ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

УДК 514.13+514.132

ОБ ОБЪЕМАХ МНОГОГРАННИКОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Н. В. Абросимов

ON VOLUMES OF POLYHEDRA IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

N. V. Abrosimov

В работе представлен обзор основных результатов по вычислению объемов многогранников в евклидовом, сферическом пространстве и пространстве Лобачевского. Также приведены результаты автора, дающие решение известной проблемы Зейделя об объеме неевклидовых тетраэдров.

We overview the volume calculations for polyhedra in Euclidean, spherical and hyperbolic spaces. We also present some authors results, which provide a solution for Seidel's problem on the volume of non-Euclidean tetrahedron.

Ключевые слова: объемы многогранников, сферические и гиперболические объемы, проблема Зейделя, идеальный тетраэдр, ортосхема.

Keywords: volumes of polyhedra, spherical and hyperbolic volumes, Seidel's problem, ideal tetrahedron, orthoscheme.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 09–01–00255, 10–01–00642 и 12-01-00210), Комплексного интеграционного проекта СО РАН — УрО РАН № 46, Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ–6613.2010.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракт № 02.740.11.0457) и АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/3707).

1. Объемы евклидовых многогранников

Вычисление объема многогранника — это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в наши дни. В основном это связано с тем, что объем фундаментального многогранника является одним из основных инвариантов трехмерного многообразия.

Вероятно, первый результат в данном направлении принадлежит Тартальи (Tartaglia, 1499–1557), который выразил объем евклидова тетраэдра через длины его ребер. Удобно выписать указанное соотношение в форме равенства, в котором справа стоит определитель Кэли—Менгера.

Теорема 1. [Тарталья, XVI в.]. *Пусть T — тетраэдр в евклидовом пространстве с длинами ребер d_{ij}, $1 \le i < j \le 4$. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой:*

$$288\,V^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12}^2 & d_{13}^2 & d_{14}^2 \\ 1 & d_{21}^2 & 0 & d_{23}^2 & d_{24}^2 \\ 1 & d_{31}^2 & d_{32}^2 & 0 & d_{34}^2 \\ 1 & d_{41}^2 & d_{42}^2 & d_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что в приведенном соотношении объем вычисляется как корень квадратного уравнения, коэффициенты которого являются многочленами с целыми коэффициентами от длин ребер. Удивительно, но этот результат можно обобщить на случай произвольного евклидова многогранника. Около пятнадцати лет назад И. Х. Сабитов [1] доказал соответствующую теорему, основываясь на теории сокращений (разделе коммутативной алгебры и алгебраической геометрии, посвященном алгоритмическим вопросам сокращения многочленов от многих переменных). Теорема Сабитова справедлива для многогранников, гомеоморфных сфере. Спустя короткое время, Р. Коннелли со своей ученицей Анке Вальц усовершенствовали доказательство И. Х. Сабитова, доказав ту же теорему для общего случая двухмерной ориентируемой полиэдральной поверхности [2].

Теорема 2. [Сабитов, 1996; Connelly, Sabitov, Walz, 1997]. *Пусть P — евклидов многогранник с жесткими гранями и длинами ребер d_{ij}. Тогда объем $V(P)$ — это корень алгебраического уравнения четной степени, чьи коэффициенты являются многочленами с рациональными кэффициентами от d_{ij}^2 и зависят от комбинаторного типа P.*

Комбинаторным типом многогранника называют набор его вершин с указанием, какие из них соединяются ребрами.

Стоит отметить, что эта замечательная теорема носит чисто теоретический характер. Конкретный вид указанного уравнения известен лишь в некоторых частных случаях, например для октаэдров с симметриями [3]. С другой стороны, теорема Сабитова позволяет без труда решить одну хорошо известную проблему.

Гипотеза о кузнечных мехах. [Connelly, Sullivan, конец 1970-х]. *Объем изгибаемого многогранника не меняется при изгибании.*

Предполагается, что при изгибании двугранные углы многогранника изменяются непрерывным образом, в то время как грани остаются жесткими.

Классическая теорема Коши (1813) утверждает, что выпуклый многогранник с жесткими гранями сам является жестким. Для невыпуклых многогранников это не так, среди них известны примеры изгибаемых многогранников. Первый такой пример был построен Брикаром (Brikard, 1897), он представляет собой самопересекающийся октаэдр. Пример изгибаемого многогранника без самопересечений впервые был построен Р. Коннелли (Connelly, 1978).

По определению, при изгибании многогранника его комбинаторный тип не меняется, и набор длин ребер фиксирован. Тогда по теореме 1 все значения объема многогранника при изгибании — это корни одного и того же алгебраического уравнения с постоянными коэффициентами. Множество таких корней конечно, каким бы сложным и громоздким ни было указанное уравнение. Следовательно, не остается другой возможности, кроме той, чтобы объему быть величиной постоянной.

Месяц назад в архиве Корнельского университета появился препринт А. А. Гайфуллина [4], в котором аналог теоремы Сабитова доказывается для четырехмерных полиэдров. Для неевклидовых многогранников аналога теоремы 1 нет. Из приведенных ниже результатов будет видно, что объем многогранника в сферическом пространстве или в пространстве Лобачевского, как правило, не выражается через элементарные функции.

2. Объемы неевклидовых тетраэдров

В гиперболическом и сферическом случаях ситуация более сложная. Гаусс, один из создателей неевклидовой геометрии, использовал слово «die Dschungel» (джунгли) в отношении вычисления гиперболических объемов.

2.1. Объемы ортосхем в S^3 и H^3

Формулы для объема неевклидовых тетраэдров в некоторых частных случаях были известны еще Лобачевскому, Бойяи и Шлефли. Так, например, Л. Шлефли нашел объем биортогонального тетраэдра (ортосхемы) в S^3 [5].

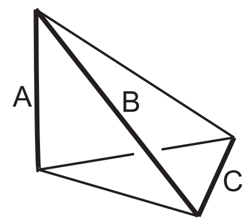

Рис. 1. Ортосхема $T = T(A, B, C)$ с двугранными углами A, B и C

Теорема 3. [Schläfli, 1858]. *Пусть T — ортосхема в сферическом пространстве с двугранными углами A, B и C. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой $V = \frac{1}{4}S(A, B, C)$, где*

$$S(\frac{\pi}{2} - x, y, \frac{\pi}{2} - z) = \widehat{S}(x, y, z) = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{D - \sin x \sin z}{D + \sin x \sin z} \right)^m \times \\ \times \frac{\cos 2mx - \cos 2my + \cos 2mz - 1}{m^2} - x^2 + y^2 - z^2$$

и $D \equiv \sqrt{\cos^2 x \cos^2 z - \cos^2 y}$.

Появившуюся в теореме 3 функцию S принято называть функцией Шлефли. Объем гиперболической ортосхемы получили независимо друг от друга Я. Бойяи [6] и Н. И. Лобачевский [7]. Следующая теорема представляет результат Лобачевского в виде совершенно простой формулы. В таком виде она была получена Г. С. М. Кокстером [8].

Теорема 4. [Лобачевский, 1835; Coxeter, 1935]. *Пусть T — ортосхема в гиперболическом пространстве с двугранными углами A, B и C. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой $V = \frac{i}{4}S(A, B, C)$, где $S(A, B, C)$ — функция Шлефли.*

2.2. Объем гиперболического тетраэдра общего вида

Несмотря на то, что частные результаты об объемах неевклидовых тетраэдров были известны давно, формула объема для гиперболического тетраэдра общего вида до недавнего времени оставалась неизвестной. Общий алгоритм получения такой формулы был предложен в В.-И. Хсянгом в 1988 году [9]. Полное решение удалось получить лишь десять лет спустя — в работе корейских математиков Ю. Чо и Х. Кима [10] предложена формула, которая, однако, несимметрична относительно перестановки аргументов. Следующее продвижение было достигнуто японскими математиками: сначала Дж. Мураками и У. Яно [11] предложили формулу, выражающую объем через двугранные углы симметричным образом, а годом позже А. Ушиджима [12] привел в своей работе доказательство этой формулы и исследовал случай усеченного гиперболического тетраэдра.

Следует отметить, что во всех перечисленных работах объем выражается как линейная комбинация 16 дилогарифмов или функций Лобачевского. Аргументы этих функций зависят от двугранных углов тетраэдра и некоторого дополнительного параметра, который является корнем квадратного уравнения с комплексными коэффициентами сложного вида.

Геометрический смысл полученной формулы удалось объяснить Г. Лейбону (G. Leibon) с точки зрения симметрии Редже. Ясное описание этих идей и полное геометрическое доказательство указанной формулы было дано Яной Моханти [13]. Ей удалось доказать эквивалентность симметрии Редже и равносоставленности (scissors congruence) в гиперболическом пространстве.

В 2005 году Д. А. Деревнин и А. Д. Медных [14] предложили следующую интегральную формулу объема гиперболического тетраэдра.

Теорема 5. [Деревнин, Медных, 2005]. *Пусть $T(A,B,C,D,E,F)$ — компактный гиперболический тетраэдр с двугранными углами A,B,C,D,E,F. Тогда объем $V=V(T)$ задается формулой:*

$$V=-\frac{1}{4}\int\limits_{z_1}^{z_2}\log\frac{\cos\frac{A+B+C+z}{2}\cos\frac{A+E+F+z}{2}\cos\frac{B+D+F+z}{2}\cos\frac{C+D+E+z}{2}}{\sin\frac{A+B+D+E+z}{2}\sin\frac{A+C+D+F+z}{2}\sin\frac{B+C+E+F+z}{2}\sin\frac{z}{2}}\,dz\,,$$

где z_1 и z_2 — корни подынтегрального выражения, удовлетворяющие условиям $0<z_2-z_1<\pi$. Более точно:

$$\begin{aligned}
&z_1=\arctan\frac{k_3}{k_4}-\arctan\frac{k_1}{k_2}\,,\quad z_2=\pi-\arctan\frac{k_3}{k_4}-\arctan\frac{k_1}{k_2}\,,\quad \textit{где}\\
&k_1=-\cos S-\cos(A+D)-\cos(B+E)-\cos(C+F)-\cos(D+E+F)-\\
&\quad-\cos(D+B+C)-\cos(A+E+C)-\cos(A+B+F)\,,\\
&k_2=\sin S+\sin(A+D)+\sin(B+E)+\sin(C+F)+\sin(D+E+F)+\\
&\quad+\sin(D+B+C)+\sin(A+E+C)+\sin(A+B+F)\,,\\
&k_3=2\left(\sin A\sin D+\sin B\sin E+\sin C\sin F\right),\\
&k_4=\sqrt{k_1^2+k_2^2-k_3^2}\,,\\
&S=A+B+C+D+E+F\,.
\end{aligned}$$

Заметим, что все параметры в теореме 5 вещественные и имеют естественный геометрический смысл, никакой неоднозначности при вычислении интеграла не возникает. Доказательство теоремы 5 основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами в форме теоремы синусов-тангенсов. Основным шагом при доказательстве является применение классической дифференциальной формулы Шлефли (см., например, [15]), выражающей дифференциал объема тетраэдра через длины его ребер и дифференциалы двугранных углов. Формула Мураками-Яно может быть получена прямыми вычислениями, как следствие из теоремы 5.

2.3. Формула Скорца

Удивительно, но более ста лет назад, в 1906 г., итальянский математик Гаетано Скорца (Gaetano Scorza или Sforza, 1876–1939) нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. Этот факт приобрел известность после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом (J. M. Montesinos) на конференции в Эль Бурго д'Осма (Испания) в августе 2006 г. К сожалению, выдающаяся работа Скорца [16] до этого была полностью забыта.

Пусть T — гиперболический тетраэдр с двугранными углами A,B,C,D,E,F, где A,B и C лежат при одной вершине, а D,E и F соответственно противолежат им.

Матрица Грама $G(T)$ определяется следующим образом:

$$G=\begin{pmatrix}1&-\cos A&-\cos B&-\cos F\\-\cos A&1&-\cos C&-\cos E\\-\cos B&-\cos C&1&-\cos D\\-\cos F&-\cos E&-\cos D&1\end{pmatrix}.$$

Теорема 6. [Sforza, 1906]. *Пусть T — гиперболический тетраэдр с матрицей Грама G. Рассмотрим $G=G(A)$ как функцию двугранного угла A. Тогда объем $V=V(T)$ задается формулой*

$$V=-\frac{1}{4}\int\limits_{A_0}^{A}\log\frac{c_{34}(A)+\sqrt{-\det G(A)}\,\sin A}{c_{34}(A)-\sqrt{-\det G(A)}\,\sin A}\,dA\,,$$

где A_0 — подходящий корень уравнения $\det G(A)=0$ и $c_{34}(A)$ — соответствующий минор матрицы $G(A)$.

Формула Скорца, хотя и имеет компактную запись в терминах миноров матрицы Грама, не так проста. Используя ее для вычислений, важно помнить, что при неправильном выборе аналитической ветви указанной интегральной функции результат получится неверный.

Отметим, что в случае симметричного тетраэдра противоположные двугранные углы которого попарно равны, формула объема существенно упрощается. Впервые этот замечательный факт был установлен самим Лобачевским [7] для идеального гиперболического тетраэдра.

2.4. Объем идеального тетраэдра

Рассмотрим тетраэдр T в пространстве Лобачевского, все вершины которого лежат на бесконечности (см. Рис. 2). Такие тетраэдры называют идеальными.

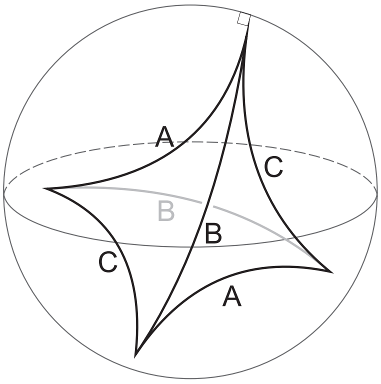

Рис. 2. Идеальный тетраэдр $T = T(A, B, C)$ с двугранными углами A, B и C

Противолежащие двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, а сумма двугранных углов при любой вершине равна $A + B + C = \pi$.

Объем идеального тетраэдра был известен еще Лобачевскому [7]. Дж. Милнор представил этот результат в виде элегантной формулы [17].

Теорема 7. [Лобачевский, 1835; Milnor, 1982]. *Пусть T — идеальный гиперболический тетраэдр с двугранными углами A, B и C. Тогда объем $V = V(T)$ задается формулой*

$$V = \Lambda(A) + \Lambda(B) + \Lambda(C),$$

где $\Lambda(x) = -\int_0^x \log|2\sin t|dt$ — функция Лобачевского.

Более сложный случай, когда хотя бы одна вершина тетраэдра лежит на бесконечности, был исследован Э. Б. Винбергом [15].

3. Проблема Зейделя

В 1986 году Дж. Зейдель [18] сформулировал гипотезу о том, что объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить как функцию от определителя и перманента его матрицы Грама. Несмотря на то, что формула, выражающая объем такого тетраэдра через двугранные углы, была известна давно, проблема долго не поддавалась решению. Спустя десять лет, американскими математиками И. Ривиным и Ф. Лю был предложен усиленный вариант гипотезы Зейделя. Они предположили, что объем симметричного тетраэдра (гиперболического или сферического) зависит лишь от определителя его матрицы Грама.

Пусть T — неевклидов тетраэдр с двугранными углами $A, B, C, D,$ и F (см. Рис. 3).

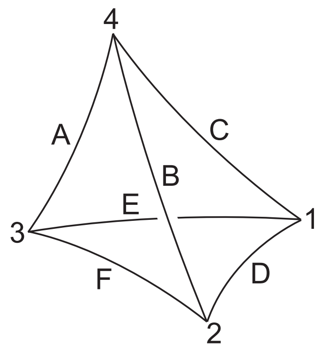

Рис. 3. Тетраэдр $T = T(A, B, C, D, E, F)$

Хорошо известно [15], что в гиперболическом и сферическом пространствах тетраэдр T однозначно, с точностью до изометрии, определяется своей матрицей Грама:

$$G = \langle -\cos\theta_{ij}\rangle_{ij=1,2,3,4} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что перманент матрицы $M = (m_{ij})_{ij=1\dots n}$ задается формулой

$$\operatorname{per} M = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \operatorname{per} M_{ij},$$

где M_{ij} — матрица, полученная из M вычеркиванием i-той стоки и j-того столбца.

Условия существования для сферических и гиперболических тетраэдров в терминах матрицы Грама приведены соответственно в [19] и [20].

3.1. Усиленная гипотеза Зейделя

В сферическом случае ответ дает следующая теорема автора [21].

Теорема 8. [Абросимов, 2009]. *Существует однопараметрическое семейство симметричных сферических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама, объем которых меняется со значением параметра.*

Для доказательства построим указанное семейство. Рассмотрим тетраэдр $T(A, D)$, у которого два противоположных двугранных угла равны соответственно A и D, а все оставшиеся — прямые. Нетрудно убедиться, что объем такого тетраэдра равен $\dfrac{AD}{2}$, а определитель его матрицы Грама $\det G = \sin^2 A \sin^2 D$.

Среди множества всех $T(A, D)$, у которых $0 < A, D < \pi$, выберем семейство тетраэдров $T_c(A, D) = T\left(A, \dfrac{c}{\sin A}\right)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама, $\det G = c^2$, где c — некоторая константа, $0 < c < \min\{\sin A, \sin D\}$.

Объем таких тетраэдров выражается формулой $V(T_c) = \dfrac{A}{2} \arcsin \dfrac{c}{\sin A}$, то есть зависит не только от выбора константы c, но и от значения свободного параметра A. Тем самым, исходное семейство тетраэдров построено.

В гиперболическом случае построить элементарный контрпример к усиленной гипотезе Зейделя не удается. Тем не менее было доказано [21] аналогичное утверждение.

Теорема 9. [Абросимов, 2009]. *Существует однопараметрическое семейство симметричных гиперболических тетраэдров с постоянным значением определителя матрицы Грама, объем которых меняется со значением параметра.*

Доказательство основано на следующих соображениях. Рассмотрим произвольный гиперболический тетраэдр T с двугранными углами A, B, C, D, E, F, где A, B и C лежат при одной вершине, а D, E и F соответственно противолежат им. Зафиксируем все двугранные углы, кроме двух противолежащих, например A и D. Поскольку множество гиперболических тетраэдров открыто [19, 20], то, меняя значения A и D в достаточно малых пределах, будем по-прежнему получать гиперболические тетраэдры. Среди множества таких тетраэдров $T(A, D)$ выделим семейство тетраэдров $T_c(A, D)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама, $\det G = -c^2 < 0$. Последнее условие означает, что дифференциал функции $\det G$ равен нулю. Учитывая, что углы A и D переменны, а остальные фиксированы, имеем:

$$-d \det G = 2\, c_{12} \sin A\, dA + 2\, c_{34} \sin D\, dD = 0,$$

где c_{ij} — алгебраическое дополнение ij-го элемента матрицы G. Указанное соотношение позволяет рассматривать угол D как функцию от угла A. При этом

$$\frac{dD}{dA} = -\frac{c_{12} \sin A}{c_{34} \sin D}.$$

Производная объема как сложной функции от угла A равна

$$\frac{dV}{dA} = \frac{\partial V}{\partial A} + \frac{\partial V}{\partial D}\,\frac{dD}{dA}.$$

Отметим, что, согласно классической формуле Шлефли (см., например, [15]),

$$\frac{\partial V}{\partial A} = -\frac{\ell_A}{2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial D} = -\frac{\ell_D}{2},$$

где ℓ_A и ℓ_D — длины соответствующих ребер тетраэдра.

Длины ребер, в свою очередь, могут быть выражены через двугранные углы [20, 22]:

$$\ell_A = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-\det G}\, \sin A}{c_{34}},$$
$$\ell_D = \operatorname{arcth} \frac{\sqrt{-\det G}\, \sin D}{c_{12}}.$$

Сопоставляя указанные выражения, в результате несложных вычислений, получим:

$$\frac{dV}{dA} = -\frac{\operatorname{th} \ell_A}{2} \left(\frac{\ell_A}{\operatorname{th} \ell_A} - \frac{\ell_D}{\operatorname{th} \ell_D} \right).$$

Для выполнения условий теоремы необходимо, чтобы значение объема менялось при изменении параметра A, то есть $\dfrac{dV}{dA} \neq 0$, что эквивалентно неравенству $\ell_A \neq \ell_D$. Таким образом, семейство тетраэдров $T_c(A, D)$ с постоянным значением определителя матрицы Грама имеет непостоянный объем при $\ell_A \neq \ell_D$. Нетрудно теперь построить бесконечное семейство тетраэдров, удовлетворяющих последнему условию при $A \neq D$. Например, такому условию удовлетворяют «почти-симметричные» тетраэдры с углами $A \neq D, B = E$ и $C = F$. Напомним, что при фиксированном c семейство $T_c(A, D)$ зависит от одного свободного параметра.

3.2. Исходная гипотеза Зейделя

Решение проблемы Зейделя, сформулированной в [18], дает следующая теорема автора [23].

Теорема 10. [Абросимов, 2010]. *Объем идеального гиперболического тетраэдра можно выразить как функцию от определителя и перманента его матрицы Грама при условии, что известно, является ли он остроугольным или тупоугольным*[1].

Известно (см., например, [17]), что противолежащие двугранные углы идеального тетраэдра попарно равны, а сумма двугранных углов при любой вершине равна $A + B + C = \pi$. Выпишем определитель и перманент матрицы Грама идеального тетраэдра с двугранными углами $A, B, \pi - A - B$. Имеем:

$$\det G = -4 \sin^2 A\ \sin^2 B\ \sin^2(A + B),$$
$$\operatorname{per} G = 4 + 4 \cos^2 A\ \cos^2 B\ \cos^2(A + B).$$

Для доказательства теоремы 10 достаточно показать, что двугранные углы идеального тетраэдра однозначно (с точностью до перестановки) определяются по значениям $\det G$ и $\operatorname{per} G$

[1]Тупоугольным будем называть тетраэдр, у которого хотя бы один двугранный угол тупой.

при условии, что известно, является ли он остроугольным или тупоугольным. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев. Не уменьшая общности, можно считать, что $0 < A \le B \le C = \pi - A - B$. Тем самым двугранные углы A, B — a priori острые, а угол C либо острый, либо тупой. В первом случае рассматриваемый тетраэдр остроугольный, во втором — тупоугольный.

Введем новые переменные

$$x = \sin A\, \sin B, \quad y = \cos A\, \cos B.$$

Покажем, что при фиксированной левой части решения системы уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\det G}{4} = x^2(1-(y-x)^2) \\ \dfrac{\operatorname{per} G - 4}{4} = y^2(y-x)^2 \end{cases}$$

отвечают одному тетраэдру (с точностью до конгруэнтности) в каждом из двух рассматриваемых случаев.

Допустим, что найдется пара неравных между собой решений (a, b) и (x, y), удовлетворяющих системе. В таком случае будут выполнены тождества:

$$\begin{cases} a^2(1-(b-a)^2) = x^2(1-(y-x)^2) \\ b^2(b-a)^2 = y^2(y-x)^2 \end{cases}.$$

Условие, что угол C острый, означает, что $\cos A \cos B - \sin A \sin B = -\cos C < 0$, то есть оба решения удовлетворяют неравенствам $b\,(b-a) < 0$ и $x\,(x-y) < 0$. В случае, когда угол C тупой, имеют место обратные неравенства. Такое наблюдение позволяет избавиться от квадратов во втором уравнении, не потеряв при этом решений:

$$\begin{cases} a^2(1-(b-a)^2) = x^2(1-(y-x)^2) \\ b\,(b-a) = y\,(y-x) \end{cases}.$$

Выразив x из второго уравнения и подставив в первое, получим многочлен шестой степени от y. По счастью, он раскладывается на линейные множители $b - y$, $b + y$ и биквадратный многочлен $y^4 - (a^2 + a^4 + 2\,ab - 2\,a^3b - b^2 + 2\,ab^3 - b^4)\,y^2 + {}$ $+a^4b^2 - 4\,a^3b^3 + 6\,a^2b^4 - 4\,ab^5 + b^6$.

Таким образом, все решения могут быть найдены в радикалах. Подставляя выражения x, y через двугранные углы, нетрудно убедиться, что различные решения системы соответствуют одному идеальному тетраэдру $T(A, B, C)$ с точностью до переобозначения его двугранных углов.

Отметим, что в теореме 10 нельзя избавиться от условия, что тетраэдр является остроугольным или тупоугольным. Этот факт подтверждает следующий пример.

Пример 1. Рассмотрим пару идеальных тетраэдров: тупоугольный $T_1(s,\, s,\, \pi - 2\,s)$ и остроугольный $T_2\left(t, \dfrac{\pi - t}{2}, \dfrac{\pi - t}{2}\right)$, где

$$s = \arccos \frac{\sqrt{2 + \sqrt{4 + \sqrt{170\sqrt{17} - 698}}}}{2\sqrt{2}},$$
$$t = \arccos\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{8} + \sqrt{\frac{5\sqrt{17} - 13}{2}}\right).$$

Определители и перманенты матриц Грама указанных тетраэдров совпадают и равны соответственно

$$\det G(T_1) = \det G(T_2) = \frac{107 - 51\sqrt{17}}{128},$$
$$\operatorname{per} G(T_1) = \operatorname{per} G(T_2) = \frac{163 + 85\sqrt{17}}{128}.$$

При этом объемы тетраэдров T_1 и T_2 различны и равны соответственно 0.847365 и 1.01494.

Литература

[1] Сабитов, И. Х. *Объем многогранника как функция длин его ребер* / И. Х. Сабитов // Фундамент. и прикл. матем. – 1996. – Т. 2, № 1. – С. 305 – 307.

[2] Connelly, R. *The Bellows Conjecture* / R. Connelly, I. Sabitov, A. Walz // Contrib. Algebra Geom. – 1997. – Vol. 38. – P. 1 – 10.

[3] Галиулин, Р. В. *Некоторые приложения формулы для объема октаэдра* / Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76, № 1. – С. 27 – 43.

[4] Gaifullin, A. *Sabitov polynomials for polyhedra in four dimensions* / A. Gaifullin.– [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1108.6014, свободный.

[5] Schläfli, L. *Theorie der vielfachen Kontinuität* / L. Schläfli // Gesammelte mathematishe Abhandlungen. – Basel: Birkhäuser, 1950.

[6] Bolyai, J. *Appendix. The Theory of Space* / János Bolyai (F. Kárteszi ed.) – Budapest: Akadémiai Kiadó, 1987. – 239 p.

[7] Лобачевский, Н. И. *Воображаемая геометрия* / Н. И. Лобачевский // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1835. – I книжка. –С. 3 – 88.

[8] Coxeter, H. S. M. *The functions of Schläfli and Lobatschefsky* / H. S. M. Coxeter // Quart. J. Math. Oxford. – 1935. – Vol. 6, № 1. – P. 13 – 29.

[9] Hsiang, W.-Yi. *On infinitesimal symmetrization and volume formula for spherical or hyperbolic tetrahedrons* / W.-Yi. Hsiang // Quart. J. Math. Oxford (2). – 1988. – Vol. 39. – P. 463 – 468.

[10] Cho, Yu. *On the volume formula for hyperbolic tetrahedra* / Yu. Cho, H. Kim // Disc. and Comp. Geometry. – 1999. – Vol. 22. – P. 347 – 366.

[11] Murakami, J. *On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron* / J. Murakami, M. Yano // Comm. Anal. Geom. – 2005. – Vol. 13. – P. 379 – 200.

[12] Ushijima, A. *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications. – 2006. – Vol. 581. – P. 249 – 265.

[13] Mohanty, Ya. *The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space* / Ya. Mohanty // Alg. Geom. Topology. – 2003. – Vol. 3. – P. 1 – 31.

[14] Деревнин, Д. А. *О формуле объема гиперболического тетраэдра* / Д. А. Деревнин, А. Д. Медных // Усп. мат. наук. – 2005. – Т. 60, № 2. – P. 159 – 160.

[15] Винберг, Э. Б.*Геометрия-2. Современные проблемы математики, Т. 29* / Э. Б. Винберг – М.: ВИНИТИ (Итоги науки и техники), 1988.

[16] Sforza, G. *Spazi metrico-proiettivi* / G. Sforza // Ricerche di Estensionimetria differenziale III. – 1906. – Vol. 8. – P. 3 – 66.

[17] Milnor, J. *Hyperbolic geometry: the first 150 years* / J. Milnor // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 6, № 1. – P. 9 – 24.

[18] Seidel, J. J. *On the volume of a hyperbolic simplex* / J. J. Seidel // Stud. Sci. Math. Hung. – 1986. – Vol. 21. – P. 243 – 249.

[19] Luo, F. *On a problem of Fenchel* / F. Luo // Geometriae Dedicata. – 1997. – Vol. 64. – P. 227 – 282.

[20] Ushijima, A. *Volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra* / A. Ushijima // Non-Euclidean Geometries. Mathematics and Its Applications. – 2006. – Vol. 581. – P. 249 – 265.

[21] Абросимов, Н. В. *К решению проблемы Зейделя об объемах гиперболических тетраэдров* / Н. В. Абросимов // Сиб. электрон. мат. изв. – 2009. – Т. 6. – С. 211 – 218.

[22] Медных, А. Д. *Элементарные формулы для гиперболического тетраэдра* / А. Д. Медных, М. Г. Пашкевич // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47, № 4. – С. 831 – 841.

[23] Абросимов, Н. В. *Проблема Зейделя об объеме неевклидового тетраэдра* / Н. В. Абросимов // Доклады АН. – 2010. – Т. 435, № 1. – С. 7–10.

УДК 514.132

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА, ОБЛАДАЮЩЕГО mmm-СИММЕТРИЕЙ

Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина, А. Д. Медных

ON GEOMETRICAL PROPERTIES OF A HYPERBOLIC OCTAHEDRON HAVING mmm-SYMMETRY

G. A. Baigonakova, M. Godoy-Molina, A. D. Mednykh

В настоящей работе изучаются геометрические свойства гиперболического октаэдра, обладающего mmm - симметрией, то есть остающегося инвариантным при отображениях в трех взаимно ортогональных плоскостях. Получены тригонометрические соотношения, связывающие длины ребер и двугранные углы указанного многогранника (теоремы синусов-тангенсов). Это дает возможность выразить длины через двугранные углы. Далее, с помощью формулы Шлефли, находится объем рассматриваемого октаэдра в одном из важных геометрических случаев.

In the present paper geometric properties are investigated for a hyperbolic octahedron having mmm-symmetry. Trigonometrical identities connecting lengths of edges and dihedral angles of the polyhedron under consideration are obtained (the sine-tangent theorem). It gives the key to express lengths through dihedral angles. Further, we find the volume of the octahedron in very important geometrical cases by making use the Schläfli formula.

Ключевые слова: гиперболический октаэдр, многогранник, объем, теорема синусов-тангенсов, симметричный октаэдр, формула Шлефли.

Keywords: hyperbolic octahedron, volume, symmetric octahedron, polyhedron, the Schläfli formula, the sine-tangent theorem.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 09-01-00255, 11-01-90705-моб_ст, 10-01-00642, АВЦП (проект 2.1.13707) и ФЦП.(проект 02.740.11.0457).

1. Введение

Вычисление объема многогранника – это классическая задача, известная со времен Евклида и не потерявшая актуальность в настоящее время. Считается, что первый результат в этом направлении принадлежит Тартальи (1499 – 1557 гг.), который нашел объем евклидова тетраэдра. В настоящее время этот результат известен как формула Кэли–Менгера. В 1996 г. И. Х. Сабитов [19] доказал, что объем евклидова многогранника – это корень алгебраического уравнения, коэффициен-