[12] Ushijima, A. *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications. – 2006. – Vol. 581. – P. 249 – 265.

[13] Mohanty, Ya. *The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space* / Ya. Mohanty // Alg. Geom. Topology. – 2003. – Vol. 3. – P. 1 – 31.

[14] Деревнин, Д. А. *О формуле объема гиперболического тетраэдра* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Усп. мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 2. – Р. 159 – 160.

[15] Винберг, Э. Б.*Геометрия-2. Современные проблемы математики, Т. 29* / Э. Б. Винберг – М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники), 1988.

[16] Sforza, G. *Spazi metrico-proiettivi* / G. Sforza // Ricerche di Estensionimetria differenziale III. – 1906. – Vol. 8. – P. 3 – 66.

[17] Milnor, J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* / J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 6, № 1. – P. 9 – 24.

[18] Seidel, J. J. *On the volume of a hyperbolic simplex* / J. J. Seidel // Stud. Sci. Math. Hung. – 1986. – Vol. 21. – P. 243 – 249.

[19] Luo, F. *On a problem of Fenchel* / F. Luo // Geometriae Dedicata. – 1997. – Vol. 64. – P. 227 – 282.

[20] Ushijima, A. *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications. – 2006. – Vol. 581. – P. 249 – 265.

[21] Абросимов, Н. В. *К решению проблемы Зейделя об объемах гиперболических тетраэдров* / Н. В. Абросимов // Сиб. электрон. мат. изв. – 2009. – Т. 6. – С. 211 – 218.

[22] Медных, А. Д. *Элементарные формулы для гиперболического тетраэдра* / А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 4. – С. 831 – 841.

[23] Абросимов, Н. В. *Проблема Зейделя об объеме неевклидового тетраэдра* / Н. В. Абросимов // Доклады АН. – 2010. – Т. 435, № 1. – С. 7–10.

УДК 514.132

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА, ОБЛАДАЮЩЕГО mmm-СИММЕТРИЕЙ

Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина, А. Д. Медных

ON GEOMETRICAL PROPERTIES OF A HYPERBOLIC OCTAHEDRON HAVING mmm-SYMMETRY

G. A. Baigonakova, M. Godoy-Molina, A. D. Mednykh

В настоящей работе изучаются геометрические свойства гиперболического октаэдра, обладающего mmm - симметрией, то есть остающегося инвариантным при отображениях в трех взаимно ортогональных плоскостях. Получены тригонометрические соотношения, связывающие длины ребер и двугранные углы указанного многогранника (теоремы синусов-тангенсов). Это дает возможность выразить длины через двугранные углы. Далее, с помощью формулы Шлефли, находится объем рассматриваемого октаэдра в одном из важных геометрических случаев.

In the present paper geometric properties are investigated for a hyperbolic octahedron having mmm-symmetry. Trigonometrical identities connecting lengths of edges and dihedral angles of the polyhedron under consideration are obtained (the sine-tangent theorem). It gives the key to express lengths through dihedral angles. Further, we find the volume of the octahedron in very important geometrical cases by making use the Schläfli formula.

Ключевые слова: гиперболический октаэдр, многогранник, объем, теорема синусов-тангенсов, симметричный октаэдр, формула Шлефли.

Keywords: hyperbolic octahedron, volume, symmetric octahedron, polyhedron, the Schläfli formula, the sine-tangent theorem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00255, 11-01-90705-моб_ст, 10-01-00642, АВЦП (проект 2.1.13707) и ФЦП.(проект 02.740.11.0457).

1. Введение

Вычисление объема многогранника – это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в настоящее время. Считается, что первый результат в этом направлении принадлежит Тартальи (1499 – 1557 гг.), который нашел объем евклидова тетраэдра. В настоящее время этот результат известен как формула Кэли–Менгера. В 1996 г. И. Х. Сабитов [19] доказал, что объем евклидова многогранника – это корень алгебраического уравнения, коэффициенты которого являются многочленами, зависящими от длин ребер многогранника, а коэффициенты последних зависят лишь от комбинаторного типа многогранника.Четырехмерный аналог теоремы Х. Сабитова был получен в недавней работе [3].

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Формула для объема бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) известна еще со времен Н. И. Лобачевского [6] и Л. Шлефли [12]. Объем куба Ламберта и некоторых других многогранников получены Р. Келлерхальц [4], Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [2], А. Ю. Весниным, А. Д. Медных и Дж. Паркером [7] и другими. Объемы гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности, найдены Э. Б. Винбергом [15].

Общая формула объема гиперболического тетраэдра долгое время оставалась неизвестной, первые результаты в этом направлении получили Ю.Чо, Х. Ким [1], Дж. Мураками, У. Яно [10] и А. Ушиджима [13]. Д. А.Деревнин и А. Д. Медных [18] предложили элементарную интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра. Отметим, что в случае симметрического тетраэдра, противоположные двугранные углы которого попарно равны, формула объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским [6] для идеального гиперболического тетраэдра. Дж. Милнор [9] представил соответствующий результат в весьма элегантной форме. В общем случае объем симметричного тетраэдра найден в работе [17].

Цель настоящей работы – изучить основные геометрические характеристики гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией, то есть остающегося инвариантным при отражениях в трех взаимно ортогональных плоскостях. Для этого будут установлена теорема синусов-тангенсов, связывающая длины ребер и двугранные углы рассматриваемого октаэдра, и найдена формула его объема в простейшей геометрической ситуации. Отметим, что указанная выше теорема синусов-тангенсов для случая сферического октаэдра ранее была получена в работе [14].

Для нахождения объема гиперболического октаэдра в терминах двугранных углов будет использована формула Шлефли. Сформулируем ее в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть P выпуклый многогранник в пространстве S^3 или H^3. Если P деформируется так, что его комбинаторная структура сохраняется, а двугранные углы изменяются дифференцируемым образом. Тогда выполняется соотношение:*

$$KdV = \frac{1}{2}\sum_i l_i\, d\alpha_i,$$

где K – кривизна пространства, суммирование ведется по всем ребрам P, l_i, обозначает длину i - того ребра, а α_i – двугранный угол при нем.

В классической работе Шлефли [11] эта формула была доказана для случая сферического n - симплекса. В гиперболическом случае она была получена Х. Кнезером [5], см. также работы [15], [8].

2. Общие свойства гиперболического октаэдра O, обладающего mmm-симметрией

Рассмотрим гиперболический октаэдр O, обладающий mmm - симметрией, то есть зеркальной симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих вдоль его реберных циклов (Рис. 1). Заметим, что в этом случае все восемь граней октаэдра попарно конгруэнтны. Обозначим длины ребер через a, b, c, а двугранные углы – A, B, C и плоские углы граней α, β, γ. В этих обозначениях, в любой грани, плоский угол α лежит против стороны длины a, и двугранный угол A заключен между гранями, пересекающимися по ребру длины a.

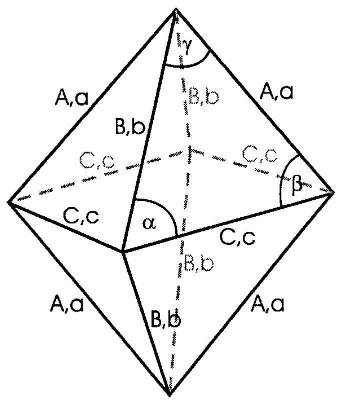

Рис. 1. Октаэдр $O(a, b, c, A, B, C)$, обладающий mmm - симметрией

В евклидовом случае известна следующая теорема.

Теорема 2. (Галиулин, Михалев, Сабитов [18]). *Пусть V – объем евклидова октаэдра $O(a, b, c, A, B, C)$, обладающего mmm-симметрией. Тогда величина V может быть найдена как положительный корень многочлена:*

$$9V^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2).$$

Чтобы найти объем такого октаэдра в гиперболическом пространстве, нам потребуются следующие тригонометрические соотношения.

Теорема 3. (Теорема синусов-тангенсов). *Пусть $O(a, b, c, A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий mmm - симметрией. Тогда вы-*

полняются следующие тригонометрические соотношения:

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = T = 2\,\frac{K}{L},$$

где K и L – положительные числа, определены формулами:

$$K^2 = (xy - z)(yz - x)(xz - y),$$
$$L = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$$

и $\quad x = \cosh a, \quad y = \cosh b, \quad z = \cosh c.$

Доказательство. Рассмотрим пересечение $O = O(a, b, c, A, B, C)$ со сферой достаточно малого радиуса с центром в одной из вершин (рис. 2). Не уменьшая общности, предположим, что полученное пересечение – это гиперболический четырехугольник с внутренними плоскими углами B, C, B и C. Так как исходный многогранник допускает симметрию, то соответствующий четырехугольник является сферическим ромбом со стороной (рис. 2).

Рис. 2. Октаэдр $O(a, b, c, A, B, C)$ и линк его вершины

Согласно предположению о симметрии, четырехугольник можно разделить на четыре прямоугольных гиперболических четырехугольника с углами $\frac{B}{2}$ и $\frac{C}{2}$ гипотенузой длины α. Применяя теорему Пифагора для сферических прямоугольных треугольников, получим равенства:

$$\cos\alpha = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}, \quad \cos\beta = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2},$$
$$\cos\gamma = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}. \qquad (1)$$

Из найденных соотношений, непосредственно находим, что

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha}, \quad \cos^2\frac{B}{2} = \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{\cos\beta},$$
$$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Полученные равенства связывают двугранные и плоские углы O. Аналогично можно установить соотношения между длинами и плоскими углами. Применяя первую теорему косинусов для выбранной грани, находим равенства:

$$\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos\alpha,$$
$$\cosh b = \cosh a\cosh c - \sinh a\sinh c\cos\beta,$$
$$\cosh c = \cosh a\cosh b - \sinh a\sinh b\cos\gamma.$$

Переписывая последние соотношения, получим эквивалентные равенства:

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b\cosh c - \cosh a}{\sinh b\sinh c},$$
$$\cos\beta = \frac{\cosh a\cosh c - \cosh b}{\sinh a\sinh c},$$
$$\cos\gamma = \frac{\cosh a\cosh b - \cosh c}{\sinh a\sinh b}.$$

Вводя новые переменные

$$x = \cosh a, \quad y = \cosh b, \quad z = \cosh c,$$
$$X = \cos A, \quad Y = \cos B, \quad Z = \cos C,$$

легко видеть, что

$$\cos^2\frac{A}{2} = \frac{\cos\beta\cos\gamma}{\cos\alpha} = \frac{(xz - y)(xy - z)}{(x^2 - 1)(yz - x)}.$$

Аналогично имеем:

$$\cos^2\frac{B}{2} = \frac{(yz - x)(xy - z)}{(xz - y)(y^2 - 1)},$$
$$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{(yz - x)(xz - y)}{(z^2 - 1)(xy - z)}.$$

Наконец, из последних соотношений следует равенство:

$$\sin A = \frac{4\cos^2\frac{A}{2}}{\left(\cos^2\frac{A}{2} - 1\right)^2} = 2\,\frac{(x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{x}\,\frac{K}{C}.$$

Аналогично:

$$\sin B = \frac{(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{y}\,\frac{K}{C}, \quad \sin C = \frac{(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{z}\,\frac{K}{L},$$

где $K^2 = (xy - z)(yz - x)(xz - y)$,
$L = 2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1$.

Заметим, что в теореме синусов - тангенсов параметр T выражается через длины ребер октаэдра O, но чтобы найти объем октаэдра O, необходимо выразить T через двугранные углы.

Лемма 1. *Величина T в теореме синусов-тангенсов удовлетворяет уравнению*

$$T^2 = \frac{(1+Y)(1+Z)(1+X)}{1+X+Y+Z},$$

где $X = \cos A$, $Y = \cos B$, $Z = \cos C$.

Доказательство. Применяя вторую теорему косинусов для одной из граней октаэдра O, имеем:

$$\cosh a = \frac{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}.$$

При помощи простейших тригонометрических тождеств получим:

$$\coth^2 a = \frac{\cosh^2 a}{\cosh^2 a - 1} =$$
$$= \frac{(\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma)^2}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - 1}.$$

Как и в (1) выразим $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$:

$$\cos\alpha = \coth\frac{B}{2}\coth\frac{C}{2},\ \cos\beta = \coth\frac{A}{2}\coth\frac{C}{2},$$
$$\cos\gamma = \coth\frac{A}{2}\coth\frac{B}{2}.$$

Используя соотношения, связывающие плоские и двугранные углы, перепишем последнее равенство в терминах X, Y и Z:

$$\coth^2 a = \frac{(1+Y)(1+Z)}{(1-X)(1+X+Y+Z)}.$$

Тогда требуемое утверждение следует из равенства $T^2 = \coth^2 a \sin^2 A$, где $\sin^2 A = 1 - X^2$

$$T^2 = \frac{(1+X)(1+Z)(1+Z)}{1+X+Y+Z}.$$

Из теоремы 3 следует, что гиперболический октаэдр, обладающий mmm- симметрий, полностью определяется своими двугранными углами, то есть $O = O(A, B, C)$.

В дальнейшем величину T будем называть главным параметром октаэдра $O = O(A, B, C)$.

2. Вычисление объема гиперболического октаэдра в простейшей геометрической ситуации

Как показывают результаты работы [14], в общем случае объем сферического октаэдра выражается достаточно сложной интегральной формулой. Аналогичный результат можно ожидать и в гиперболической геометрии.

Несложные геометрические рассуждения, основанные на установленной теореме синусов-тангенсов приводят к заключению, что геометрические свойства октаэдра O зависят от того, как ведет себя главный параметр T, а именно – возникают три возможных случая:

$$(i)\ 0 \le T < 1, \quad (ii)\ T = 1, \quad (iii)\ T > 1.$$

В настоящей работе мы рассмотрим простейший геометрический случай, когда $T = 1$. Тогда формула для объема имеет простой и весьма элегантный вид. Оставшиеся два случая будут рассмотрены в последующих работах авторов.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $O = O(a, b, c, A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий mmm - симметрией с главным параметром $T = 1$, то есть его двугранные углы связаны соотношениями:*

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = 1.$$

Тогда при $a \le b \le c$ объем октаэдра O равен

$$V = 2\left(\int_0^a \frac{x\,dx}{\cosh x} + \int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x} - \int_0^c \frac{x\,dx}{\cosh x}\right).$$

Доказательство. Для получения искомого результата необходимо удостовериться, что функция удовлетворяет системе дифференциальных уравнений Шлефли, то есть

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -2a, \quad \frac{\partial V}{\partial B} = -2b, \quad \frac{\partial V}{\partial C} = -2c. \qquad (2)$$

Функция V является единственным решением данной системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющим условию $V \to 0$ при $a = b$ и $c \to 0$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующее вспомогательное предложение.

Лемма 2. *Пусть $O = O(A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, такой что*

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = 1.$$

Тогда выполнено одно из следующих соотношений:

(a) $\cosh a + \cosh b - \cosh c - 1 = 0$,

(b) $-\cosh a + \cosh b + \cosh c - 1 = 0$,

(c) $\cosh a - \cosh b + \cosh c - 1 = 0$.

Доказательство. Воспользуемся формулой, полученной в теореме 3:

$$\frac{\sin A}{\tanh a} = \frac{\sin B}{\tanh b} = \frac{\sin C}{\tanh c} = T = 2\,\frac{K}{L},$$

где K и C – положительные числа, определены формулами:

$$K^2 = (xy-z)(yz-x)(xz-y),\ L = 2xyz-x^2-y^2-z^2+1$$

$$\text{и} \quad x = \cosh a, \quad y = \cosh b, \quad z = \cosh c.$$

Пусть $T = 1$, тогда из равенства $T^2 = 4\,\dfrac{K^2}{L^2}$ непосредственными вычислениями получим, что

$$T^2 - 1 = \frac{(x+y-z-1)(x-y+z-1)(-x+y+z-1)(x+y+z+1)}{(-1+x^2+y^2-2xyz+z^2)} = 0.$$

Откуда учитывая неравенство $x+y+z+1 > 0$ получим:

$$(x+y-z-1)(x-y+z-1)(-x+y+z-1) = 0,$$

что эквивалентно доказываемому утверждению.

Докажем утверждения теоремы.

Без ограничения общности можно считать, что $a \le b \le c$, тогда имеет место равенство $\cosh a+\cosh b-\cosh c-1 = 0$. Из теоремы тангенсов имеем:

$$\sin^2 A = \tanh^2 a, \quad \cos^2 A = 1 - \tanh^2 a = \frac{1}{\cos^2 A}.$$

Аналогично устанавливаются равенства:

$$\cos^2 B = 1 - \tanh^2 b = \frac{1}{\cos^2 B},$$

$$\cos^2 C = 1 - \tanh^2 c = \frac{1}{\cos^2 C}.$$

Внимательный анализ знаков приводит к заключению, что

$$\cos A = -\frac{1}{\cos B},\ \cos B = -\frac{1}{\cos A},\ \cos C = \frac{1}{\cos B}.$$

Это следует из тождества:

$$T^2 = \frac{(1+\cos A)(1+\cos B)(1+\cos C)}{1+\cos A+\cos B+\cos C} = 1.$$

Положим $\cosh a = p$ и $\cosh b = q$, тогда $\cosh c = = p+q-1$.

Далее, из дифференциальной формулы Шлефли, имеем:

$$-\frac{1}{2}\,dV = a\,dA + b\,dB + c\,dC =$$
$$= \operatorname{arccosh}(p)\,d\left(\arccos\left(-\frac{1}{p}\right)\right) +$$
$$+ \operatorname{arccosh}(q)\,d\left(\arccos\left(-\frac{1}{q}\right)\right) +$$
$$+ \operatorname{arccosh}(p+q-1)\,d\left(\arccos\left(-\frac{1}{p+q-1}\right)\right) =$$
$$= -\frac{\arccos(q)}{q(q^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,dq - \frac{\arccos(p)}{p(p^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,dp +$$
$$+ \frac{\arccos(p+q-1)}{(p+q-1)((p+q-1)^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,d(p+q).$$

Заметим, что $V \to 0$, когда $a = b$ и $c \to 0$.

Откуда $V \to 0$ при $p \to 1$ и $q \to 1$. Отметим, что замена переменных $p = \cosh x$ приводит к равенству:

$$\int_1^{\cosh a} \frac{\operatorname{arccosh}(p)}{p(p^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,dp = \int_0^a \frac{x\,dx}{\cosh x}.$$

Аналогично устанавливаются равенства

$$\int_1^{\cosh b} \frac{\operatorname{arccosh}(q)}{q(q^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,dq = \int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x}$$

и

$$\int_1^{\cosh a+\cosh b-1} \frac{\operatorname{arccosh}(p+q-1)}{(p+q-1)((p+q-1)^2-1)^{\frac{1}{2}}}\,d(p+q) = \int_0^c \frac{x\,dx}{\cosh x}.$$

Здесь мы воспользовались соотношением $c = \operatorname{arccosh}(p+q-1)$.

Окончательно, из формулы Шлефли имеем:

$$V = 2\left(\int_0^a \frac{x\,dx}{\cosh x} + \int_0^b \frac{x\,dx}{\cosh x} - \int_0^c \frac{x\,dx}{\cosh x}\right).$$

Благодарности

Второй автор хотел бы поблагодарить Георгия Иванова и Ксению Лавриченко за помощь в подготовке статьи и ценные замечания. Часть работы над данной статьей была выполнена при посещении первым и вторым авторами Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, а также во время обучения второго в аспирантуре Университета г. Берген.

Литература

[1] Cho, Yu. *On the volume formula for hyperbolic tetrahedra* / Yu. Cho, H. Kim // Discr. Comput. Geom. – 1999. – 22. – C. 347 – 366.

[2] Derevnin, D. A. *The Volume of the Lambert Cube in Spherical Space* / D. A. Derevnin, A. D. Mednykh // Mat. Zametki. – 2009. – P. 190 – 201.

[3] Gaifullin, A. *Sabitov polinomiels for polyhedra in four dimensions* / A. Gaifullin // arXiv: 1108.6014v1 [math.MG].

[4] Kellerhals, R. On the volume of hyperbolic polyhedra /R. Kellehals // Math. Ann. – 1989. – 285. – C. 541 – 569.

[5] Kneser, H. *Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie* / H. Kneser // Deutsche Math. – 1936. – 1. – C. 337 – 340.

[6] Lobatschefskij, N. I. *Imaginäre Geometrie und ihre Anwendung auf einige Integrale* / N. I. Lobatschefskij // Deutsche Übersetzung von H. Liebmann.– Leipzig: Teubner, 1904.

[7] Mednykh, A. D. *On hyperbolic polyhedra arising as convex cores of quasi- Fuchsian punctured torus groups* / A. D. Mednykh, J. Parker, A. Yu. Vesnin // Bol. Soc. Mat. Mexicana. – 2004. – 10. – C. 357 – 381.

[8] Milnor, J. W. *How to compute volume in hyperbolic space* / J. W. Milnor // Collected Papers, 1. Geometry.-Publish or Perish. – 1994. – C. 189 – 212.

[9] Milnor, J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* / J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – 6, № 1. – C. 9 – 24.

[10] Murakami, J. *On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron* / J. Murakami, M. Yano // Comm. Anal. Geom. – 2005. – 13. – C. 379 – 200.

[11] Schläfli, L. *On the multiple integral* $\int\int ... \int dxdy...dz$ *whose limits are* $p_1 = a_1x + b_1y + ... + h_1z > 0, p_2 > 0, ..., p_n > 0$ *and* $x^2 + y^2 + ... + z^2 < 1$ / L. Schläfli // Quart. J. Math. – 1858. – 2. – C. 269 – 300; 1860. – 3. – C. 54 – 68; 97 – 108.

[12] Schläfli, L. *Theorie der vielfachen Kontinuität* / L. Schläfli // Gesammelte mathematishe Abhandlungen.– Basel: Birkhäuser, 1950.

[13] Ushijima, A. *A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries (Prëkopa A., Molnär E., eds.)/ Math. Appl. – 2006. – 581. – C. 249 – 265.

[14] Абросимов, Н. В. *Об объеме сферического октаэдра с симметриями* / Н. В. Абросимов, М. Годой-Молина, А. Д. Медных // Современная математика и ее приложения. – 2009. – Т. 6. – С. 211 – 218.

[15] Винберг, Э. Б. *Геометрия-2*/ Э. Б. Винберг// Итоги науки и техн. Совр. пробл. мат. – М.: ВИНИТИ, 1988. – 29 с.

[16] Галиулин, Р. В. *Некоторые приложения формулы для объема октаэдра* / Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов // Мат. заметки. – 2004. – Т. 76, № 1. – С. 27 – 43.

[17] Деревнин, Д. А. *Объем симметричного тетраэдра в гиперболическом и сферическом пространствах* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. мат. ж. – 2004. – 45, № 5. – С. 1022 – 1031.

[18] Деревнин, Д. А. *О формуле объема гиперболического тетраэдра* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Усп. мат. наук. – 2005. – 60, № 2. – С. 159 – 160.

[19] Сабитов, И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер* / И. Х. Сабитов // Фундам. прикл. мат. – 1996. – Т. 2, № 1. – 348. – С. 305 – 307.