

УДК 517:519.71; 62.50

ТОЧЕЧНЫЕ МОДЕЛИ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. В. Осипов

POINT MODEL OF MULTI-DIMENSIONAL LINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

V. V. Osipov

Применяя метод точечных представлений, строится точечная модель многомерной линейной нестационарной динамической системы, имеющая вид блочного векторно-матричного уравнения, в котором системная матрица играет роль передаточной.

Using the method of point representations, the point model is constructed multivariate linear nonstationary dynamic system, having the form of block vector-matrix equation in which the system plays the role of the transfer matrix.

Ключевые слова: метод точечных представлений, точечное моделирование, многомерные нестационарные динамические системы.

Keywords: method of point representations, the point modeling, multidimensional nonstationary dynamical systems.

Рассмотрим линейную нестационарную динамическую систему [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx(\tau)}{d\tau} + T \cdot A(\tau)X(\tau) &= T \cdot K(\tau)U(\tau); & a \\ Y(\tau) &= C(\tau)X(\tau) + D(\tau)U(\tau), & b \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

приведенную к отрезку $[0, 1]$ безразмерного времени τ с параметром T и имеющую q входов, r выходов и n фазовых переменных. Дифференциальное уравнение в (1) может быть заменено эквивалентным интегральным:

$$X(\tau) + T \int_0^\tau A(\tau)X(\tau)d\tau = T \int_0^\tau K(\tau)U(\tau)d\tau + X_0. \quad (2)$$

Матричные функции $A(\tau)$, $K(\tau)$, $C(\tau)$ и $D(\tau)$ имеют размерности $(n \times n)$, $(n \times q)$, $(r \times n)$ и $(r \times q)$ соответственно, а

$$X(\tau) = \text{Colon}[x_1(\tau), \dots, x_i(\tau), \dots, x_n(\tau)]$$

есть n -вектор состояния (n -вектор – функция фазовых переменных); $X_0 = X(0)$ – вектор n начальных условий.

$$U(\tau) = \text{Colon}[u_1(\tau), \dots, u_i(\tau), \dots, u_q(\tau)]$$

есть q -вектор входных сигналов (q -вектор – функция входа).

$$Y(\tau) = \text{Colon}[y_1(\tau), \dots, y_i(\tau), \dots, y_r(\tau)]$$

есть r -вектор выходных сигналов (r -вектор – функция выхода), причем, в общем случае, $q \neq n$, $r \neq n$ и $q \neq r$.

Будем предполагать, что все координаты векторов функций и элементы матриц в (1) как непрерывные (и, возможно, кусочно-непрерывные) функции определены при любых N в узлах чебышевских N -сеток I и II рода:

$$\left. \begin{aligned} A(\tau) \xrightarrow{T_1} D_N[A(\tau_v^N)] &= \text{Diag}[\overline{A(\tau_1^N)} \dots \overline{A(\tau_v^N)} \dots \overline{A(\tau_N^N)}], \\ K(\tau) \xrightarrow{T_1} D_N[K(\tau_v^N)] &= \text{Diag}[\overline{K(\tau_1^N)} \dots \overline{K(\tau_v^N)} \dots \overline{K(\tau_N^N)}], \\ C(\tau) \xrightarrow{T_1} D_N[C(\tau_v^N)] &\text{ и } D(\tau) \xrightarrow{T_1} D_N[D(\tau_v^N)]. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_v^{(N)} &= \frac{2v-1}{2N}; & a \\ \theta_v^{(N)} &= \frac{v}{N} & b \end{aligned} \right\}, \quad (v = \overline{1, N}) \quad (3)$$

т. е. это функции из $M(0,1)$. Таким образом, будут определены все их точечные представления, в частности, на N -сетке I рода (3 а). Это будут блочные представления с элементами – блоками соответствующей размерности.

Для вектор-функций будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} X(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{X}_\tau &= \text{Colon}[X(\tau_1^{(N)}) \dots X(\tau_v^{(N)}) \dots X(\tau_N^{(N)})]; & a \\ U(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{U}_\tau &= \text{Colon}[U(\tau_1^{(N)}) \dots U(\tau_v^{(N)}) \dots U(\tau_N^{(N)})]; & b \\ Y(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{Y}_\tau &= \text{Colon}[Y(\tau_1^{(N)}) \dots Y(\tau_v^{(N)}) \dots Y(\tau_N^{(N)})]. & b \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Векторные блоки-компоненты этих точечно-векторных изображений будут элементами алгебр AR_{Nn} , AR_{Nq} и AR_{Nr} соответственно [2], изометрически изоморфных соответствующим алгебрам AS_{Pn} , AS_{Pq} и AS_{Pr} сплайновых (ступенчатых) представлений, возникающим в результате гомоморфных π_N -отображений функциональных алгебр AM_n , AM_q и AM_r . Существуют, очевидно, и инволютивные элементы как элементы соответствующих алгебр:

$$\left. \begin{aligned} X^*(\tau) \in AM_n^* &\xrightarrow{T_1} \bar{X}_\tau^* \in AR_{Nn}^*; & a \\ U^*(\tau) \in AM_q^* &\xrightarrow{T_1} \bar{U}_\tau^* \in AR_{Nq}^*; & b \\ Y^*(\tau) \in AM_r^* &\xrightarrow{T_1} \bar{Y}_\tau^* \in AR_{Nr}^*. & b \end{aligned} \right\}$$

Точечные модели матричных функций представляются в виде блочных (квазидиагональных) матриц:

Найдем точечную модель нашей динамической системы (1).

Имея в виду точечные представления интегральных преобразований вида

$$T \int_0^{\tau} A(\tau) X(\tau) d\tau \xrightarrow{T_i} [J_N(Z) \otimes E_n] D_N[A(\tau_v^{(N)})] \cdot \bar{X}_{\Pi},$$

где $[J_N(Z) \otimes E_n]$ – блочная матрица реализующая операцию интегрирования в векторном пространстве точечно-векторных отображений вектор – функции из $M_n(0,1)$ [2,4,5], будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_{\Pi} + [J_N(Z) \otimes E_n] \cdot D_N[A(\tau_v^{(N)})] \cdot \bar{X}_{\Pi} &= \\ = [J_N(Z) \otimes E_n] D_N[K(\tau_v^{(N)})] \bar{U}_{\Pi}; &a \\ \bar{Y}_{\Pi} = D_N[C(\tau_v^{(N)})] \cdot \bar{X}_{\Pi} + D_N[D(\tau_v^{(N)})] \bar{U}_{\Pi}. &b \end{aligned} \right\}$$

Первое из этих векторно-матричных уравнений есть точечная модель рассматриваемой линейно-динамической системы в важном частном случае, когда вектор $X(\tau)$ ее фазовых переменных оказывается и ее вектором выхода, т. е. когда $C(\tau) = E_n$, а $D(\tau) \equiv 0$ и $Y(\tau) = X(\tau)$. В этом случае получаем точечную модель задачи Коши, при нулевых начальных условиях и $K(\tau) \neq E_n$. Это модель вида:

$$\left\{ \begin{aligned} E_{Nn} + [J_N(Z) \otimes E_n] D_N[A_v] \bar{X}_{\Pi} &= \\ = [J_N(Z) \otimes E_n] \cdot D_N[K_v] \cdot \bar{U}_{\Pi}, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

где для сокращения записи обозначено:

$$D_N[A_v] = D_N[A(\tau_v^{(N)})] \text{ и } D_N[K_v] = D_N[K(\tau_v^{(N)})].$$

Умножая обе стороны уравнения (6) на блочную теплицеву матрицу $[(E_n - Z) \otimes E_n]$, получим:

$$\left\{ \begin{aligned} [(E_n - Z) \otimes E_n] + \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot D_N[A_v] \bar{X}_{\Pi} &= \\ = \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot D_N[K_v] \cdot \bar{U}_{\Pi}. \end{aligned} \right.$$

А последующие преобразования [2] приводят модель к виду:

$$\left\{ \begin{aligned} D_N[E_n + \lambda_0 A_v] \cdot T_N[B_v] \bar{X}_{\Pi} &= \\ = \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot D_N[K_v] \cdot \bar{U}_{\Pi}, \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$A_v = A(\tau_v^{(N)}); \quad K_v = K(\tau_v^{(N)}) \quad (v = \overline{1, N});$$

$$\begin{aligned} B_v &= (\lambda_0 A_{v+1} + E_n)^{-1} \cdot (\lambda_0 A_v - E_n) = \\ &= \frac{\lambda_0 A_v - E_n}{\lambda_0 A_{v+1} + E_n} \quad (v = \overline{1, (N-1)}); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} T_N[B_v] &= E_{Nn} + (Z \otimes E_n) \cdot D_N[B_v] = \\ &= \begin{bmatrix} E_n & & & & \\ B_1 & E_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & B_v & E_n & \\ & & & B_{N-1} & E_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Необходимо иметь в виду, что запись матрично-произведения (8) в виде дроби сделано ради его сокращения. Матрицы в произведении неперестановочны.

Из равенства (7) следует представление для $\bar{X}_{\Pi}$:

$$\bar{X}_{\Pi} = T_N^{-1}[B_v] \cdot D_N[(\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}] \cdot \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot D_N[K_v] \cdot \bar{U}_{\Pi}. \quad (9)$$

Введем блочную матрицу $W_N(A_v; K_v)$, полагая $W_N(A_v; K_v) = \lambda_0 T_N^{-1}[B_v] \cdot$

$$\begin{aligned} &\cdot D_N[(\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}] \cdot \\ &\cdot \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot D_N[K_v]. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда представление (9) запишется в виде

$$\bar{X}_{\Pi} = W_N(A_v; K_v) \cdot \bar{U}_{\Pi} = W_N(A_v) \cdot D_N[K_v] \cdot \bar{U}_{\Pi} \quad (11)$$

и, следовательно, матрица $W_N(A_v; K_v)$ (10), связывающая точечные изображающие вектора входа $\bar{U}_{\Pi}$ и выхода $\bar{X}_{\Pi}$ динамической системы, оказывается передаточной матрицей в пространстве точечных представлений временных сигналов, действующих в рассматриваемой динамической системе (рис. 1).

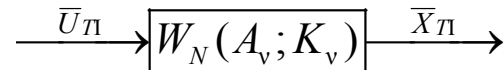


Рис. 1.

Обратные блочные матрицы в (10) имеют явные представления:

$$D_N[(\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}] = \text{Diag}[(\lambda_0 A_1 + E_n)^{-1} : \dots : (\lambda_0 A_v + E_n)^{-1} : \dots : (\lambda_0 A_N + E_n)^{-1}] \quad (12)$$

$$T_N^{-1}[B_v] = \begin{bmatrix} E_n & & & & \\ -B_1 & E_n & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{v-1} \prod_{i=1}^{v-1} B_i & (-1)^{v-2} \prod_{i=2}^{v-1} B_i & \dots & B_{v-2} \cdot B_{v-1} & -B_{v-1} & E_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (-1)^{N-1} \prod_{i=1}^{N-1} B_i & (-1)^{N-2} \prod_{i=2}^{N-1} B_i & \dots & B_{N-2} \cdot B_{N-1} & -B_{N-1} & E_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

Представление (9) для $\bar{X}_n$ (или (11)) есть решение уравнения (7), являющееся точечной моделью интегрального уравнения (2) (при $x'_0 = 0$) – ее гомоморфным алгебраическим образом и, следовательно, оказывается точечным отображением решения этого интегрального уравнения, ассоциированным с чебышевской N -сеткой I рода (3а), при выбранных значениях параметров T и $\lambda_0 = T/2N > 0$.

Это, в частности, означает, что если существует хотя бы одно решение функционального уравнения (2) (и соответствующей задачи Коши), то будет существовать (при заданных N и T) соответствующее решение точечного уравнения (7) – его гомоморфного отображения, в силу отображения алгебр $AM_N \xrightarrow{\pi_N} ASp_n \xrightarrow{T_1} AR_{Nn}$ [2].

Очевидно, будет верным и обратное утверждение: существование решения точечного уравнения (7) (при всяком конечном N , заданном $T > 0$ и заданной правой части) будет означать существование и его гомоморфного прототипа – решения интегрального уравнения (2), которое затем, по его точечному изображению, может быть представлено приближенно, в частности, в виде сплайновой (ступенчатой) модели [2].

Но существование решения точечного уравнения (3), т. е. представление (11) для $\bar{X}_n$, означает существование и самой точечной модели интегрального уравнения (1), т. е. существование передаточной матрицы $W_N(A_v; K_v)$ (10) рассматриваемой динамической системы.

Возникает вопрос: при каких условиях эта матрица будет существовать, обеспечивая алгебраическую связь вектора входа $\bar{U}_n$ (4б), с вектором выхода $\bar{X}_n$ (4а) в форме точечной модели (11) динамической системы (1). Может быть доказана следующая теорема – теорема о существовании точечной модели линейной динамической системы (о существовании решения соответствующей задачи Коши для уравнения (2)).

Теорема 1. Если матричная функция $[\lambda_0 A(\tau) + E_n] = [\lambda_0 A(\tau) + E_n]$, $(n \times n)$, $\tau \in [0, 1]$ (14) с матрицей $A(\tau)$ $(n \times n)$ – системной матрицы динамической системы (2), при некотором $T > 0$ и всяком N (всяком $\lambda_0 = T/2N > 0$) окажется положительно определенной [3], то будет существовать точечная модель (11) такой системы с передаточной матрицей $W_N(A_v; K_v)$ (10), т. е. представление вектора $\bar{X}_n$, как точечного изображающего вектора решения функционального уравнения (2), описывающего поведение системы на отрезке $[0, 1]$ (на временном отрезке $[0, T]$).

Доказательство: положительная определенность матрицы (14) означает положительную определенность квадратичной формы, построенной на этой матрице, т. е. выполнение условия:

$$([\lambda_0 A(\tau) + E_n] \eta, \eta) = \lambda_0 (A(\tau) \eta, \eta) + \|\eta\|_2^2 > 0$$

при всяком ненулевом n -векторе η . Оно будет выполняться, если все угловые миноры матрицы (14),

включая и ее определитель, будут положительными (Критерий Сильвестра) [6]. Таким образом, положительная определенность матрицы (14) означает ее невырожденность и, следовательно, существование обратной матрицы $[\lambda_0 A(\tau) + E_n]^{-1}$ $\tau \in [0, 1]$ и всех обратных матриц – ее значений в узлах N -сетки I рода:

$$[\lambda_0 A(\tau_v^{(N)}) + E_n]^{-1} = (\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}, \quad (v = \overline{1, N}),$$

а также матриц (8):

$$B_v = (\lambda_0 A_{v+1} + E_n)^{-1} \cdot (\lambda_0 A_v - E_n)^{-1} \quad (v = \overline{1, (N-1)}).$$

Это будет также означать и существование блочных матриц $D_N[(\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}]$ (12) и $T_N^{-1}[B_v]$ (13) и системной матрицей $W_N(A_v; K_v)$ (10), а значит, и существование решения $\bar{X}_n$ точечного уравнения (7) при заданной правой части, как блочного вектора N -вектора.

По этому решению при всяком N и заданном T может быть построено единственное сплайновое (в частности, ступенчатое) представление:

$$Sp_N^0(\bar{X}_n; \tau) = [\bar{X}_n, \bar{\Pi}_N(\tau)] \xleftarrow{T_1} \bar{X}_n$$

– элемента алгебры ASp_n , являющееся гомоморфным π_N -образом вектор-функции $X(\tau)$;

– решения уравнения (2) на отрезке $[0, 1]$ и элемента алгебры AM_N . С ростом N гомоморфное π_N -отображение алгебры AM_N на алгебру ASp_n сплайновых форм нулевой степени становится все ближе к их изометрическому изоморфизму, а элементы $Sp_N^0(\bar{X}_n; \tau)$ из ASp_n будут все точнее представлять элемент $X(\tau)$ из AM_N – единственное решение функционального уравнения (2) [3]. Теорема доказана.

Замечание 1. Для выполнения условия теоремы достаточно положительной определенности на временном отрезке $[0, T]$ матрицы $A(t) = A(T\tau) = A(\tau)$ $\tau \in [0, 1]$, т. е. условия: $(A(\tau)\eta, \eta) > 0$, при всяком n -векторе η , отличном от нулевого и всяком $\lambda_0 = T/2N > 0$.

Замечание 2. Для однородной задачи Коши (2), когда $K \equiv 0$, условие теоремы является необходимым и достаточным для существования единственного решения, определяемого заданным начальным условием $X(0) = X_0 \xrightarrow{T_1} I_n^{(N)} \otimes X_0$ и передаточной матрицей:

$$W_{Nn}(A_v; 0) = T_N^{-1}[B_v] \cdot D_N[(\lambda_0 A_v + E_n)^{-1}] \cdot \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n],$$

имеющей, в этом случае, ранг Nn .

Рассмотрим теперь n -мерную линейную стационарную динамическую систему, как частный вариант системы (1), когда все ее матрицы (5) оказываются постоянными:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX(\tau)}{d\tau} + TA \cdot X(\tau) &= TK \cdot U(\tau); & a) \\ \tau &\in [0, 1] \\ Y(\tau) &= C \cdot X(\tau) + D \cdot U(\tau). & б) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Интегральное уравнение, эквивалентное дифференциальному в (15), имеет вид:

$$X(\tau) + TA \int_0^\tau X(\tau) d\tau = TK \int_0^\tau U(\tau) d\tau + X_0 \quad (16)$$

и решение

$$X(\tau) = T \int_0^\tau e^{-A(\tau-\zeta)^T} \cdot K \cdot U(\zeta) d\zeta + X_0 e^{-A\tau}; \quad \tau \in [0, 1], \quad (17)$$

представляемое при $X_0 = 0$ в виде интеграла свертки матричной функции $e^{-AT\tau}$ ($n \times n$) $\tau \in [0, 1]$ и n -векторной функции $KU(\tau)$.

Найдем точечную модель интегрального уравнения (15) при $X_0 = 0$, которую снова будем рассматривать как модель динамической системы (15), когда $Y(\tau) = X(\tau)$. Это модель (7) в рассматриваемом частном случае, когда матрицы (8) оказываются постоянными:

$$\left. \begin{aligned} A_v &= A(\tau_v^N) = A, (n \times n); \quad K_v = K(\tau_v^N) = K, (n \times q); \quad (v = \overline{1, N}); \quad a) \\ -B_v &= \frac{E_n - \lambda_0 A_v}{E_n + \lambda_0 A_{v+1}} = \frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} = -B, (n \times n); \quad (v = \overline{1, (N-1)}); \quad б) \end{aligned} \right\}$$

а блочные матрицы в (7) получают представления:

$$\left. \begin{aligned} D_N[E_n + \lambda_0 A] &= D_N[E_n + \lambda_0 A] = \\ &= \text{Diag}[(E_n + \lambda_0 A) \vdots \vdots (E_n + \lambda_0 A) \vdots \vdots (E_n + \lambda_0 A)] = \\ &= [E_n \otimes (E_n + \lambda_0 A)]; \quad a) \\ D_N[K] &= D_N[K] = \\ &= \text{Diag}[K \vdots \vdots K \vdots \vdots K] = [E_n \otimes K]. \quad б) \end{aligned} \right\}$$

$$T_N[B_v] = T_N[(-B)] = E_{Nn} + [Z \otimes (-B)] =$$

$$= \begin{bmatrix} E_N & & & \\ (-B)E_N & & & \\ & \ddots & & \\ & & (-B) & E_N \\ & & & \ddots & \\ & & & & (-B) & E_N \end{bmatrix}.$$

Сама же модель получает вид:

$$\begin{aligned} D_N[E_n + \lambda_0 A] \cdot T_N[-B] \cdot \bar{X}_{\Pi} &= \\ = \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot (E_n \otimes K) \cdot \bar{U}_{\Pi} & \\ \text{и, следовательно, будем иметь:} & \\ \bar{X}_{\Pi} = T_N^{-1}[-B] \cdot D_N[E_n + \lambda_0 A]^{-1} \cdot & \\ \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot (E_n \otimes K) \cdot \bar{U}_{\Pi} = & \\ = W_N(A; K) \cdot \bar{U}_{\Pi}. & \end{aligned} \quad (18)$$

Блочная матрица

$$W_N(A; K) = T_N^{-1}[-B] \cdot D_N[E_n + \lambda_0 A]^{-1} \cdot \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] (E_n \otimes K) \quad (19)$$

является, очевидно, передаточной матрицей в рассматриваемом частном случае стационарной динамической системы (15). Она имеет блочную нижнетреугольную структуру, причем из (12) и (13), как частные случаи, следует:

$$\left. \begin{aligned} D_N[E_n + \lambda_0 A]^{-1} &= [E_n \otimes (E_n + \lambda_0 A)^{-1}]; \quad a) \\ T_N^{-1}[-B] &= \sum_{v=0}^{N-1} [Z^v \otimes (-B)^v] = \sum_{v=0}^{N-1} [Z^v \otimes (-B)^v]. \quad б) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Предполагается, естественно, существование обратной матрицы $(E_n + \lambda_0 A)^{-1}$, т. е. выполнение условия теоремы 1 в рассматриваемом частном случае.

Все блочные матрицы в представлении (19) оказываются теплицевыми нижнетреугольными и, следовательно, перестановочными, поэтому (19), учитывая (20), может быть записано в виде:

$$W_N(A; K) = \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot$$

$$\cdot \sum_{v=0}^{N-1} [Z \otimes (-B)]^v \cdot [E_n \otimes (E_n + \lambda_0 A)]^{-1} (E_n \otimes K) = \\ = \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot W_{N\Pi}(A; K),$$

где

$$W_{N\Pi}(A; K) = \sum_{v=0}^{N-1} [Z \otimes (-B)]^v \cdot [E_n \otimes (E_n + \lambda_0 A)]^{-1} (E_n \otimes K). \quad (21)$$

Таким образом, вместо (18) можем написать для $\bar{X}_{\Pi}$:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{\Pi} &= W_N(A; K) \cdot \bar{U}_{\Pi} = \\ &= \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] \cdot W_{N\Pi}(A; K) \cdot \bar{U}_{\Pi}. \end{aligned} \quad (22)$$

Этот блочный вектор есть точечное представление n -вектор функции $X(\tau)$ – интеграла свертки в (16) при $X(0) = X_0 = 0$, ассоциированное с Чебышевской N -сеткой I рода (3 а). Возможно точечное представление этого интеграла, ассоциированное с N -сеткой II рода (3 б). Имеем, следовательно, следующую картину по точечным отображениям:

$$\left. \begin{aligned} T \cdot \int_0^\tau e^{-AT(\tau-\zeta)} \cdot KU(\zeta) d\zeta &= \\ &= X(\tau) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \tau_i \bar{X}_{\Pi} &= [X(\tau_1^{(N)}) \vdots \vdots X(\tau_v^{(N)}) \vdots \vdots X(\tau_N^{(N)})]; \quad a) \\ \tau_{ii} \bar{X}_{\Pi} &= [X(\theta_1^{(N)}) \vdots \vdots X(\theta_v^{(N)}) \vdots \vdots X(\theta_N^{(N)})]. \quad б) \end{aligned}$$

Но, как известно [4,5], смежные блочные точечные изображения связаны между собой соотношением:

$$[(E_n + Z) \otimes E_n] \bar{X}_{\Pi} = 2\bar{X}_{\Pi}, \quad (X_0 = 0).$$

Подставляя сюда представление (22) для $\bar{X}_{\Pi}$, найдем следующее представление для $\bar{X}_{\Pi}$:

$$\bar{X}_{\Pi} = 2\lambda_0 \cdot W_{N\Pi}(A; K) \cdot \bar{U}_{\Pi}. \quad (23)$$

Таким образом, введенная матрица $W_{N\Pi}(A; K)$ (21) со скалярным множителем $2\lambda_0$ играет роль передаточной матрицы, связывая точечный вектор входа $\bar{U}_{\Pi}$, ассоциированный с N -сеткой I рода, и точечный вектор выхода $\bar{X}_{\Pi}$, ассоциированный со смежной с N -сеткой II рода в точечной модели динамической системы (16). Но такого рода функциональное равенство представляется в виде сверточно-го соотношения (17) ($X_0 = 0$), поэтому будем иметь:

$$T \cdot \int_0^{\tau} e^{-AT(\tau-\zeta)} \cdot KU(\zeta) d\zeta = X(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{X}_T = \\ = 2\lambda_0 \sum_{v=1}^N [Z^{v-1} \otimes e^{-AT\tau_v^{(N)}}] (E_n \otimes K).$$

Сравнивая с (23), можно видеть представление (приближенное) для матрицы $W_{NT}(A; K)$ (21):

$$W_{NT}(A; K) = T_N^{-1} [-B] \cdot D_N [(E_n + \lambda_0 A)^{-1}] (E_n \otimes K) = \\ = \sum_{v=0}^{N-1} [Z \otimes (-B)]^v \cdot [E_n \otimes (E_n + \lambda_0 A)]^{-1} (E_n \otimes K) \approx \\ \approx \sum_{v=1}^N [Z^{v-1} \otimes (e^{-AT\tau_v^{(N)}})] (E_n \otimes K),$$

откуда следует равенство теплицевых матриц

$$\sum_{v=1}^N [Z^{v-1} \otimes e^{-AT\tau_v^{(N)}}] =$$

Можно видеть, что элементный блочный N -вектор этой матрицы (это ее первый столбец) есть точечный изображающий вектор матричной экспоненциальной функции $e^{-AT\tau}$, $\tau \in [0, 1]$, ассоциированный с N -сеткой I рода, т. к. оказывается

$$e^{-AT\tau} \xrightarrow{T_1} \text{Colon} [e^{-AT\tau_1^{(N)}} : \dots : e^{-AT\tau_v^{(N)}} : \dots : e^{-AT\tau_N^{(N)}}] = \sum_{v=1}^N [Z^{v-1} \otimes e^{-AT\tau_v^{(N)}}] \cdot \bar{e}_1^{(N)}(E_n). \quad (25)$$

Далее для элементного блочного N -вектора левой теплицевой матрицы в равенстве (24) получим:

$$T_N^{-1} [-B] \cdot D_N [(E_n + \lambda_0 A)^{-1}] \bar{e}_1^{(N)}(E_n) = \\ = (E_n + \lambda_0 A)^{-1} \text{Colon} [E_n : \dots : (-B) : \dots : (-B)^{v-1} : \dots : (-B)^{N-1}] = \\ = (E_n + \lambda_0 A)^{-1} \text{Colon} \left[E_n : \left(\frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} \right) : \dots : \left(\frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} \right)^{v-1} : \dots : \left(\frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A} \right)^{N-1} \right]. \quad (26)$$

Равенство блочных элементных векторов (25) и (26) теплицевых матриц в (24) дает точечное представление для матричной функции $e^{-AT\tau}$.

В [2,5] были рассмотрены и решены задачи об обращении операторных изображений по Лапласу

вида рациональных дробей методом точечных представлений. В частности, были найдены точечные представления временных экспоненциальных оригиналов простейших операторных дробей:

$$F(p; a) = \frac{1}{p+a} \stackrel{\square}{=} e^{-at} \xrightarrow{t=T\tau} e^{-aT\tau} \xrightarrow{T_1} \text{Colon} [e^{-a\lambda_0}, \dots, e^{-a\lambda_0(2v-1)}, \dots, e^{-a\lambda_0(2N-1)}] \approx \\ \approx \frac{1}{1+\lambda_0 a} \cdot \text{Colon} \left[1, \left(\frac{1-\lambda_0 a}{1+\lambda_0 a} \right), \dots, \left(\frac{1-\lambda_0 a}{1+\lambda_0 a} \right)^{v-1}, \dots, \left(\frac{1-\lambda_0 a}{1+\lambda_0 a} \right)^{N-1} \right], \quad (27)$$

т. е. когда параметр « a » принимает различные комплексные значения и когда над операторным изображением $F(p; a)$ и его оригиналом e^{-at} , как функциями параметра « a », производятся аналитические операции, в частности, операция дифференцирования.

Отображения сохраняются и в том случае, когда параметр « a » окажется квадратной матрицей A , ($n \times n$). В этом случае приближенное точечное отображение в (27) становится блочно-матричным и получает вид:

$$F(p; A) = \frac{E_n}{pE_n + A} \stackrel{\square}{=} e^{-At} \xrightarrow{t=T\tau} e^{-AT\tau} \xrightarrow{T_1} \begin{bmatrix} e^{-\lambda_0 A} \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ e^{-\lambda_0 A(2\nu-1)} \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ e^{-\lambda_0 A(2N-1)} \end{bmatrix} \approx (E_n + \lambda_0 A)^{-1} \begin{bmatrix} E_n \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A}\right)^{\nu-1} \\ \dots\dots\dots \\ \vdots \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{E_n - \lambda_0 A}{E_n + \lambda_0 A}\right)^{N-1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Итак, блочно-матричный N -вектор в (28) есть элементный вектор блочной теплицевой матрицы

$$T_N^{-1}[-B] \cdot D_N[(E_n + \lambda_0 A)^{-1}] = \sum_{\nu=0}^{N-1} [Z \otimes (-B)]^{\nu} \cdot [E_n \otimes (E_n + \lambda_0 A)^{-1}],$$

входящей в роли системной в состав передаточной матрицы (19)

$$W_N(A; K) = T_N^{-1}[-B] \cdot D_N[(E_n + \lambda_0 A)^{-1}] \cdot \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] (E_n \otimes K) \quad (29)$$

линейной стационарной динамической системы (16), связывающей, как уже отмечалось, точечные изображения входа $U(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{U}_\Pi$ и выхода $X(\tau) \xrightarrow{T_1} \bar{X}_\Pi$:

$$\bar{X}_\Pi = W_N(A; K) \cdot \bar{U}_\Pi.$$

В общем случае, нестационарной системы (1) введенное понятие передаточной матрицы сохранится, но системные матрицы (12) и (13) в ее составе уже не будут теплицевыми. Это будет нижнетреугольная блочная матрица вида (10), обобщающая вид (29) в стационарном случае

$$W_N(A_v; K_v) = T_N^{-1}[B_v] \cdot D_N[(E_n + \lambda_0 A_v)^{-1}] \cdot \lambda_0 [(E_n + Z) \otimes E_n] D_N[K_v],$$

а также связывающая точечные изображения векторных сигналов входа и выхода (11) (рис. 1.):

$$\bar{X}_\Pi = W_N(A_v; K_v) \cdot \bar{U}_\Pi.$$

Аналогично можно построить точечную модель динамической системы (1), ассоциированную с Чебышевской $2N$ -сеткой II рода

$$\theta_k^{(2N)} = \frac{k}{2N}, \quad (k = \overline{1, 2N}).$$

Так, в частном случае динамической системы, когда n -вектор $X(\tau)$ ее фазовых переменных совпадает с ее вектором выхода $Y(\tau)$, т. е. при $C(\tau) = E_n$ и $D(\tau) \equiv 0$, а также будем предполагать нулевые начальные условия: $X(0) = X_0 = 0$ и $U(0) = U_0 = 0$, точечная модель динамической системы, связывающая блочные точечные векторы входа

$$\bar{U}_{\Pi}^{(2N)} = \text{Colon}[U(\lambda_0) : \dots : U(\lambda_0 k) : \dots : U(\lambda_0 2N)] = \text{Colon}[U_1 : \dots : U_k : \dots : U_{2N}]$$

и выхода

$$\bar{X}_{\Pi}^{(2N)} = \text{Colon}[X(\lambda_0) : \dots : X(\lambda_0 k) : \dots : X(\lambda_0 2N)] = \text{Colon}[X_1 : \dots : X_k : \dots : X_{2N}]$$

определенные в узлах $2N$ -сетки II рода

$$T\theta_k^{(2N)} = \frac{T}{2N} \cdot k = \lambda_0 k, \quad (k = \overline{1, 2N}), \text{ будет совпадать с}$$

моделью для соответствующей $\bar{X}_\Pi^U$ точечного решения рассмотренной ранее задачи при замене в нем $\bar{U}_\Pi$ на $D_{2N}[K_k]U_\Pi^{(2N)}$ с квазидиагональной матрицей вида

$$D_{2N}[K_k] = \text{Diag}[K(\lambda_0) : \dots : K(\lambda_0 k) : \dots : K(\lambda_0 2N)].$$

Ее матричные блоки $K = (\lambda_0 k)$, $(k = \overline{1, 2N})$ имеют размерность $(n \times q)$.

Т. о., получаем точечную модель рассматриваемой динамической системы:

$$D_{2N}[2E_n + \lambda_0 A_k] \cdot T_{2N}[\alpha_k] \cdot \bar{X}_{\Pi}^{(2N)} = [(E_{2N} + Z_{2N}) \otimes E_n] \lambda_0 D_{2N}[K_k] \cdot \bar{U}_{\Pi}^{(2N)},$$

и, следовательно, представление «вход – выход» запишется в виде

$$\bar{X}_{\Pi}^{(2N)} = T_{2N}^{-1}[\alpha_k] \cdot D_{2N}[(2E_n + \lambda_0 A_k)^{-1}] \cdot \lambda_0 [(E_{2N} + Z_{2N}) \otimes E_n] D_{2N}[K_k] \cdot \bar{U}_{\Pi}^{(2N)} \quad (30)$$

в котором введенная блочная матрица

$$W_{2N}(A_k; K_k) = W_{2N}(A_k) \cdot D_{2N}[K_k]$$

при

$$W_{2N}(A_k) = T_{2N}^{-1}[\alpha_k] \cdot D_{2N}[(2E_n + \lambda_0 A_k)^{-1}] \cdot \lambda_0 [(E_{2N} + Z_{2N}) \otimes E_n] \quad (31)$$

будет иметь смысл передаточной матрицы точечной модели системы (2). Заметим, однако, что, по существу, роль передаточной, т. е. системной матрицы в точечной модели рассматриваемой динамической системы, играет выделенная явно блочная матрица $W_{2N}(A_k)$ (31), т. к. лишь она определяется по

блочно точечным значениям $A_k = A(\lambda_0 k)$, $(k = \overline{1, 2N})$, системной матрицы $A(\tau)$ ($n \times n$) в (2).

Отметим еще, что в стационарном случае, когда $A(\tau) = A = \text{Const}$, $\tau \in [0, 1]$ и, следовательно, $A_k = A$, $(k = \overline{1, 2N})$, системная матрица $W_{2N}(A_k)$ (31) точечной модели (30) получает более простой вид блочной нижнетреугольной теплицевой матрицы.

Литература

1. Директор, С. Введение в теорию систем / С. Директор, Р. Рорер: [пер. с англ.] под ред. Н. П. Бусленко. – М.: Мир, 1974. – 464 с.
2. Осипов, В. М. Моделирование линейных динамических систем методом точечных представлений / В. М. Осипов, В. В. Осипов. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 296 с.
3. Осипов, В. М. Положительная определённость и положительность функций. Элементы теории и некоторые приложения / В. М. Осипов, В. В. Осипов. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2008. – 415 с.
4. Осипов, В. В. Точечное моделирование операции свертки / В. В. Осипов // Системы методы технологии. – 2009. – № 4. – С. 56 – 63.
5. Осипов, В. В. О связи точечных представлений функций и их изображений по Лапласу / В. В. Осипов // Вестн. Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та: сб. науч.тр. Вып. 1(34). – Красноярск, 2011. – С. 56 – 62.
6. Мишина, А. П. Высшая алгебра / А. П. Мишина, И. В. Проскуряков; под ред. П. К. Рашевского. – М.: Физматгиз, 1962. – 300 с.