеточные пространства с точностью до гомотопии.

Пусть X и Y — топологические пространства. Непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : X \rightarrow Y$ называются *гомотопными* (обозначается $f \sim g$), если существует семейство отображений $\varphi_t : X \rightarrow Y$, $t \in I$, такое, что

$$1) \varphi_0 = f, \varphi_1 = g;$$

$$2) \text{ отображение } \Phi : X \times I \rightarrow Y, \text{ заданное равенством } \Phi(x, t) = \varphi_t(x), \text{ непрерывно.}$$

Условие 2) является формализацией непрерывной зависимости φ_t от параметра t . Отображение Φ называется *гомотопией*, связывающей отображения f и g .

Нетрудно проверить, что отношение гомотопности является отношением эквивалентности на пространстве $C(X, Y)$ непрерывных отображений из X в Y (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Множество классов эквивалентности (гомотопические классы), на которые отношение гомотопности разбивает пространство $C(X, Y)$, обозначается $\pi(X, Y)$.

Пространства X и Y называются *гомотопически эквивалентными* (обозначается $X \sim Y$), если существуют непрерывные отображения $f : X \rightarrow Y$ и $g : Y \rightarrow X$, такие что композиции $f \circ g : Y \rightarrow Y$ и $g \circ f : X \rightarrow X$ гомотопны тождественным отображениям $id : Y \rightarrow Y$ и $id : X \rightarrow X$ соответственно.

Отображения f и g в этой ситуации называются *гомотопическими эквивалентностями*.

Если отображения $f \circ g$ и $g \circ f$ не просто гомотопны тождественным отображениям, но и являются таковыми, то f и g взаимно обратные гомеоморфизмы.

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом*. Примером гомотопически эквивалентных, но не гомеоморфных пространств являются, например, точка и шар, окружность и полноторие.

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $X \rightarrow X$ гомотопно отображению $X \rightarrow X$, переводящему все X в точку.

Подпространство A пространства X называется его *ретрактом*, если существует непрерывное отображение $r : X \rightarrow X$ (ретракция), такое, что $r(X) = A$ и $r(a) = a$ при $a \in A$. Если ретракция гомотопна тождественному отображению, то A называется *деформационным ретрактом* пространства X . Если, сверх того, гомотопию, соединяющую ретракцию с тождественным отображением, можно выбрать тождественной на подпространстве A , то A называется *строгим деформационным ретрактом* пространства X .

Очевидно, деформационный ретракт пространства X гомотопически эквивалентен X . Более того, A является деформационным ретрактом пространства X в том и только том случае, если включение A в X является гомотопической эквивалентностью.

1.3. Гомотопические группы

Одним из подходов к классификации многообразий с точностью до гомотопии является изучение дискретных инвариантов соответствующих топологическим пространствам и непрерывным отображениям. Обычно эти инварианты принимают одинаковые значения на гомотопически эквивалентных пространствах и гомотопных отображениях. Наиболее распространенная процедура построения инвариантов состоит в следующем. Фиксируется пространство Y и затем произвольному пространству X ставится в соответствие множество $\pi(X, Y)$ или множество $\pi(Y, X)$. Если пространства X и Y с отмеченными точками, то можно рассмотреть только отображения, сохраняющие эти точки, и соответствующие классы гомотопических отображений $\pi_b(X, Y)$ или $\pi_b(Y, X)$. Изучать эти множества значительно проще если в них имеется естественная групповая структура.

Путем в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\varphi : I \rightarrow X$ отрезка $I = [0, 1]$. При этом точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются началом и концом пути φ ; если начальная и конечная точки пути совпадают, то такой путь называется *петлей*. Пространство всех путей

пространства X обозначается $C(I, X)$, а его подпространство петель — $\Omega(X)$. Можно рассмотреть также пространство петель с фиксированным началом $\Omega(X, x_0)$. Все эти пространства наделяются естественной топологией.

Фундаментальная группа является первой из бесконечной серии гомотопических групп $\pi_n(X)$, $n = 1, 2, \dots$, которые соответствуют топологическому пространству X . Фундаментальной группой пространства X с отмеченной точкой x_0 называется его одномерная гомотопическая группа $\pi_1(X) = \pi_b(S^1, X)$. Более подробно рассматриваются петли пространства X . Петли φ и φ' называются *гомотопными*, если существует такая гомотопия $\varphi_t : I \rightarrow X$, что $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1 = \varphi'$ и $\varphi_t(0) = \varphi_t(1) = x_0$, $t \in I$. Произведение $\varphi\psi$ петель φ и ψ это такая петля χ , что

$$\chi(t) = \begin{cases} \varphi(2t) & \text{при } t \leq 1/2, \\ \psi(2t-1) & \text{при } t \geq 1/2. \end{cases}$$

Другими словами, произведение двух петель — это петля составленная из этих двух петель, которые проходятся последовательно. Как легко проверить, это умножение порождает умножение и в множестве гомотопических классов петель. Относительно этого умножения гомотопические классы образуют группу. Это и есть фундаментальная группа $\pi_1(X, x_0)$. Обратным к классу петли $\varphi : I \rightarrow X$ служит класс петли $\varphi' : I \rightarrow X$, определенный формулой $\varphi'(t) = \varphi(1-t)$.

Пространство, любые две точки которого можно соединить путем, называется *линейно связным*. Если пространство нельзя представить в виде объединения непересекающихся открытых множеств, то такое пространство называется *связным*. Отметим, что если пространство линейно связно, то оно и связно. Обратное, вообще говоря, неверно (стандартным примером является график функции $\sin(1/x)$ на интервале $(0, 1)$, объединенный с отрезком $[-1, 1]$ оси OY). Но в важных частных случаях (клеточные пространства, многообразия) понятия связности и линейной связности совпадают.

Можно показать, что если пространство X линейно связно, то фундаментальная группа не зависит от выбора точки x_0 , т. е. $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$ для любых точек $x_0, x_1 \in X$. Кроме того, фундаментальная группа не меняется при гомотопической эквивалентности и тем более при гомеоморфизме. Более точно. Если $f : X \rightarrow Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для любой точки $x_0 \in X$ гомоморфизм $f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ является изоморфизмом.

Для вычисления фундаментальной группы клеточного пространства достаточно знать лишь его двумерный остов. Более точно, справедлива

Теорема 2. $\pi_1(X) \simeq \pi_1(X^2)$ для любого клеточного пространства X и его двумерного остова X^2 .

С другой стороны, всякая группа, задаваемая конечным набором образующих и соотношений, служит фундаментальной группой некоторого замкнутого многообразия. Более того, это многообразие можно выбрать четырехмерным. Однако нельзя понизить его размерность до трех: группа $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ не является фундаментальной группой никакого замкнутого трехмерного многообразия. Это наблюдение и позволяет перебросить мостик между гомотопической топологией и комбинаторной теорией групп.

Обобщением понятия фундаментальной группы является понятие *гомотопической группы* $\pi_n(X, x_0)$, которая определяется как множество гомотопических классов отображений $S^n \rightarrow X$, переводящих отмеченную точку сферы S^n в отмеченную точку $x_0 \in X$. Сами эти отображения называются сфероидом. Иначе, сфероид можно определить как отображение n -мерного куба I^n в X , переводящее границу ∂I^n в отмеченную точку $x_0 \in X$.

Сумма двух сфероидов $f, g : S^n \rightarrow X$ определяется как сфероид $f + g : S^n \rightarrow X$, построенный следующим образом: экватор сферы S^n (содержащий отмеченную точку) сжимается в точку, в результате чего сфера превращается в букет двух сфер, затем сферы, составляющие этот букет, отображаются в X с помощью отображений f и g .

Сложение сфероидов не является групповой операцией. Однако оно гомотопически инвариантно (т. е. если $f \sim f'$ и $g \sim g'$, то $f + g \sim f' + g'$) и поэтому индуцирует операцию в множестве $\pi_n(X, x_0)$, а последняя уже является групповой. При $n \geq 2$ эта операция коммутативна.

Если $\varphi : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение, переводящее отмеченную точку $x_0 \in X$ в отмеченную точку $y_0 \in Y$, то возникает гомоморфизм $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$, не меняющийся при замене отображения φ гомотопным. В частности, у гомотопически эквивалентных пространств с отмеченными точками гомотопические группы одинаковы.

Одной из основных проблем гомотопической топологии в середине прошлого века считалась задача вычисления гомотопических групп сфер. Описание этих групп для одномерной сферы дано

Теорема 3. *Гомотопические группы одномерной сферы имеют вид:*

$$\pi_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } n = 1, \\ 0 & \text{при } n \geq 2. \end{cases}$$

1.4. Отображения клеточных пространств

Непрерывное отображение f клеточного пространства X в клеточное пространство Y называется *клеточным*, если $f(sk_n X) \subset sk_n Y$. Отметим,

что клетка при клеточном отображении не обязана отображаться в клетку, а может размазываться по нескольким клеткам, задевая при этом клетки меньшей размерности.

Отображение клеточного пространства в другое топологическое пространство непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно на любом конечном подпространстве.

Теорема 4. *Всякое непрерывное отображение одного клеточного пространства в другое гомотопно клеточному отображению.*

Ранее мы дали определение связного пространства. Обобщением этого понятия является n -связное пространство.

Определение. *Пространство X называется n -связным, если при $q \leq n$ множество $\pi(S^q, X)$ состоит из одного элемента (то есть любые два отображения $S^q \rightarrow X$ с $q \leq n$ гомотопны).*

Описание n -связных пространств дает

Теорема 5. *Всякое n -связное клеточное пространство гомотопически эквивалентно клеточному пространству с единственной вершиной и без клеток размерностей 1, 2, ..., n .*

1.5. Накрытия

Линейно связное пространство T называется *накрывающей* для линейно связного пространства X , если задано отображение $p : T \rightarrow X$, такое, что для любой точки $x \in X$ имеется окрестность $U \subset X$, для которой $p^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times \Gamma$, где Γ — дискретное множество, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \simeq & U \times \Gamma \\ p \searrow & & \swarrow \text{проекция} \\ & U & \end{array}$$

коммутативна. Отображение $p : T \rightarrow X$ называется в этой ситуации *накрытием*.

Если $p : T \rightarrow X$ накрытие и $\tilde{x}_0$ — произвольная точка пространства T , такая, что $x_0 = p(\tilde{x}_0)$, то $p_* : \pi_1(T, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ является мономорфизмом, т. е. инъективным отображением.

Накрытие $p : T \rightarrow X$ называется *регулярным*, если группа $p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0))$ является нормальной подгруппой в группе $\pi_1(X, x_0)$. Если $p : T \rightarrow X$ есть регулярное накрытие, то существует свободное действие фактор-группы $G = \pi_1(X, x_0)/p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0))$ на пространстве T , такое, что $X = T/G$ (точнее: такое, что его орбиты совпадают с множествами $p^{-1}(x)$). Верно и обратное: если группа G действует на пространстве T свободно и дискретно (последнее означает, что каждая точка $\tilde{x} \in T$ обладает такой окрестностью U , что множества gU , $g \in G$, попарно не пересекаются), то естественная проекция $T \rightarrow X = T/G$ является регулярным накрытием. Более того, в этом случае $\pi_1(X)/\pi_1(T) = G$.

Накрытие $p : T \rightarrow X$ называется *универсальным*, если T односвязно. Очевидно, что универсальное накрытие односвязно.

Накрытия $p_1 : T_1 \rightarrow X$ и $p_2 : T_2 \rightarrow X$ называются *эквивалентными*, если существует такой гомеоморфизм $f : T_1 \rightarrow T_2$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_1 & \xrightarrow{f} & T_2 \\ p_1 \searrow & & \swarrow p_2 \\ & X & \end{array}$$

коммутативна. Отображение $f : T_1 \rightarrow T_2$ называется *эквивалентностью*.

Можно доказать следующий критерий эквивалентности накрытий.

Теорема 6. *Пусть $p_1 : T_1 \rightarrow X$ и $p_2 : T_2 \rightarrow X$ накрытия, $x \in X$, $\tilde{x}_1 \in T_1$, $\tilde{x}_2 \in T_2$ такие точки, что $p_1(\tilde{x}_1) = x$, $p_2(\tilde{x}_2) = x$. Если X — клеточное пространство или многообразие, то накрытия p_1 и p_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда группы $p_{1*}(\pi_1(T_1, \tilde{x}_1))$ и $p_{2*}(\pi_1(T_2, \tilde{x}_2))$ сопряжены в группе $\pi_1(X, \tilde{x})$.*

Теорема 7. *Пусть X — линейно связное клеточное пространство или многообразие и $x_0 \in X$ — точка. Тогда для любой подгруппы G группы $\pi_1(X, x_0)$ существует накрытие $p : T \rightarrow X$ и точка $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$, такие, что $p_*(\pi_1(T, \tilde{x}_0)) = G$. В частности, над X существует универсальное накрытие.*

Таким образом, для достаточно хорошего линейно связного пространства X классы эквивалентных накрытий над X находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженных подгрупп фундаментальной группы пространства X . В частности, над достаточно хорошим односвязным пространством вообще нет нетривиальных накрытий. Более точно, справедлива

Теорема 8. *Если $p : T \rightarrow X$ — накрытие и $n \geq 2$, то $p_* : \pi_n(T, t_0) \rightarrow \pi_n(X, p(t_0))$ есть изоморфизм.*

1.6. Расслоения

Расслоением, или *локально тривиальным расслоением*, называется четверка (E, B, F, p) , где E , B , F — пространства, а p — отображение $E \rightarrow B$, причем любая точка $x \in B$ обладает такой окрестностью $U \subset B$, что $p^{-1}(U) \simeq U \times F$; более того, существует гомеоморфизм $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$, замыкающий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ p \searrow & & \swarrow \text{проекция} \\ & U & \end{array}$$

Пространства B и F называют *базой* и *слоем* расслоения.

Примеры расслоений. 1) Расслоение Хопфа:

$$E = S^3 = \{(z_1, z_2) \mid z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2,$$

$$B = S^2 = \mathbb{CP}^1, \quad p(z_1, z_2) = (z_1 : z_2), \quad F = S^1.$$

2) Существует естественное отображение $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$. Обозначая это отображение через p , получаем расслоение $(S^{2n+1}, \mathbb{CP}^n, S^1, p)$, которое обобщает предыдущее и тоже называется расслоением Хопфа.

Отметим, что накрытие является частным случаем расслоения. Слоем при этом является пространство с дискретной топологией.

Упражнение. Выведите из точной гомотопической последовательности хопфовского расслоения (S^3, S^2, S^1, p) , что имеют место следующие изоморфизмы

$$\pi_2(S^2) \simeq \pi_1(S^1) \text{ и } \pi_n(S^3) \simeq \pi_n(S^2) \text{ при } n \geq 3.$$

1.7. Гомотопические группы и клеточные пространства

С каждым пространством X можно связать пространство ΣX , которое определяется как факторпространство цилиндра $X \times I$ по его основаниям $X \times \{0\}$ и $X \times \{1\}$. Пространство ΣX называется *надстройкой* над пространством X . Например, легко проверить, что $\Sigma S^n \simeq S^{n+1}$. Справедлива

Теорема (Фрейденталь). Гомоморфизм надстройки

$$\Sigma : \pi_q(S^n) \longrightarrow \pi_{q+1}(S^{n+1})$$

является изоморфизмом при $q \leq 2n - 2$ и эпиморфизмом при $q = 2n - 1$.

Эта теорема позволяет вычислить некоторые гомотопические группы сфер.

Теорема 9. Если Y — клеточное подпространство пространства X и разность $X - Y$ не содержит клеток размерности $\leq n$, то гомоморфизм $\pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(X)$, индуцированный вложением, является изоморфизмом при $i < n$ и эпиморфизмом при $i = n$. В частности, $\pi_n(X) = \pi_n(sk_{n+1}X)$ для любого клеточного пространства X .

Утверждение. n -я гомотопическая группа пространства X порождается n -мерными клетками, соотношения отвечают $n + 1$ -мерным клеткам.

Теорема (Уайтхед). Пусть X, Y — клеточные пространства. Если непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ обладает тем свойством, что

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

есть изоморфизм при всех n и x_0 , то f есть гомотопическая эквивалентность.

Однако в общем случае для гомотопической эквивалентности клеточных пространств, вообще говоря, недостаточно, чтобы их гомотопические группы были изоморфны: нужно, чтобы изоморфизм устанавливался некоторым непрерывным отображением.

Теорема 10. Пусть n — натуральное число и π — группа, предполагаемая абелевой при $n > 1$. Тогда существует клеточное пространство X , такое, что

$$\pi_i(X) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq n, \\ \pi & \text{при } i = n. \end{cases}$$

Такие клеточные пространства называются пространствами Эйленберга-Маклейна или пространствами типа $K(\pi, n)$.

1.8. Гомологии

Наряду с гомотопическими группами топологического пространства X можно рассматривать другие гомотопические инварианты. Например, такими инвариантами являются группы гомологий $H_k(X)$ и когомологий $H^k(X)$. По сравнению с гомотопическими группами они определяются достаточно громоздко, но зато легче вычисляются и геометрически более наглядны.

Напомним, что *евклидов симплекс* T^q в $\mathbb{R}^{q+1}$ определяется следующим образом:

$$T^q = \{(t_0, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid t_0 \geq 0, \dots, t_q \geq 0, \sum t_i = 1\}.$$

Пусть X — произвольное топологическое пространство. Под q -мерным *сингулярным симплексом* пространства X понимается непрерывное отображение стандартного q -мерного симплекса T^q в X . Под q -мерной (сингулярной) *цепью* пространства X понимается конечная линейная комбинация сингулярных симплексов пространства X с целыми коэффициентами; запись $\sum k_i f_i$, $f_i : T^q \rightarrow X$. Множество q -мерных сингулярных цепей пространства X обозначается через $C_q(X)$. Сложение цепей как линейных комбинаций делает $C_q(X)$ группой, то есть $C_q(X)$ — свободная абелева группа, порожденная множеством всех q -мерных сингулярных симплексов пространства X .

Определим *граничный гомоморфизм*

$$\partial = \partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X).$$

Учитывая, что $C_q(X)$ свободна, достаточно определить ∂ на сингулярных симплексах. Для сингулярного симплекса f полагаем

$$\partial f = \sum (-1)^i \Gamma_i f,$$

где $\Gamma_i f$ — сужение отображения f на i -ю грань

$$T_i^{q-1} = \{(t_0, \dots, t_q) \in T^q \mid t_i = 0\}$$

стандартного симплекса T^q .

Теорема 11. *Композиция*

$$C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X)$$

тривиальна, то есть $\text{Im } \partial_{q+1} \subset \text{Ker } \partial_q$.

Определение. Факторгруппа

$$H_q(X) = \text{Ker } \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1}$$

называется q -й гомологической группой пространства X . Это определение имеет силу при $q \geq 1$. Полагают $H_0(X) = C_0(X) / \text{Im } \partial_1$ и $H_q(X) = 0$ при $q < 0$.

Для групп $\text{Im } \partial_{q+1}$ и $\text{Ker } \partial_q$ приняты обозначения $B_q(X)$ и $Z_q(X)$ соответственно. В этих обозначениях

$$H_q(X) = Z_q(X) / B_q(X).$$

Цепи из $Z_q(X)$ и $B_q(X)$ называют соответственно *циклами* и *границами*. Циклы разность которых есть граница, называют *гомологичными*. Таким образом, элементы группы гомологий — это классы гомологичных циклов, иногда их называют *гомологическими классами*.

Если группа $H_q(X)$ конечно порождена, то ее ранг (то есть число слагаемых $\mathbb{Z}$ в каноническом разложении $H_q(X) = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{k_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{k_s}$) называется q -м *числом Бетти* пространства X .

Цепным комплексом называется последовательность

$$\begin{aligned} \dots \longrightarrow C_q(X) &\xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \longrightarrow \dots \\ \dots \longrightarrow C_1(X) &\xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \end{aligned}$$

абелевых групп, в которой $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$, $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$ и ε — эпиморфизм.

У гомотопически эквивалентных пространств гомологии одинаковы.

Предложение 1. *Если $\{X_\alpha\}$ — множество компонент связности пространства X , то при любом q*

$$H_q(X) = \bigoplus_{\alpha} H_q(X_{\alpha}).$$

1.9. Вычисление гомологий клеточных пространств

Гомологические группы сфер, в отличие от гомотопических групп, вычислять довольно легко. Справедлива

Теорема 12. *Гомологические группы сфер определяются равенствами*

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при } i = 0, n, \\ 0 & \text{при } i \neq 0, n. \end{cases}$$

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться тем, что $\Sigma S^k \simeq S^{k+1}$.

Также справедлива

Теорема 13. *Для любого топологического пространства X и любого i имеет место изоморфизм*

$$H_i(\Sigma X) = H_{i-1}(X),$$

где Σ — надстройка.

Следствие. *Если число q -мерных клеток клеточного пространства X равно n , то группа $H_q(X)$ порождается не более чем n элементами. В частности, $b_q(X^q) \leq n$, где b_q — q -е число Бетти и X^q — q -мерный остов пространства X . Например, если у X нет q -мерных клеток, то $H_q(X) = 0$, в частности, если $\dim X = m$, то $H_q(X) = 0$ при $q > m$.*

Пусть X — компактное триангулированное подмножество евклидова пространства (*полиэдр*). Открытые симплексы триангуляции составляют клеточное разбиение пространства X . Соответствующий клеточный комплекс устроен следующим образом. Зафиксируем некоторый порядок всех вершин триангуляции, тогда будут упорядочены и вершины каждого симплекса. Клеточная q -мерная цепь — это линейная комбинация вида $\sum k_i \sigma_i$, где σ_i — симплексы размерности q . Граничный оператор ∂ действует по формуле

$$\partial(\sum k_i \sigma_i) = \sum k_i \sum_{r=0}^q \Gamma_r \sigma_i,$$

где $\Gamma_r \sigma_i$ есть r -я грань симплекса σ_i . Этот комплекс называется *классическим*. Его гомологии совпадают с гомологиями пространства X .

1.10. Гомологии и гомотопии

Между гомотопическими и гомологическими группами нет прямой связи. В частности, можно показать, что пространства S^2 и $\mathbb{C}P^\infty \times S^3$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные группы гомологий. С другой стороны, пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^1$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые гомологические группы, но разные гомотопические группы.

Тем не менее у связного пространства первая нетривиальная гомотопическая группа изоморфна соответствующей гомологической группе. Чтобы формализовать это утверждение, введем некоторые определения.

Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой x_0 . Обозначим через s_n каноническую образующую группы $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $n = 1, 2, \dots$. Для любого $\varphi \in \pi_n(X, x_0)$ положим

$$h(\varphi) = f_*(s_n) \in H_n(X),$$

где $f : S^n \rightarrow X$ — произвольный сфероид класса φ . Очевидно, что $h(\varphi)$ не зависит от выбора f . Ясно также, что отображение $\varphi \rightarrow h(\varphi)$ определяет гомоморфизм

$$h : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X).$$

Этот гомоморфизм называется *гомоморфизмом Гуревича*; он естественен по отношению к непрерывным отображениям (переводящим отмеченную точку в отмеченную). Если выбрать другую отмеченную точку x_1 , то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{s_2} & \pi_n(X, x_1) \\ h \searrow & & \swarrow h \\ & H_n(X) & \end{array}$$

коммутативна для любого пути s , соединяющего точки x_0 и x_1 .

Теорема (Гуревич). Пусть $\pi_0(X, x_0) = \pi_1(X, x_0) = \dots = \pi_{n-1}(X, x_0) = 0$, $n \geq 2$. Тогда $H_1(X) = \dots = H_{n-1}(X) = 0$ и $h : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ есть изоморфизм.

Следствие (обратная теорема Гуревича). Если пространство X связно и односвязно и $H_2(X) = \dots = H_{n-1}(X) = 0$, то $\pi_2(X, x_0) = \dots = \pi_{n-1}(X, x_0) = 0$ и $h : \pi_n(X, x_0) \rightarrow H_n(X)$ есть изоморфизм.

Приведенные, результаты можно выразить одной фразой: у односвязного пространства нетривиальные гомотопические и гомологические группы начинаются с одинаковой размерности и первые нетривиальные гомотопические и гомологические группы изоморфны.

Следствие. Односвязное клеточное пространство с тривиальными гомологиями размерностей ≥ 2 стягивается.

Связь между первой гомотопической группой (фундаментальной группой) и первой гомологической группой дает

Теорема (Пуанкаре). Для любого связного пространства X гомоморфизм Гуревича $h : \pi_1(X, x_0) \rightarrow H_1(X)$ является эпиморфизмом, ядром которого служит коммутант $[\pi_1(X), \pi_1(X)]$ группы $\pi_1(X)$. Таким образом,

$$H_1(X) = \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)].$$

Теорема 14. Если отображение $f : X \rightarrow Y$ индуцирует изоморфизм в гомотопических группах, то оно индуцирует изоморфизм и в гомологических группах.

1.11. Гомологии с коэффициентами и когомологии

Пусть G – абелева группа. К сингулярному клеточному комплексу топологического пространства X можно применить алгебраические операции $-\otimes G$ и $\text{Hom}(-, G)$. Получатся новые комплексы, которые имеют свои гомологии; эти гомологии называются, соответственно гомологиями и когомологиями пространства X с коэффициентами в G .

Определение. Пусть G – абелева группа. Сингулярная q -мерная цепь пространства X с ко-

эффициентами в G есть линейная комбинация вида

$$\sum g_i f_i, \quad g_i \in G, \quad f_i : T^q \rightarrow X.$$

Группа сингулярных q -мерных цепей пространства X с коэффициентами в G обозначается $C_q(X, G)$; очевидно $C_q(X, G) = C_q(X) \otimes G$; наша прежняя группа цепей $C_q(X)$ в этих обозначениях есть $C_q(X; \mathbb{Z})$. Сингулярная q -мерная коцепь пространства X с коэффициентами (со значениями) в G определяется как функция на множестве q -мерных сингулярных симплексов пространства X , принимающих значения в G . Группа этих коцепей обозначается $C^q(X, G)$; очевидно, $C^q(X, G) = \text{Hom}(C_q(X), G)$. Значение коцепи c на цепи a обозначается $\langle c, a \rangle$.

Граничный и кограничный операторы

$$\partial = \partial_q : C_q(X, G) \rightarrow C_{q-1}(X, G),$$

$$\delta = \delta^q : C^q(X, G) \rightarrow C^{q+1}(X, G)$$

определяются формулами:

$$\partial \left(\sum g_i f_i \right) = \sum g_i \sum_{r=0}^q (-1)^r \Gamma_r f_i,$$

$$(\delta c)(f) = \sum_{r=0}^q (-1)^r c(\Gamma_r f).$$

Очевидно, для любых c и a

$$\langle c, \partial a \rangle = \langle \delta c, a \rangle.$$

Проверка показывает, что $\partial \circ \partial = 0$ и $\delta \circ \delta = 0$, и мы полагаем:

$$H_q(X, G) = \text{Ker}[\partial_q : C_q(X, G) \rightarrow C_{q-1}(X, G)] / \text{Im}[\partial_{q+1} : C_{q+1}(X, G) \rightarrow C_q(X, G)],$$

$$H^q(X, G) = \text{Ker}[\delta^q : C^q(X, G) \rightarrow C^{q+1}(X, G)] / \text{Im}[\delta^{q-1} : C^{q-1}(X, G) \rightarrow C^q(X, G)].$$

Имеются также канонические операторы

$$\varepsilon : C_0(X, G) \rightarrow G \quad (\text{сумма коэффициентов}),$$

$$\varepsilon^* : G \rightarrow C^0(X, G) \quad (\text{константы}),$$

и мы полагаем

$$\tilde{H}_0(X, G) = \text{Ker } \varepsilon / \text{Im } \partial_1, \quad \tilde{H}^0(X, G) = \text{Ker } \delta^0 / \text{Im } \varepsilon^*.$$

$$\tilde{H}_q(X, G) = H_q(X, G),$$

$$\tilde{H}^q(X, G) = H^q(X, G) \quad \text{при } q > 0$$

(приведенные гомологии и когомологии).

Непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$ индуцирует гомологические и когомологические гомоморфизмы, причем первые направлены в ту же сторону, что и f , а вторые в противоположную сторону:

$$f_* : H_q(X, G) \rightarrow H_q(Y, G),$$

$$f^* : H^q(Y; G) \rightarrow H^q(X; G).$$

Гомологии и когомологии с коэффициентами гомотопически инвариантны: если $f \sim g$, то $f_* = g_*$ и $f^* = g^*$; в частности, гомологии и когомологии с коэффициентами одинаковы у гомотопически эквивалентных пространств.

Для несвязной суммы нескольких связных пространств $X = X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$

$$H_q(X; G) = \oplus H_q(X_i; G), \quad H^q(X; G) = \oplus H^q(X_i; G).$$

Например, у точки pt

$$H_0(pt; G) = G = H^0(pt; G),$$

$$H_q(pt; G) = 0 = H^q(pt; G) \text{ при } q > 0.$$

Теорема 15. Пусть X — связное гладкое n -мерное многообразие. Если фиксировать его триангуляцию и вычислить n -мерные гомологии, то получим:

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{если } X \text{ замкнуто и ориентируемо,} \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

$$H_n(X; \mathbb{Z}_2) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{если } X \text{ замкнуто,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

1.12. Формулы универсальных коэффициентов

Пусть A, B — абелевы группы, $B = F_1/F_2$, где F_1 — свободная абелева группа, F_2 — ее подгруппа. Легко понять, что $A \otimes B$ есть факторгруппа группы $A \otimes F_1$ по образу естественного отображения $A \otimes F_2 \rightarrow A \otimes F_1$, но последнее, вообще говоря, не является мономорфизмом. Можно проверить, что ядро $\text{Ker} : A \otimes F_2 \rightarrow A \otimes F_1$ не зависит от выбора представления $B = F_1/F_2$ и называется *периодическим произведением* групп A и B , обозначается $\text{Tor}(A, B)$. Справедливо

Предложение 2.

- 1) $\text{Tor}(A, B) \simeq (\text{кручение } A) \otimes (\text{кручение } B)$.
- 2) Если $A = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то $\text{Tor}(A, B) = 0$ для любой абелевой группы B .

Двойственная операция Ext определяется следующим образом. Пусть A, B — абелевы группы, $A = F_1/F_2$, где F_1 — свободная абелева группа, F_2 — ее подгруппа. Тогда $\text{Hom}(A, B)$ есть ядро отображения $\text{Hom}(F_1, B) \rightarrow \text{Hom}(F_2, B)$, $f \rightarrow f|_{F_2}$, но это отображение не является, вообще говоря, эпиморфизмом. Факторгруппа группы $\text{Hom}(F_2, B)$ по образу этого отображения (то есть коядро этого отображения) обозначается через $\text{Ext}(A, B)$.

Предложение 3.

- 1) $\text{Ext}(\mathbb{Z}, B) = 0$ для любой группы B ; $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$; $\text{Ext}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_m$ (в отличие от $\text{Tor}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}) = 0$).
- 2) Если одна из групп A и B есть $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то $\text{Ext}(A, B) = 0$.

Зная целочисленные гомологии (или когомологии) можно вычислить гомологии и когомологии с произвольными коэффициентами.

Предложение 4. Для любых X, q, G имеют место изоморфизмы:

$$H_q(X; G) \simeq H_q(X) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{q-1}(X), G);$$

$$H^q(X; G) \simeq H^q(X) \otimes G \oplus \text{Tor}(H^{q+1}(X), G);$$

$$H^q(X; G) \simeq \text{Hom}(H_q(X), G) \oplus \text{Ext}(H_{q+1}(X), G).$$

Эти изоморфизмы не являются естественными. Естественны только отображения, входящие в следующие точные последовательности:

$$0 \rightarrow H_q(X) \otimes G \rightarrow H_q(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H_{q-1}(X), G) \rightarrow 0;$$

$$0 \rightarrow H^q(X) \otimes G \rightarrow H^q(X; G) \rightarrow \text{Tor}(H^{q+1}(X), G) \rightarrow 0;$$

$$0 \leftarrow \text{Hom}(H_q(X), G) \leftarrow H^q(X; G) \leftarrow \text{Ext}(H_{q+1}(X), G) \leftarrow 0.$$

Следствие. Предположим, что группа $H_q(X)$ конечно порождена. Тогда

$$H^q(X) \simeq$$

$$\simeq (\text{свободная часть } H_q(X)) \otimes (\text{кручение } H_{q-1}(X)).$$

В частности, группа $H^1(X)$ свободна.

1.13. Умножение

Хотя гомологии геометричнее, чем когомологии, они играют в топологии значительно более скромную роль. Главная причина в том, что когомологические классы можно перемножать, а потому для любого коммутативного кольца G сумма

$$\oplus H^q(X; G) = H^*(X; G)$$

представляет собой ассоциативное косокоммутативное кольцо. Для гомологий ничего подобного нет.

Наиболее прозрачный способ определения когомологического умножения состоит в следующем. Пусть G — коммутативное кольцо и X_1, X_2 — клеточные пространства. По клеточным концам $c_1 \in C^{q_1}(X_1; G)$, $c_2 \in C^{q_2}(X_2; G)$ строим клеточную коцепь

$$c_1 \times c_2 \in C^{q_1+q_2}(X_1 \times X_2; G),$$

которая на клетке $\sigma \times \tau \subset X_1 \times X_2$ принимает значение, равное

$$(-1)^{q_1 q_2} c_1(\sigma) c_2(\tau) \text{ (умножение в } G).$$

Проверка показывает, что

$$\delta(c_1 \times c_2) = \delta(c_1) \times c_2 + (-1)^{q_1} c_1 \times \delta(c_2),$$

так, что, если c_1, c_2 — коциклы, то $c_1 \times c_2$ тоже коцикл. Мы получаем корректно определенное умножение:

$$[\gamma_1 \in H^{q_1}(X_1; G), \gamma_2 \in H^{q_2}(X_2; G)] \rightarrow \gamma_1 \times \gamma_2 \in H^{q_1+q_2}(X_1 \times X_2; G).$$

Важное различие между гомологиями и когомологиями состоит в том, что первые ковариантны, а вторые контравариантны.

1.14. Проблема Пуанкаре и $D(2)$ -гипотеза

Читатель, прочитавший предыдущую часть настоящего параграфа, сможет понять формулировку гипотезы Пуанкаре. Чтобы разобраться с доказательством, предложенным Перельманом, надо затратить гораздо больше усилий. Признаемся, что нам этого сделать так и не удалось.

Вначале немного истории. В 1900 году Пуанкаре предположил, что трехмерное многообразие M , у которого группы гомологий $H_k(M)$ изоморфны группам гомологий $H_k(S^3)$ сферы S^3 , при всех $k = 0, 1, \dots$, гомеоморфно S^3 . В 1904 году он же нашел контрпример, называемый теперь *сферой Пуанкаре*, и сформулировал окончательный вариант своей гипотезы: *всякое односвязное компактное трехмерное многообразие без края гомеоморфно трехмерной сфере*.

Позже эта гипотеза была обобщена на произвольные размерности и получила название *обобщенная гипотеза Пуанкаре*: *для любого натурального числа $n \geq 3$ всякое многообразие размерности n гомотопически эквивалентно сфере S^n тогда и только тогда, когда оно гомеоморфно ей*. Понятно, что исходная гипотеза Пуанкаре является частным случаем обобщенной гипотезы при $n = 3$.

Попытки доказать гипотезу Пуанкаре привели к многочисленным продвижениям в топологии многообразий. Доказательства обобщенной гипотезы Пуанкаре для $n \geq 5$ получены в начале 1960–1970-х. Почти одновременно Смейл и независимо Столлингс нашли доказательство для $n \geq 7$. Затем доказательство Столлингса было распространено на случаи $n = 5$ и $n = 6$ Зеemanом. Доказательство значительно более трудного случая $n = 4$ было получено только в 1982 году Фридманом. Отметим, что из теоремы Новикова о топологической инвариантности характеристических классов Понтрягина следует, что существуют гомотопически эквивалентные, но не гомеоморфные многообразия в высоких размерностях.

Доказательство исходной гипотезы Пуанкаре было найдено в 2002 году Я. Г. Перельманом. Впоследствии его доказательство было проверено и представлено в развернутом виде как минимум тремя группами ученых. Доказательство использует поток Риччи с хирургией и во многом следует плану, намеченному Гамильтоном, который также первым применил поток Риччи.

Покажем теперь как проблема Пуанкаре связана с одной из проблем комбинаторной теории групп (см. [1]). Напомним, что Σ_g — компактная ориентируемая поверхность рода g . Пусть $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow F_g \times F_g$ — эпиморфизм на прямое произведение свободных групп ранга g . Говорят, что φ *существенно пропускается через свободное произведение*, если существует нетривиальное свободное произведение $A * B$, $A \neq 1$, $B \neq 1$, и гомоморфизмы ψ и α такие, что $\psi : \pi_1(S_g) \rightarrow A * B$ — эпиморфизм и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(S_g) & \\ \psi \swarrow & & \searrow \varphi \\ A * B & \xrightarrow{\alpha} & F_g \times F_g \end{array}$$

коммутативна.

Следующая теорема Столлингса и Джако [11] устанавливает связь между гипотезой Пуанкаре и гипотезой о том, что всякий эпиморфизм $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow F_g \times F_g$ существенно пропускается через свободное произведение.

Теорема 16. *Гипотеза Пуанкаре верна в том и только в том случае, когда для каждого $g > 1$ каждый гомоморфизм $\varphi : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow F_g \times F_g$ существенно пропускается через свободное произведение.*

Сформулируем теперь одну из открытых проблем гомотопической топологии, которая менее знаменита, по сравнению с проблемой Пуанкаре, но решение которой наверняка сделают вас известным. Говорят, что пространство X обладает свойством $D(n)$, если $H_i(\tilde{X}) = 0$ при $i > n$, где $\tilde{X}$ — универсальная накрывающая X и $H^{n+1}(X, \mathcal{M}) = 0$ для любой локальной системы коэффициентов $\mathcal{M}$ на X . Уолл [4] установил, что если $n \neq 2$, то (конечный) CW комплекс имеет гомотопический тип (конечного) n -комплекса тогда и только тогда, когда он обладает свойством $D(n)$. Утверждение о том, что конечный 3-комплекс имеет гомотопический тип конечного 2-комплекса тогда и только тогда, когда он обладает свойством $D(2)$, называется *$D(2)$ -гипотезой*.

2. Комбинаторная теория групп

Комбинаторная теория групп изучает группы, заданные порождающими и соотношениями. Такое задание называется *генетическим кодом* соответствующей группы. Способы задания группы с помощью порождающих и определяющих соотношений уходит корнями в топологию: он применялся вначале для фундаментальных групп многообразий. Его простота и универсальность сыграли важную роль в развитии теории групп. Наличие такого способа проявляется в родственности ряда черт топологии и теории групп. И действительно, многие вопросы, рассматриваемые в комбинаторной теории групп, имеют топологические аналоги. Это относится к алгоритмическим проблемам,

теоремам о вложении, свободным конструкциям и т. д.

Приведем примеры задания групп порождающими и соотношениями:

1) $\mathbb{Z} = \langle a \mid \emptyset \rangle$ – бесконечная циклическая группа порождается одним элементом и определяется пустым множеством соотношений;

2) $\mathbb{Z}_n = \langle a \mid a^n = 1 \rangle$ – циклическая группа порядка n порождается одним элементом и определяется одним соотношением;

3) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$ – свободная абелева группа ранга 2 порождается двумя элементами и определяется одним соотношением;

4) $F_n = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid \emptyset \rangle$ – свободная группа ранга n порождается n элементами и определяется пустым множеством соотношений;

5) Фундаментальная группа замкнутой ориентируемой поверхности рода g порождается $2g$ элементами и определяется одним соотношением:

$$\pi_1(\Sigma_g) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_g, b_g] = 1 \rangle,$$

где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

При этом одна и та же группа может быть задана разными системами порождающих и определяющих соотношений. Возникает вопрос о сравнении этих представлений.

Символом $d(G)$ будем обозначать наименьшее число порождающих группы G . Очевидно, что наименьшее число порождающих $d(G)$ группы G не меньше ранга первой группы гомологий $H_1(G) = G/[G, G]$, т. е.

$$\text{rk} H_1(G) \leq d(G).$$

Легко привести примеры групп, для которых это неравенство является строгим.

Если зафиксировать некоторую систему порождающих и изучать вопрос о минимальном числе соотношений в этой системе порождающих, то можно считать, что G имеет представление F/R , где F – свободная группа, а R – ее нормальная подгруппа. Тогда вопрос о наименьшем числе соотношений в этой системе порождающих сводится к вопросу о наименьшем числе элементов, порождающих R как нормальную подгруппу. Действие F сопряжениями на R индуцирует действие G на абелевой группе $R_{ab} = R/[R, R]$. Относительно этого действия R_{ab} является $\mathbb{Z}[G]$ -модулем, который называется *модулем соотношений группы* G . Для полноты картины остановимся более подробно на этом понятии (см., например, [10]).

2.1. Модуль соотношений

Если

$$P = \langle X \mid \mathcal{R} \rangle \quad (1)$$

– конечное представление группы G , то $G = F/R$, где $R = \langle \mathcal{R} \rangle^F$ – нормальное замыкание множества

$\mathcal{R}$ в группе $F = F(X)$, и мы имеем короткую точную последовательность:

$$1 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 1.$$

По представлению (1) стандартным образом строится 2-комплекс $K = K_P$, фундаментальная группа которого $\pi_1(K)$ изоморфна G . Группа G действует на второй гомотопической группе $\pi_2(K)$ при стандартном действии фундаментальной группы на K .

Гомоморфизм $\varphi : F \rightarrow G$ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\varphi^* : \mathbb{Z}[F] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$.

Рассмотрим модули $\mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|}$ и $\mathbb{Z}[G]^{\oplus |\mathcal{R}|}$. Тогда $\mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|} \simeq \Delta_F / \Delta_F \Delta_R$, где Δ_F (соответственно, Δ_R) – фундаментальный идеал $\mathbb{Z}[F]$ (соответственно, $\mathbb{Z}[R]$). Определим

$$\kappa : \mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|} \longrightarrow \mathbb{Z}[G],$$

полагая

$$\kappa : (\alpha_x)_{x \in X} \mapsto \sum_{x \in X} (x - 1) \alpha_x, \quad \alpha_x \in \mathbb{Z}[G].$$

С другой стороны, определим

$$\tau : \mathbb{Z}[G]^{\oplus |\mathcal{R}|} \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|},$$

полагая

$$\tau : (\beta_r)_{r \in \mathcal{R}} \mapsto \sum_{r \in \mathcal{R}} (J_{rx} \beta_r)_{x \in X}, \quad \beta_r \in \mathbb{Z}[G],$$

где J_{rx} – образ в $\mathbb{Z}[G]$ производной Фокса

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \quad r \in \mathcal{R}, \quad x \in X.$$

Имеет место точная последовательность модулей

$$0 \longrightarrow \pi_2(K) \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\oplus |\mathcal{R}|} \xrightarrow{\tau} \mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|} \xrightarrow{\kappa} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

где ε – гомоморфизм тривиализации.

Заметим, что образ $\text{Im}(\tau)$ это в точности модуль соотношений R/R' , возникающий из представления (1). Вложение

$$i : R/R' \longrightarrow \mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|}$$

– хорошо известное вложение Магнуса

$$i : rR' \mapsto \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)_{x \in X}, \quad r \in R,$$

и мы имеем точную последовательность

$$0 \longrightarrow R/R' \xrightarrow{i} \mathbb{Z}[G]^{\oplus |X|} \xrightarrow{\kappa} \Delta_G \longrightarrow 0.$$

Отметим также, что можно изучать и высшие модули соотношений представления F/R , которые определяются следующим образом:

$$\gamma_n(R)/[\gamma_n(R), R] = \gamma_n(R)/\gamma_{n+1}(R).$$

В частности, при $n = 1$ имеем обычный модуль соотношений.

2.2. Представления со скачком соотношений

Очевидно, что ранг $\mathbb{Z}[G]$ -модуля R_{ab} не превосходит числа элементов, необходимых для порождения R как нормальной подгруппы группы F . Следовательно, ранг этого модуля дает нижнюю оценку минимального числа соотношений, необходимых для представления G в данной системе порождающих. Конечное представление F/R , у которого ранг модуля R_{ab} меньше наименьшего числа элементов, требуемых для порождения R как нормальной подгруппы F , называется *представлением со скачком соотношений*.

Проблема скачка соотношений. Существуют ли конечно определенные группы со скачком соотношений?

Если отказаться от условия конечной определенности, то ответ положительный. Бествина и Бради [6] построили конечно порожденную группу, которая не является конечно определенной, но у которой модуль соотношений конечно порожден. Поэтому можно говорить, что эта группа имеет бесконечный скачок соотношений.

Кандидатами на группы со скачком соотношений являются группы вида $H_{m,n} = (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z})$, изучавшиеся в работе Елстейна [5]. Эти группы имеют стандартное представление:

$$H_{m,n} = \langle x, y, z, t \mid x^m = z^n = [x, y] = [z, t] = 1 \rangle,$$

т. е. задаются четырьмя порождающими и четырьмя соотношениями. Вместе с тем в работе Грюнберга и Линнела [7] было доказано, что при $(m, n) = 1$ модуль соотношений группы $H_{m,n}$ имеет ранг 3.

Проблема. Доказать, что группа $H_{3,2} = (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z})$ в стандартных порождающих не может быть задана тремя соотношениями.

Из положительного решения этой проблемы следует решение проблемы скачка соотношений. Отметим, что используя метод, предложенный в следующем параграфе, нетрудно показать, что группа $H_{2,2}$ не может быть определена тремя соотношениями.

Другими возможными кандидатами на группы со скачком соотношений являются группы из работы Бридсона и Твидейла [9].

Напомним некоторые результаты из этой работы. Рассмотрим группу $Q_n = \langle x, t \mid \rho_n = x^n = 1 \rangle$, где

$$\rho_n(x, t) = (txt^{-1})x(txt^{-1})^{-1}x^{-n-1}.$$

Если ввести новый порождающий $b = txt^{-1}$, то

$$Q_n = \langle x, b, t \mid [b, x] = x^n = b^n = 1, b = txt^{-1} \rangle,$$

т. е. Q_n является HNN-расширением группы $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ с проходной буквой t .

Обозначим $q_n = (n+1)^n - 1$ и $c_n = nq_n$. Если $(q_m, q_n) = 1$, то группа $\Gamma_{m,n} = Q_m * Q_n$ имеет представление:

$$Q_m * Q_n = \langle x_m, t_m, x_n, t_n \mid \rho_m(x_m, t_m) = \rho_n(x_n, t_n) = x_m^m = x_n^n = 1 \rangle,$$

а модуль соотношений R_{ab} этого представления порождается как $\mathbb{Z}[G_{m,n}]$ -модуль образами ρ_m, ρ_n и $x_m^m x_n^n$. Более того, при попарно взаимно простых $m_1, m_2, \dots, m_r$ модуль соотношений группы $Q_{m_1} * Q_{m_2} * \dots * Q_{m_r}$ имеет ранг $r+1$.

Проблема скачка соотношений тесно связана со знаменитой $D(2)$ -гипотезой, о которой мы говорили в конце предыдущего параграфа. В работе [9] по каждой группе $\Gamma_{m,n}$ строится некоторый 3-комплекс, который является контрпримером к $D(2)$ -гипотезе если при $(m, n) = 1$ группа $\Gamma_{m,n}$ обладает скачком соотношений.

Видим, что проблема скачка соотношений сводится к такой проблеме комбинаторной теории групп.

Проблема минимального нормального порождения. Пусть F — неабелева свободная группа, $r_1, r_2, \dots, r_m$ — некоторые ее элементы, $R = \langle r_1, r_2, \dots, r_m \rangle^F$ — нормальное замыкание этих элементов в F . Построить алгоритм, позволяющий находить минимальное число нормальных порождающих группы R .

Решение этой проблемы было бы интересно даже для случая, когда слова r_i являются либо степенями порождающих группы F , либо коммутаторами порождающих.

Рассмотрим некоторые примеры представлений, в которых удастся уменьшить число соотношений. Наиболее простым является представление

$$(Z_2 * Z_3) \times Z = \langle a, b, c \mid a^2 = b^3 = [c, a] = [c, b] = 1 \rangle.$$

Нетрудно проверить, что эта группа может быть задана тремя соотношениями:

$$\langle a, b, c, d \mid a^2 b^3 = a^2 [c, a] = b^3 [c, b] = 1 \rangle.$$

Заметим, что в этом представлении соотношение $a^2 b^3 = 1$ можно заменить соотношением $[a, c][b, c] = 1$. Этот пример сообщил нам Р. Михайлов.

Другие примеры такого рода могут быть найдены в работах [3, 7, 9].

В следующем параграфе предлагается метод, позволяющий для некоторых представлений доказать, что число соотношений при заданной системе порождающих нельзя уменьшить. Используя этот метод, будет доказано, что если m и n не являются взаимно простыми, то группа $K_{m,n} = (\mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n) \times \mathbb{Z}$ не может быть задана тремя соотношениями в стандартных порождающих.

К сожалению, этот метод не работает для групп из работы [9].

3. Представления с неуменьшаемым числом соотношений

В настоящем параграфе мы рассматриваем группы

$$K_{m,n} = F/R = \langle x, y, z \mid x^m = y^n = [x, z] = [y, z] = 1 \rangle,$$

$m, n \in \mathbb{N}, m, n > 1$ и изучаем условия, при которых число соотношений можно уменьшить, и условия, при которых этого сделать нельзя. Как мы видели ранее, группа $K_{2,3}$ может быть задана в тех же порождающих тремя соотношениями.

Вначале введем необходимые обозначения. Символом $\gamma_i G$, $i = 1, 2, \dots$, будем обозначать члены нижнего центрального ряда группы G , где $\gamma_1 G = G$, а $\gamma_{i+1} G = [\gamma_i G, G]$ при $i = 1, 2, \dots$. Под коммутаторами понимаем следующие выражения:

$$[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh, \quad [g, h, f] = [[g, h], f], \quad g, h, f \in G.$$

На протяжении этого параграфа символом $F = \langle x, y, z \rangle$ будем обозначать свободную группу ранга 3.

Теорема 1. Пусть m и n – натуральные числа.

1) Если наибольший общий делитель (m, n) отличен от 1, то группа $K_{m,n}$ в стандартных порождающих не может быть задана тремя соотношениями.

2) Если $(m, n) = 1$, то группа $K_{m,n}$ имеет представление

$$K_{m,n} = F/R = \langle x, y, z \mid x^z = x^r, y^z = y^s, x_m = y^n \rangle,$$

где $a^b = b^{-1}ab$, а r и s – некоторые целые числа.

Доказательство. 1) Положим $d = (m, n)$. По условию $d > 1$. Предположим, что группа

$$G = K_{m,n} = F/R = \langle x, y, z \mid x^m = y^n = [x, z] = [y, z] = 1 \rangle,$$

где $R = \langle \mathcal{R} \rangle^F$, $\mathcal{R} = \{x^m, y^n, [x, z], [y, z]\}$, имеет представление с тремя соотношениями:

$$G = F/R = \langle x, y, z \mid A = B = C = 1 \rangle,$$

т. е.

$$R = \langle \mathcal{R} \rangle^F = \langle \mathcal{R}_1 \rangle^F,$$

где $\mathcal{R}_1 = \{A, B, C\}$, A, B, C – слова от порождающих x, y, z и обратных к ним.

Не уменьшая общности, можно считать, что

$$A = x^m a, \quad B = y^n b,$$

а элементы a, b, C лежат в коммутанте F' . Действительно, рассматривая фактор-группу

$$R/(R \cap F') \simeq \langle x^m \rangle \times \langle y^n \rangle \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$

видим, что образы элементов A, B, C – это слова от x^m, y^n . Здесь и далее мы обозначаем элементы группы и их образы в фактор-группе одними и теми же символами. Применяя преобразования Тице, можно привести их к виду $x^m, y^n, 1$, а это и означает, что A, B, C имеют требуемый вид.

Рассмотрим фактор-группу $F/\gamma_3 F$ и найдем образ группы $\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F$ в этой фактор-группе. Чтобы найти порождающие $\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F$, будем сопрягать элементы из $\mathcal{R}_1$ порождающими группы G . Имеем

$$\begin{aligned} A^y &\equiv y^{-1} x^m y a^y \equiv y^{-1} y x^m [x^m, y] a^y \equiv \\ &\equiv x^m a [x, y]^m = A [x, y]^m \pmod{\gamma_3 F}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $A^{-1} A^y \equiv [x, y]^m \in \langle \mathcal{R}_1 \rangle^F \pmod{\gamma_3 F}$. Сопрягая далее элементом z , получим:

$$\begin{aligned} A^z &\equiv z^{-1} x^m z a^z \equiv z^{-1} z x^m [x^m, z] a^z \equiv x^m a [x, z]^m = \\ &= A [x, z]^m \pmod{\gamma_3 F}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^{-1} A^z \equiv [x, z]^m \in \langle \mathcal{R}_1 \rangle^F \pmod{\gamma_3 F}.$$

Таким образом, мы показали, что в фактор-группе $\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F / (\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F \cap \gamma_3 F)$ лежат коммутаторы

$$[x, y]^m, \quad [x, z]^m.$$

Аналогичным образом, сопрягая B последовательно элементами x, z , можно показать, что в фактор-группе $\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F / (\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F \cap \gamma_3 F)$ лежат коммутаторы

$$[y, x]^n, \quad [y, z]^n.$$

Учитывая, что $(m, n) = d$, заключаем, что образ подгруппы $\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F$ по модулю $\gamma_3 F$ имеет вид:

$$\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F / (\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F \cap \gamma_3 F) = \langle A, B, C, [x, y]^d, [x, z]^m, [y, z]^n \rangle.$$

Учитывая, что элемент C лежит в коммутанте F' , можно считать, что по модулю $\gamma_3 F$ он имеет вид:

$$C \equiv [x, y]^{\delta_1} [x, z]^{\delta_2} [y, z]^{\delta_3} \pmod{\gamma_3 F},$$

где

$$0 \leq \delta_1 < d, \quad 0 \leq \delta_2 < m, \quad 0 \leq \delta_3 < n.$$

Покажем, что коммутаторы $[x, z]$ и $[y, z]$ не могут одновременно лежать в подгруппе $\langle \mathcal{R}_1 \rangle^F$. Это и приведет к противоречию с тем, что

$$\langle \mathcal{R} \rangle^F = \langle \mathcal{R}_1 \rangle^F.$$

Если $[x, z] \in \langle \mathcal{R}_1 \rangle^F$, то по модулю $\gamma_3 F$ справедливо равенство

$$[x, z] \equiv [x, y]^{d\alpha_1} [x, z]^{m\alpha_2} [y, z]^{n\alpha_3} C^\alpha \pmod{\gamma_3 F},$$

для некоторых целых $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha$. Вспоминая выражение для C , перепишем последнее равенство в таком виде:

$$\begin{aligned} [x, z] &\equiv \\ &\equiv [x, y]^{d\alpha_1 + \alpha\delta_1} [x, z]^{m\alpha_2 + \alpha\delta_2} [y, z]^{n\alpha_3 + \alpha\delta_3} \pmod{\gamma_3 F}. \end{aligned}$$

Отсюда получим систему:

$$\begin{cases} 0 = d\alpha_1 + \alpha\delta_1, \\ 1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2, \\ 0 = n\alpha_3 + \alpha\delta_3. \end{cases}$$

Аналогично получим равенство

$$[y, z] \equiv [x, y]^{d\beta_1} [x, z]^{m\beta_2} [y, z]^{n\beta_3} C^\beta \equiv \\ \equiv [x, y]^{d\beta_1 + \beta\delta_1} [x, z]^{m\beta_2 + \beta\delta_2} [y, z]^{n\beta_3 + \beta\delta_3} \pmod{\gamma_3 F},$$

которое должно выполняться для некоторых целых $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta$. Это равенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} 0 = d\beta_1 + \beta\delta_1, \\ 0 = m\beta_2 + \beta\delta_2, \\ 1 = n\beta_3 + \beta\delta_3. \end{cases}$$

Заметим, что α и β отличны от нуля. Действительно, если $\alpha = 0$, то из второго уравнения первой системы получим равенство $m\alpha_2 = 1$, которое не может быть выполнено в целых числах. Аналогично, если $\beta = 0$, то из третьего уравнения второй системы получим равенство $n\beta_3 = 1$, которое также не может быть выполнено в целых числах.

Из уравнения $1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2$ следует, что $(m, \alpha) = 1$, но тогда из уравнения $0 = d\alpha_1 + \alpha\delta_1$ следует, что либо δ_1 делится на d , либо $\alpha_1 = \delta_1 = 0$. Учитывая, что $0 \leq \delta_1 < d$, заключаем, что $\alpha_1 = \delta_1 = 0$. Рассматривая аналогичным образом третье уравнение первой системы, приходим к равенству $\alpha_3 = \delta_3 = 0$.

Положим $m = dm_1$, $n = dn_1$, где $m_1, n_1 \in \mathbb{Z}$, $(d, m_1) = (d, n_1) = 1$. Из уравнений

$$1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2, \quad 1 = n\beta_3 + \beta\delta_3,$$

следует, что $(m, \alpha\delta_2) = 1$, $(n, \beta\delta_3) = 1$. В частности, $(m, \delta_2) = (n, \delta_3) = 1$. Тогда из уравнения $0 = n\alpha_3 + \alpha\delta_3$, которое равносильно уравнению $0 = dn_1\alpha_3 + \alpha\delta_3$, следует, что $\alpha\delta_3$ делится на d , а учитывая, что $(\delta_3, n) = 1$, заключаем, что α делится на d . Но это противоречит равенству $1 = m\alpha_2 + \alpha\delta_2$.

2) Покажем, что группа при взаимно простых m и n представление

$$\mathcal{P} = \langle x, y, z \mid x^z = x^r, \quad y^z = y^s, \quad x^m = y^n \rangle$$

определяет группу $K_{m,n}$ при некоторых r и s . Действительно, возводя первое соотношение в степень m , а второе – в степень n , получим соотношения

$$(x^m)^z = x^{rm}, \quad (y^n)^z = y^{sn}.$$

Преобразуем первое из этих соотношений:

$$x^{rm} = (x^m)^z = (y^n)^z = y^{sn} = (y^n)^s = x^{ms},$$

т. е.

$$x^{rm} = x^{ms} \Leftrightarrow x^{m(r-s)} = 1.$$

Аналогичным образом, приходим к соотношению

$$y^{n(r-s)} = 1.$$

Если $r - s = 1$, то $x^n = y^m = 1$. Полагая $r = s + 1$, видим, что представление $\mathcal{P}$ дает ту же группу, что и представление

$$\mathcal{P}_1 = \langle x, y, z \mid x^z = x^{s+1}, \quad y^z = y^s, \quad x^m = y^n = 1 \rangle.$$

Мы хотим выбрать такое s , чтобы выполнялись соотношения

$$x^z = x, \quad y^z = y.$$

Для этого должны выполняться сравнения

$$s + 1 \equiv 1 \pmod{m}, \quad s \equiv 1 \pmod{n},$$

т. е.

$$s \equiv 0 \pmod{m}, \quad s \equiv 1 \pmod{n}.$$

Учитывая, что $(m, n) = 1$, найдем такое натуральное число t , для которого $mt \equiv 1 \pmod{n}$. Положим $s = mt$. Тогда для этого t наша группа будет иметь представление

$$\langle x, y, z \mid x^z = x, \quad y^z = y, \quad x^p = y^q = 1 \rangle,$$

а это и есть исходное представление группы $K_{m,n}$. Теорема доказана.

В доказательстве теоремы 1 у нас возникли группы такого вида

$$G = G(m, n, p, q) = \langle a, b, c \mid a^c = a^m, \quad b^c = b^n, \quad a^p = b^q \rangle,$$

где m, n, p, q – некоторые целые числа. Они интересны тем, что имеют сбалансированные представления (число порождающих равно числу соотношений). Интересно изучить свойства этих групп и, в частности, попытаться ответить на такой

Вопрос. При каких наборах $(m, n; p, q)$ и $(m', n'; p', q')$ группа $G(m, n; p, q)$ изоморфна группе $G(m', n'; p', q')$?

Используем тот же прием, что мы использовали в доказательстве теоремы. Возводя первое соотношение группы $G(m, n, p, q)$ в степень p , а второе в степень q , получим соотношения

$$(a^p)^c = a^{mp}, \quad (b^q)^c = b^{qn}.$$

Из которых, ввиду третьего соотношения группы G , заключаем, что

$$a^{mp} = a^{pn}$$

а потому

$$a^{p(m-n)} = 1.$$

Аналогичным образом приходим к соотношению

$$b^{q(m-n)} = 1.$$

Следовательно, в группе G элементы a и b конечного порядка.

Если $m - n = 1$, то $a^p = b^q = 1$. Если при этом $m = p + 1$, $n = q + 1$, т. е.

$$m = p + 1, \quad q = p - 1, \quad n = p,$$

то $a^c = a$, $b^c = b$ и в этом случае

$$G \simeq (\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_{p-1}) \times \mathbb{Z},$$

т. е. мы получили группу $K_{p,p-1}$.

Если положить $m = p + 1$, $n = q + 1$, то получим группу

$$G(p + 1, q + 1; p, q) \equiv G(p, q) = \langle a, b, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad b^c = b^{q+1}, \quad a^p = b^q \rangle.$$

В ней

$$a^{p(p-q)} = b^{q(p-q)} = 1.$$

Возведем соотношение $a^c = a^{p+1}$ в степень $p - q$:

$$(a^{p-q})^c = a^{(p+1)(p-q)} = a^{p-q}.$$

Итак,

$$(a^{p-q})^c = a^{p-q}.$$

Аналогично,

$$(b^{p-q})^c = b^{p-q}.$$

Пример. В случае $q = 1$ имеем группу

$$G(p, 1) = \langle a, b, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad b^c = b^2, \quad a^p = b \rangle = \langle a, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad (a^p)^c = a^{2p} \rangle,$$

в которой, как легко заметить, справедливо соотношение $a^{p(p-1)} = 1$.

Далее, из соотношений $a^c = a^{p+1}$ и $a^{p(p-1)} = 1$ следует соотношение $(a^p)^c = a^{2p}$. Действительно,

$$(a^p)^c = (a^c)^p = a^{(p+1)p},$$

$$a^{p(p+1)} a^{-2p} = a^{p(p-1)} = 1.$$

Итак,

$$G(p, 1) = \langle a, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad a^{p(p-1)} = 1 \rangle.$$

Если $(p + 1, p(p - 1)) = 1$, то

$$G(p, 1) \simeq \mathbb{Z}_{p(p-1)} \rtimes \mathbb{Z},$$

где первая циклическая группа порождается элементом a , а вторая – элементом c .

Если $(p + 1, p(p - 1)) \neq 1$, то такого изоморфизма уже нет, так как элемент a^{p+1} имеет меньший порядок чем элемент a . Учитывая, что $(p, p + 1) = 1$, заключаем, что $(p + 1, p - 1) \neq 1$. Ясно, что $(p + 1, p - 1) = (p + 1, p + 1 - (p - 1)) = (p + 1, 2)$. Следовательно,

$$(p + 1, p(p - 1)) = 2,$$

и p – нечетное число. В частности, справедливо

Предложение 1. Пусть $p = 3$. Тогда

$$G(p, 1) = \langle a, c \mid a^c = a^4, \quad a^6 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Как было замечено выше, в $G(3, 1)$ справедливо соотношение

$$(a^3)^c = (a^c)^3 = a^{12} = 1,$$

а потому $a^3 = 1$ и группа имеет представление

$$G(3, 1) = \langle a, c \mid a^c = a^4, \quad a^3 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}.$$

Предложение доказано.

Для произвольного p имеем соотношение

$$\begin{aligned} (a^{p(p-1)/2})^c &= (a^c)^{p(p-1)/2} = \\ &= a^{(p+1)(p-1)p/2} = (a^{p(p-1)})^{(p+1)/2} = 1, \end{aligned}$$

из которого следует, что $a^{p(p-1)/2} = 1$ и

$$\begin{aligned} G(p, 1) &= \langle a, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad a^{p(p-1)} = 1 \rangle = \\ &= \langle a, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad a^{p(p-1)/2} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая, что $(p + 1, p(p - 1)/2) = 1$ или 2, заключаем,

$$G(p, 1) \simeq \mathbb{Z}_{p(p-1)/2^s} \times \mathbb{Z},$$

где s – максимальная степень двойки, которая делит $p - 1$. Таким образом, мы получили

Предложение 2. Для всякого натурального p группа $G(p, 1)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_{p(p-1)} \rtimes \mathbb{Z}$ в случае, когда p четно, и изоморфна группе $\mathbb{Z}_{p(p-1)/2^s} \rtimes \mathbb{Z}$, где s – максимальная степень двойки, которая делит $p - 1$, в случае, когда p – нечетно.

В общем случае, справедлива

Теорема 2. Имеет место изоморфизм

$$G(p, q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)/D} \underset{\mathbb{Z}_{(p-q)/D}}{*} \mathbb{Z}_{q(p-q)/D} \right) \rtimes \mathbb{Z},$$

где $D = 1$, если $(p + 1, q + 1) = 1$, и D – наибольший делитель $p - q$, такой, что $(p + 1, (p - q)/D) = 1$, если $(p + 1, q + 1) \neq 1$.

Доказательство. По определению

$$G(p, q) = \langle a, b, c \mid a^c = a^{p+1}, \quad b^c = b^{q+1}, \quad a^p = b^q \rangle.$$

Как было замечено выше, в группе $G(p, q)$ имеют место соотношения

$$a^{p(p-q)} = b^{q(p-q)} = 1.$$

Учитывая, что элементы a и a^{p+1} , а также b и b^{q+1} сопряжены, заключаем, что они должны иметь одинаковые порядки. Следовательно:

$$(p + 1, p(p - q)) = (p + 1, p - q) = (p + 1, q + 1),$$

$$(q + 1, q(p - q)) = (q + 1, p - q) = (q + 1, p + 1).$$

Если $(p+1, q+1) = 1$, то

$$G(p, q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)} *_{\mathbb{Z}_{p-q}} \mathbb{Z}_{q(p-q)} \right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Если же $(p+1, q+1) \neq 1$, то надо взять такое число D , для которого $(p+1, (p-q)/D) = 1$. Ясно, что в этом случае $(q+1, (p-q)/D) = 1$, а потому

$$G(p, q) \simeq \left(\mathbb{Z}_{p(p-q)/D} *_{\mathbb{Z}_{(p-q)/D}} \mathbb{Z}_{q(p-q)/D} \right) \rtimes \mathbb{Z}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, мы получили частичный ответ на сформулированный выше вопрос. Вопрос о том, существует ли аналогичное разложение для произвольной группы $G(m, n, p, q)$ остается открытым. Также сформулируем и такой

Вопрос. При каких наборах (m, n, p, q) группа $G(m, n, p, q)$ тривиальна?

Отметим, что этот вопрос тесно связан с проблемой Уайтхеда об асферических комплексах из гомотопической топологии (см. [10]).

Литература

[1] Линдон, Р. *Комбинаторная теория групп* / Р. Линдон, П. Шупп. – М.: Мир, 1980.

[2] Фоменко, А. Т. *Курс гомотопической топологии* / А. Т. Фоменко, Д. Б. Фукс. – М.: Наука, 1989.

[3] Rapaport, E. S. *On the defining relations of a free product* / E. S. Rapaport // Pacific J. Math. – 1964. – Vol. 14, no. 4. – P. 1389 – 1393.

[4] Wall, C. T. C. *Finiteness conditions for CW-complexes* / C. T. C. Wall // Ann. of Math. – 1965. – Vol. 81, no. 1. – P. 56 – 69.

[5] Epstein, D. B. A. *Finite presentations of groups and 3-manifolds* / D. B. A. Epstein // Quart. J. Math. Oxford Ser. – 1961. – Vol. 12 – P. 205 – 212.

[6] M. Bestvina, M. *Morse theory and finiteness conditions of groups* / M. Bestvina and N. Brady // Invent. of Math. – 1997. – Vol. 129. – P. 445 – 470.

[7] Gruenberg, K. W. *Generation gaps and abelianized defects of free products* / K. W. Gruenberg, P. A. Linnell // J. Group Theory. – 2008. – Vol. 11, no. 5. – P. 587 – 608.

[8] Hog, C. *Presentation classes, 3-manifolds and free products* / C. Hog, M. Lustig, W. Metzler // Geometry and topology. – Berlin, 1985.

[9] Bridson, M. *Deficiency and abelianized deficiency of some virtually free groups* / M. Bridson, M. Tweedale // Math. Proc. – Cambridge Philos. Soc., 2007. – Vol. 143, no. 2 – P. 257 – 264.

[10] Mikhailov, R. *Lower central and dimension series of groups, Lecture Notes in Mathematics* / R. Mikhailov, I. B. S. Passi. – Berlin, 2009.

[11] Jaco, W. *Heegaard splittings and splitting homomorphisms* / W. Jaco // Trans. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 144. – P. 365 – 379.

УДК 514.772.22

О МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ В ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Д. А. Бердинский

ON MINIMAL SURFACES IN HEISENBERG GROUP

D. A. Berdinsky

В работе предложен метод построения минимальных поверхностей в группе Гейзенберга, наделенной метрикой Терстона. Конструкция основана на представлении типа Вейерштрасса, и порождающие спиноры поверхности выражены в терминах функций Бейкера–Ахиезера.

It's proposed the method for constructing minimal surfaces in Heisenberg group, endowed with Thurston's metric. The construction is based on Weierstrass type representation, and generating spinors of surface are expressed in terms of Baker-Akhiezer functions.

Ключевые слова: группа Гейзенберга, минимальные поверхности, функции Бейкера–Ахиезера.

Keywords: Heisenberg group, minimal surfaces, Baker-Akhiezer functions.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 10-01-91056).

1. Введение

В данной работе изложен метод построения минимальных поверхностей в группе Гейзенберга с терстоновской метрикой, основанный на исполь-

зовании представлений типа Вейерштрасса минимальных поверхностей в этой группе [1].

Предложенный метод находится в русле работы Бобенко [3], где описываются торы постоянной средней кривизны в трехмерном евклидовом про-