

УДК 519.86

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ ПОВЫШЕНИЯ УРОВНЯ ЗДОРОВЬЯ НАСЕЛЕНИЯ КЕМЕРОВСКОЙ ОБЛАСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОКАЗАТЕЛЯ

*В. В. Мешечкин, Н. И. Богатырева*

### MATHEMATICAL MODELING OF THE PROBLEM CONCERNING INCREASING OF POPULATION HEALTH LEVEL IN KEMEROVO REGION USING INTEGRAL INDICATOR

*V. V. Meshechkin, N. I. Bogatyreva*

Статья посвящена построению и анализу математической модели, описывающей изменение состояния здоровья населения региона и базирующейся на использовании интегрального показателя оценки уровня здоровья. Объектом исследования выступает Кемеровская область, все расчеты проводятся на основе ее статистических данных.

The article is devoted to the building and analysis of mathematical model describing the change in regional state of population health and based on the usage of integral indicator estimating health level. As the research object Kemerovo region appears, all calculations are made on the basis of its statistics.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, оптимальное управление, интегральный показатель.

**Keywords:** mathematical modeling, optimal control, integral indicator.

#### Введение

В настоящее время трудные сами по себе проблемы здравоохранения тесно переплелись с социальными проблемами, проблемами загрязнения окружающей среды, эволюции климата, устойчивого существования экосистем, истощения природных ресурсов и т. д.

В их решении определенную помощь может оказать математическая наука, которая через построение и исследование различных моделей, систем, уравнений может выявить взаимосвязи между разными факторами и дать рекомендации по улучшению общественного здоровья.

Состояние здоровья населения может измеряться различными параметрами (количество пропущенных по болезни рабочих дней, уровень заболеваемости, общая рождаемость, инвалидность и т. д.). В некоторых случаях для его оценки удобно использовать единый критерий – интегральный показатель, одновременно учитывающий комплексное влияние разных факторов и обобщающий информацию о различных аспектах состояния здоровья населения.

В данной работе используется одна из таких формул расчета интегрального показателя оценки здоровья, на основе которой строится модель максимизации общего уровня здоровья в регионе в виде задачи оптимального управления.

#### 1. Методика расчета интегрального показателя состояния общественного здоровья

Качество или эффективность многих систем различного назначения нередко характеризуют одним интегральным показателем (*ИП*). К таким показателям относятся характеристики надежности функционирования многих технических систем, показатели экономической эффективности и окупаемости в экономике, уровни социально-экономического развития регионов, рейтинги в образовании и спорте и др.

Часто *ИП* задают с помощью линейных моделей, согласно которым он определяется взвешенной алгебраической суммой нескольких существенных,

изменяющихся во времени параметров. Достоинством таких моделей является линейная зависимость приращения *ИП* от приращения любого учитываемого им параметра. Кроме переменных параметров или показателей системы (*ПС*), количественно характеризующих соответствующие ее свойства, в выражения для *ИП* входят весовые коэффициенты (веса) этих показателей – неизменные параметры модели. В большинстве случаев линейные алгебраические выражения, задающие класс рассматриваемых многопараметрических моделей *ИП*, имеют вид [4]:

$$ИП = \sum_{i=1}^n K_i \cdot ПС_i, \quad (1)$$

где весовые коэффициенты  $K_i$  принимают положительные значения, если увеличение показателей системы, к которым они относятся, вызывает увеличение *ИП*, или отрицательные, если увеличение *ПС* приводит к уменьшению *ИП*. При этом *ИП* и все *ПС* являются безразмерными величинами, т. е. используются относительные значения *ПС*. Обычно к рассматриваемым моделям предъявляется требование нормированности *ИП*, т. е. модель должна обеспечить изменение *ИП* в заданном интервале [ $ИП_{мин}$ ,  $ИП_{макс}$ ]. В целом подбор значений  $K_i$ , учитывающих требования нормированности *ИП*, обеспечения необходимой чувствительности *ИП* в выбранном интервале его изменения, а также степень важности различных *ПС* для оценки качества рассматриваемой системы, является непростой задачей, решаемой экспертным путем.

Каждое слагаемое выражения (1) определяет долю *ИП* (положительную или отрицательную), вносимую в него *i*-м показателем системы (вклад *i*-го *ПС* в *ИП*). Обычно при изменении любого из *ПС* знак его вклада не меняется. Ограничиваясь рассмотрением этого, характерного для большинства систем случая, представим выражение (1) в обобщенном виде [3]:

$$ИП = A - B + C = \sum_{i=1}^m K_i \cdot PC_i - \sum_{i=m+1}^n K_i \cdot PC_i + C, \quad (2)$$

где  $A$  – сумма вкладов, принимающих только положительные значения,

$B$  – сумма модулей вкладов, принимающих только отрицательные значения,

$C$  – постоянная составляющая (число), которую добавляют в выражение  $ИП$  для реализации необходимого смещения интервала его возможных значений (сделать, например, эти значения только положительными).

Очевидно, максимальное значение  $ИП_{\max}$  достигается в том случае, когда  $A = A_{\max}$  и  $B = 0$ , а минимальное – в случае  $A = 0$  и  $B = B_{\max}$ . Отсюда можно получить величину промежутка изменения  $ИП$ :  $\Delta ИП = ИП_{\max} - ИП_{\min} = A_{\max} + B_{\max}$ . Величины  $A$  и  $B$  можно рассматривать как обобщенные параметры линейной модели  $ИП$  качества систем.

Расчет  $ИП$  производится следующим образом. Вначале выбираем значения  $ИП_{\min}$  и  $ИП_{\max}$  и принимаем  $C + A_{\max} = ИП_{\max}$  и  $C - B_{\max} = ИП_{\min}$ . Промежуток  $[ИП_{\min}, ИП_{\max}]$  в соответствии с рекомендацией экспертов делим на части, пропорциональные вкладам  $BK_i$  показателей  $PC_i$ . При выдаче этой рекомендации эксперты должны указать, сколько процентов от общей суммы вкладов должен составлять каждый  $BK_i$ . Затем, используя средние значения показателей системы  $\overline{PC_i}$ , находим весовые коэффициенты этих показателей:

$$K_i = BK_i / \overline{PC_i}. \quad (3)$$

Последним определяем значение числа  $C$ . Поскольку интервалом изменения  $ИП$  чаще всего берется отрезок  $[0, 1]$ , то среднее значение  $ИП$  равно 0.5. Тогда

$$C = 0.5 - A + B. \quad (4)$$

Таким образом, расчет параметров модели  $ИП$  можно выполнить, пользуясь следующей методикой [6]:

1. Определяется максимально возможное значение промежутка  $\Delta ИП = A_{\max} + B_{\max}$  изменения  $ИП$ .

2. С участием экспертов выполняется разбиение суммы  $A_{\max} + B_{\max}$  на вклады  $BK_i$  параметров системы в эту сумму и согласно выражениям (2) и (4) находят значения величин  $A$  и  $B$  модели  $ИП$  и число  $C$ . Используя средние статистические значения переменных параметров системы в целом, согласно выражению (3) вычисляются значения всех весовых коэффициентов модели.

Анализ причинно-следственных связей основных факторов, влияющих на показатели здоровья населения, показывает, что большинство этих показателей в значительной степени зависит от качества окружающей среды в рассматриваемом регионе, от эффективности работы системы здравоохранения, образа жизни населения и социально-экономических условий жизни [5]. К основным показателям здоровья населения, публикуемым в государственной статистике и зависящим от указанных факторов, можно отнести общую рождаемость

( $ОРЖ$  – характеризует воспроизводство населения), среднюю продолжительность предстоящей жизни при рождении ( $СППЖ$  – расчетный показатель, аккумулирующий повозрастные показатели смертности), заболеваемость (общую заболеваемость по обращениям населения в учреждения здравоохранения –  $ОЗО$ ), первичную инвалидность ( $ПИНВ$ ) и общую смертность ( $ОСМ$ ).

Одна из линейных моделей  $ИП$  общественного здоровья, учитывающая эти показатели, предложена в работах Кирьянова Б. Ф. в целом для Российской Федерации [5, 7]. Она задается следующей зависимостью:

$$ИП = K_{ОРЖ} \cdot ОРЖ + K_{СППЖ} \cdot СППЖ - K_{ОЗО} \cdot ОЗО - K_{ОСМ} \cdot ОСМ - K_{ПИНВ} \cdot ПИНВ + C. \quad (5)$$

Здесь  $K_i$  – весовые коэффициенты  $ПЗ$ , а  $C$  – число, определяемое средним значением  $ИП$  для рассматриваемой модели.

## 2. Расчет интегрального показателя оценки здоровья населения Кемеровской области

На основе представленной выше методики построим модель интегрального показателя здоровья населения для Кемеровской области. При этом возьмем значения используемых в (5) пяти показателей за период 1995 – 2009 гг. (табл. 1). Эти данные ежегодно публикуются в соответствующих статистических сборниках (напр., [8]).

Таблица 1

Значения показателей здоровья населения Кемеровской области за 1995 – 2009 гг.

Год	ОРЖ	СППЖ	ОЗО	ПИНВ	ОСМ
1995	8.9	64.6	679.8	3.77	16.6
1996	8.5	65.9	619.2	4.46	16.1
1997	8.4	66.6	612.0	4.84	15.2
1998	8.7	64.1	597.6	5.13	14.3
1999	8.3	63.1	672.0	4.74	15.7
2000	8.9	62.8	734.6	4.91	16.5
2001	9.4	62.7	708.3	5.23	16.8
2002	9.9	62.0	781.9	5.46	17.5
2003	10.3	61.5	734.7	5.72	18.1
2004	10.5	62.2	741.7	5.95	17.7
2005	10.8	61.6	725.3	6.27	16.1
2006	11.3	63.0	816.9	7.12	17.3
2007	12.1	64.0	828.6	7.96	16.6
2008	13.0	62.4	793.8	8.54	16.3
2009	13.4	62.0	784.3	9.13	16.9

Произведем расчет параметров модели.

В соответствии с общепринятой практикой возьмем интервалом изменения значений  $ИП$  отрезок  $[0, 1]$ , тогда максимально возможное значение промежутка изменения  $ИП$  равно:

$$\Delta ИП = A_{\max} + B_{\max} = 1.$$

С учетом рекомендации экспертов по разбивке  $\Delta ИП$  на вклады  $BK_i$  отдельных показателей здоровья [7], имеем:  $BK_{ОРЖ} = BK_{ПИНВ} = BK_{ОЗО} = 0.25$ ,

$$BK_{ОСМ} = BK_{СППЖ} = 0.125.$$

$$\text{Тогда } A = BK_{ОРЖ} + BK_{СППЖ} = 0.375,$$

$$B = BK_{ПИНВ} + BK_{ОЗО} + BK_{ОСМ} = 0.625,$$

$$C = 0.5 - A + B = 0.75.$$

Средние значения указанных пяти показателей для Кемеровской области на интервале 1995 – 2009 гг. приведены в таблице 2.

Таблица 2

Средние значения показателей здоровья населения Кемеровской области за 1995 – 2009 гг.

Показатель	ОРЖ	СППЖ	ОЗО	ПИНВ	ОСМ
Средние значения	9.95	63.22	709.67	5.72	16.60

По формуле (3) находим значения всех весовых коэффициентов для ПС модели ИП:

$$V_{ОРЖ} = BK_{ОРЖ} / 9.95 = 0.25 / 9.95 = 0.025126,$$

$$V_{СППЖ} = BK_{СППЖ} / 63.22 = 0.125 / 63.22 = 0.001977,$$

$$V_{ОЗО} = BK_{ОЗО} / 709.67 = 0.25 / 709.67 = 0.000352,$$

$$V_{ПИНВ} = BK_{ПИНВ} / 5.72 = 0.25 / 5.72 = 0.043734,$$

$$V_{ОСМ} = BK_{ОСМ} / 16.60 = 0.125 / 16.60 = 0.007529.$$

В результате выражение (5) для модели ИП состояния здоровья населения Кемеровской области с

числовыми оценками всех коэффициентов принимает вид:

$$\begin{aligned} ИП = & 0.025126 \cdot ОРЖ + 0.001977 \cdot СППЖ - \\ & - 0.000352 \cdot ОЗО - 0.007529 \cdot ОСМ - \\ & - 0.043734 \cdot ПИНВ + 0.75. \end{aligned}$$

По этой модели были рассчитаны значения ИП для каждого года (табл. 3).

Таблица 3

Ежегодные значения ИП здоровья населения Кемеровской области за 1995 – 2009 гг.

Год	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ИП	0.57	0.56	0.55	0.55	0.52	0.52	0.51	0.49
Год	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	
ИП	0.50	0.48	0.49	0.43	0.41	0.42	0.41	

Как видно из таблицы, интегральный показатель состояния здоровья населения Кемеровской области в 1995 – 2009 гг. имеет четко выраженную тенденцию к убыванию.

### 3. Построение динамической модели повышения уровня здоровья населения Кемеровской области

Найденный интегральный показатель общественного здоровья количественно оценивает состояние здоровья в Кемеровской области. Поэтому он может быть использован как критерий качества в задаче оптимального управления для повышения уровня здоровья населения.

Для построения этой задачи будем рассматривать промежутки 2001 – 2009 гг., за который имеется более полная статистическая информация о развитии области. Пронумеруем годы индексами  $t = 1, \dots, 9$  и запишем формулу интегрального показателя для произвольного  $t$  следующим образом:

$$\begin{aligned} ИП_t = & 0.025126 \cdot y_t^{ОРЖ} + 0.001977 \cdot y_t^{СППЖ} - \\ & - 0.000352 \cdot y_t^{ОЗО} - 0.007529 \cdot y_t^{ОСМ} - \\ & - 0.043734 \cdot y_t^{ПИНВ} + 0.75, \end{aligned}$$

где  $y_t^{ОРЖ}$  – общая рождаемость,

$y_t^{СППЖ}$  – средняя продолжительность предстоящей жизни при рождении,

$y_t^{ПИНВ}$  – первичная инвалидность,

$y_t^{ОЗО}$  – заболеваемость,

$y_t^{ОСМ}$  – общая смертность (за соответствующий год  $t$ ).

Переменные, от которых зависит интегральный показатель  $ИП_t$ , будем рассматривать в качестве характеристик, описывающих состояние рассматриваемой системы, т. е. ее фазовых переменных.

В качестве управляющих параметров возьмем инвестиции в основной капитал Кемеровской области по различным видам экономической деятельности:

$x_1$  – инвестиции в образование,  
 $x_2$  – инвестиции в здравоохранение,  
 $x_3$  – инвестиции в предоставление социальных, коммунальных и персональных услуг,  
 $x_4$  – инвестиции в промышленность,  
 $x_5$  – инвестиции в сельское хозяйство.

При этом будем считать, что инвестиции вносятся сразу в начале каждого года. Для указания номера

года введем соответствующий индекс времени  $t$ :  
 $x_{it}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Фактические значения управляющих переменных на рассматриваемом промежутке времени приведены в таблице 4. В последнем столбце таблицы указаны суммарные величины инвестиций во все рассматриваемые виды экономической деятельности региона ( $X_t$ ).

Таблица 4

**Инвестиции в основной капитал по различным видам экономической деятельности Кемеровской области (млн руб.)**

Год	$x_{1t}$	$x_{2t}$	$x_{3t}$	$x_{4t}$	$x_{5t}$	$X_t$
2001	260	530	460	12212	453	13915
2002	298	780	530	10800	580	12988
2003	320	870	698	10485	637	13010
2004	448	966	703	9961	722	12800
2005	720	1783	939	13056	1112	17610
2006	1394	1955	1332	9626	2084	16391
2007	1683	1817	1460	11237	2615	18812
2008	2914	3317	1734	9438	2572	19975
2009	2047	2750	1437	7487	1341	15062

Для формулировки закона движения задачи запишем уравнения зависимости показателей здоровья  $y_t^{ОРЖ}$ ,  $y_t^{СППЖ}$ ,  $y_t^{ПИНВ}$ ,  $y_t^{ОЗО}$ ,  $y_t^{ОСМ}$  от инвестиций  $x_{it}$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Чтобы учесть динамический аспект, включим в правые части этих уравнений значения показателей здоровья предыдущего периода времени.

В качестве формы зависимости будем использовать нелинейную функцию типа Кобба-Дугласа, которая в общем случае имеет вид:

$$y = a x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}, a > 0,$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, n,$$

где  $y$  – зависимая переменная,

$x_i$  – независимые переменные.

Оценка коэффициентов производится методом наименьших квадратов (МНК) [1]. В результате получаем следующие уравнения динамики:

$$y_t^j = a_j x_{1t}^{\alpha_{1j}} x_{2t}^{\alpha_{2j}} x_{3t}^{\alpha_{3j}} x_{4t}^{\alpha_{4j}} x_{5t}^{\alpha_{5j}} (y_{t-1}^j)^{\beta_j},$$

где  $j$  принимает одно из значений *ОЗО*, *ПИНВ*, *ОСМ*, *ОРЖ*, *СППЖ*.

Величины оценок параметров этих уравнений, найденные с помощью МНК, представлены в таблице 5 (значения индексов  $j$  для простоты опущены).

Таблица 5

**Оценки параметров уравнений движения**

Показатель	$a$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\beta$
ОСМ	0.967	0.002	0	0.004	0	0	0.994
ПИНВ	0.009	0	0.226	0.143	0.381	0	0.250
СППЖ	0.959	0.003	0	0	0.007	0.001	0.989
ОЗО	0.465	0	0.067	0.119	0.165	0.018	0.631
ОРЖ	0.402	0	0	0.073	0.091	0.001	0.835

В силу рекуррентного характера полученных соотношений, к ним необходимо добавить начальные условия вида:  $y_0^j = L_j$ ,

где  $L_j$  – заданный исходный уровень соответствующего показателя здоровья.

В рассматриваемой задаче в качестве уровней  $L_j$  выбираются фактические значения ПЗ начального (2000-го) года (табл. 1).

Сумма инвестиций, выделяемых в различные виды экономической деятельности региона в каждый год  $t$ , должна быть ограничена сверху значением  $X_t$  (берется из таблицы 4). Отсюда получаем условие следующего вида:

$$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + x_{4t} + x_{5t} \leq X_t.$$

Кроме того, будем считать, что в связи с необходимостью осуществления всех форм экономической активности, инвестиции в каждый из видов деятельности региона не должны быть меньше некоторого минимального установленного значения:

$$x_{it} \geq x_{i\min}.$$

Минимальные значения  $x_{i\min}$ , которые могут принимать инвестиции на каждом шаге, определяются экспертным путем, исходя из установок социально-экономического развития региона.

На роль критерия качества возьмем требование максимизации уровня здоровья населения области, оцениваемого через интегральный показатель, к концу планового периода:

$$ИП_T \rightarrow \max$$

при  $T = 9$ .

Объединяя все приведенные выше соотношения, окончательно получаем следующую математическую модель:

$$y_t^{OCM} = 0.967x_{1t}^{0.002}x_{2t}^0x_{3t}^{0.004}x_{4t}^0x_{5t}^0(y_{t-1}^{OCM})^{0.994}, \quad (6)$$

$$y_t^{СППЖ} = 0.959x_{1t}^{0.003}x_{2t}^0x_{3t}^0x_{4t}^{0.07}x_{5t}^{0.001}(y_{t-1}^{СППЖ})^{0.989}, \quad (7)$$

$$y_t^{OZO} = 0.465x_{1t}^0x_{2t}^{0.067}x_{3t}^{0.119}x_{4t}^{0.165}x_{5t}^{0.018}(y_{t-1}^{OZO})^{0.631}, \quad (8)$$

$$y_t^{ОРЖ} = 0.402x_{1t}^0x_{2t}^0x_{3t}^{0.073}x_{4t}^{0.091}x_{5t}^{0.001}(y_{t-1}^{ОРЖ})^{0.835}, \quad (9)$$

$$y_t^{ПИНВ} = 0.009x_{1t}^0x_{2t}^{0.226}x_{3t}^{0.143}x_{4t}^{0.381}x_{5t}^0(y_{t-1}^{ПИНВ})^{0.25}, \quad (10)$$

$$y_0^{OCM} = 16.5, \quad y_0^{СППЖ} = 62.8, \quad (11)$$

$$y_0^{OZO} = 690.2, \quad y_0^{ОРЖ} = 8.9, \quad (11)$$

$$y_0^{ПИНВ} = 4.91, \quad (11)$$

$$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + x_{4t} + x_{5t} \leq X_t, \quad (12)$$

$$x_{it} \geq x_{i\min}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad t = 1, \dots, T, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} ИП_T = & 0.025126 \cdot y_T^{ОРЖ} + 0.001977 \cdot y_T^{СППЖ} - \\ & - 0.000352 \cdot y_T^{OZO} - 0.007529 \cdot y_T^{OCM} - \\ & - 0.043734 \cdot y_T^{ПИНВ} + 0.75 \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (14)$$

Эта задача является задачей оптимального управления с дискретным временем и терминальным критерием качества. Фазовыми переменными в ней являются показатели здоровья, а управляющими переменными – инвестиции в основной капитал по различным видам экономической деятельности Кемеровской области.

Соотношения (6) – (10) являются уравнениями движения. Условия (11) задают начальное состояние

системы. Неравенства (12) – (13) представляют собой ограничения на управляющие параметры задачи. Выражение (14) является критерием качества модели, и, исходя из его вида, можно говорить о задаче оптимизации конечного состояния (задаче оптимального управления в форме Майера) [2].

Таким образом, совокупность выражений (6) – (14) представляет собой модель оптимального управления для повышения уровня общественного здоровья в Кемеровской области.

#### 4. Решение задачи повышения уровня здоровья населения Кемеровской области

Для решения задачи (6) – (14) будем использовать метод динамического программирования, опирающийся на принцип оптимальности Беллмана [9].

Предварительно определим минимальные значения инвестиций в условии (13) следующим образом:

$$x_{1\min} = 260, \quad x_{2\min} = 530, \quad x_{3\min} = 460,$$

$$x_{4\min} = 6800, \quad x_{5\min} = 453.$$

При этом выборе учитывалась информация о минимумах соответствующих величин за рассматриваемый промежуток времени и значения подбились так, чтобы

$$\sum_{i=1}^5 x_{i\min} \leq \min_t X_t. \quad (15)$$

Применение метода динамического программирования к задаче (6) – (14) приводит к построению уравнения Беллмана с краевыми условиями следующего вида:

$$\begin{aligned} V(y_T, T) \equiv ИП_T = & 0.025126 \cdot y_T^{ОРЖ} + \\ & + 0.001977 \cdot y_T^{СППЖ} - 0.000352 \cdot y_T^{OZO} - \\ & - 0.007529 \cdot y_T^{OCM} - 0.043734 \cdot y_T^{ПИНВ} + 0.75, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} V(y_t, t) = & \max_{x_{t+1} \in U_{t+1}} (V(f(y_t, x_{t+1}), t+1)), \\ t = & 0, \dots, T-1, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $f(y_t, x_{t+1})$  – вектор-функция фазовых скоростей, определяемых правыми частями уравнений движения (6) – (10).

Допустимое множество  $U_t$  в (17) для каждого  $t$  задается системой неравенств:

$$x_{1t} + x_{2t} + x_{3t} + x_{4t} + x_{5t} \leq X_t,$$

$$x_{it} \geq x_{i\min}, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Решение задачи (6) – (14) с помощью соотношений (16), (17) дает оптимальное (в смысле критерия (14)) управление и оптимальную траекторию развития региона, а также определяет максимальное конечное значение интегрального показателя здоровья населения Кемеровской области. Полученные результаты приведены в таблице 6.

Таблица 6

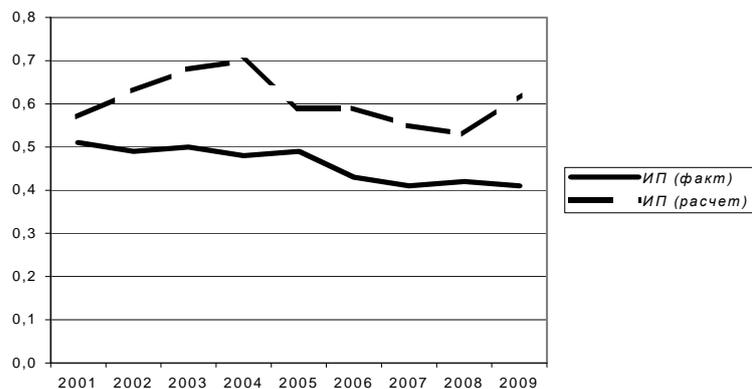
## Результаты вычислений для задачи повышения уровня здоровья населения

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Управляющие переменные</i>										
$x_{1t}$	–	260	280	346	380	398	520	635	799	830
$x_{2t}$	–	660	623	624	616	3182	2648.6	3762	3995	2559
$x_{3t}$	–	2783	2577	2516	2440	3384	3018.2	3062	3995	2012
$x_{4t}$	–	7428	6909	6921	6804	7123	6926	7589	7191	6947
$x_{5t}$	–	2783	2597	2602	2560	3522	3278.2	3762	3995	2712
<i>Фазовые переменные</i>										
$y_t^{ОЗО}$	690.2	573.3	496.8	452.7	423.7	477.9	499.5	536	576.3	532.9
$y_t^{ПИНВ}$	4.91	5.39	5.24	5.19	5.1	7.86	8.17	9.27	9.87	8.11
$y_t^{ОСМ}$	16.5	16.37	16.25	16.13	16	15.9	15.84	15.76	15.7	15.6
$y_t^{СППЖ}$	62.8	62.77	62.73	62.72	62.73	62.78	62.86	63	63.23	63.39
$y_t^{ОРЖ}$	8.9	10	11	11.9	12.7	13.7	14.5	15.3	16.3	16.2
<i>Значения интегрального показателя</i>										
$ИП_t$	–	0.57	0.63	0.68	0.7	0.59	0.59	0.55	0.53	0.62

Таблица 6 показывает, каким образом должны быть распределены инвестиции в различные виды экономической деятельности области, чтобы улучшить состояние общественного здоровья.

На рис. 1 представлен график фактических значений интегрального показателя и график значений  $ИП$ , полученных в результате решения задачи максимизации.

Из рисунка видно, что значения интегрального показателя, полученные в результате решения задачи повышения уровня общественного здоровья, больше фактических значений не только в конечный момент времени, но и на протяжении всего рассматриваемого промежутка.

Рис. 1. График фактических и расчетных значений  $ИП$ 

### 5. Моделирование изменения уровня здоровья населения при различных вариантах развития Кемеровской области

Построив динамическую модель максимизации интегрального показателя здоровья населения Кемеровской области и разработав метод ее решения, можно изучить, как будет вести себя  $ИП$  в тех случаях, когда условия в регионе каким-либо образом будут меняться.

Например, можно проанализировать, какие последствия для здоровья населения вызовет увеличение или уменьшение общего финансирования области или изменение нормативов долей инвестиций в различные виды деятельности, определяемых их нижними уровнями  $x_{i\min}$ .

**Вариант А.** Пусть суммарные ежегодные инвестиции в основной капитал Кемеровской области увеличатся на 10 % от величин, принятых в условии задачи (6) – (14). Заметим, что при этом (как и во

всех рассматриваемых далее случаях) условие (15) должно быть выполнено.

Проведенные с помощью метода динамического программирования расчеты показали рост терминального значения  $IIP$  от 0.62 до 0.65. Найденные для рассматриваемого варианта оптимальные фазо-

вые переменные и управляющие параметры, а также получившиеся значения интегрального показателя здоровья населения Кемеровской области представлены в таблице 7.

Таблица 7

### Результаты вычислений для варианта А

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Управляющие переменные</i>										
$x_{1t}$	–	260	280	346	380	774	520	827	878	830
$x_{2t}$	–	3061	1857	1862	1816	2874	2606	3138	3394	2113
$x_{3t}$	–	3888	3475	3276	3267	5874	7606	5138	6394	3676
$x_{4t}$	–	7034	6816	6964	6800	6973	6892	7449	7910	6934
$x_{5t}$	–	2061	1857	1862	1816	2874	3406	4138	3394	3013
<i>Фазовые переменные</i>										
$y_t^{ОЗО}$	690.2	634.6	585.6	554.8	532.8	581.5	630.3	651.4	690.5	634.5
$y_t^{ПИНВ}$	4.91	7.1	7.5	7.6	7.5	9	9.6	9.9	10.7	8.6
$y_t^{ОСМ}$	16.5	16.4	16.3	16.2	16.1	16	16	15.9	15.9	15.8
$y_t^{СППЖ}$	62.8	62.73	62.66	62.64	62.62	62.78	62.86	63.1	63.32	63.49
$y_t^{ОРЖ}$	8.9	10.3	11.5	12.6	13.5	15	16.7	17.9	19.3	19.6
<i>Значения интегрального показателя</i>										
$IIP_t$	–	0.47	0.51	0.54	0.58	0.53	0.53	0.54	0.53	0.65

**Вариант Б.** Пусть суммарные ежегодные инвестиции в основной капитал Кемеровской области пропорционально уменьшатся на 5 %. Найденные с помощью метода динамического программирования оптимальные значения фазовых и управляющих переменных, а также значения  $IIP$  здоровья населения Кемеровской области демонстрируют снижение интегрального показателя общественного здоровья в момент  $T$  со значения 0.62 до 0.60 (табл. 8).

**Вариант В.** Пусть в 2 раза (по сравнению с задачей (6) – (14)) увеличится нижний уровень  $x_{i\min}$  затрат в образование. Тогда, как показывают проведенные расчеты, значение  $IIP$  в момент  $T$  вырастет до величины 0.64 (табл. 9).

Таблица 8

### Результаты вычислений для варианта Б

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Управляющие переменные</i>										
$x_{1t}$	–	260	275	330	365	564	620	790	759	630
$x_{2t}$	–	2543	2467	2271	2227	4041	3114	4574	4795	2291
$x_{3t}$	–	1672	1637	1638	1630	2702	2920	3044	3595	2176
$x_{4t}$	–	6898	6805	6948	6905	7074	7162	6888	7031	6848
$x_{5t}$	–	1843	1152	1171	1032	2345	1754	2574	2795	2361
<i>Фазовые переменные</i>										
$y_t^{ОЗО}$	690.2	579.1	510.5	470.6	444.8	483.4	503.7	533.3	568.5	526.7
$y_t^{ПИНВ}$	4.91	6.6	7	7	6.9	8.7	8.8	9.5	10.1	8
$y_t^{ОСМ}$	16.5	16.3	16.2	16	15.9	15.8	15.7	15.6	15.6	15.5
$y_t^{СППЖ}$	62.8	62.71	62.61	62.55	62.49	62.59	62.68	62.83	62.98	63
$y_t^{ОРЖ}$	8.9	9.7	10.3	10.9	11.4	12.3	13.2	14.1	15	16.2
<i>Значения интегрального показателя</i>										
$IIP_t$	–	0.5	0.52	0.55	0.58	0.52	0.53	0.51	0.49	0.60

Таблица 9

## Результаты вычислений для варианта В

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Управляющие переменные</i>										
$x_{1t}$	–	520	600	615	635	764	720	790	799	830
$x_{2t}$	–	1783	7797	2802	2360	2522	3278	2762	2995	2012
$x_{3t}$	–	2764	2767	1768	2060	5195	3070	5762	5995	3310
$x_{4t}$	–	7064	6805	6817	6800	6850	7243	7004	7191	6896
$x_{5t}$	–	1783	1017	1007	1045	2278	2078	2492	2995	2012
<i>Фазовые переменные</i>										
$y_t^{ОЗО}$	690.2	602.3	544.2	498.6	475.1	524.7	538	581.2	621.1	579.4
$y_t^{ПИНВ}$	4.91	6.61	7	7.4	7.38	7.57	8.94	9.39	9.83	8.22
$y_t^{ОСМ}$	16.5	16.4	16.3	16.2	16.1	16	15.9	15.9	15.8	15.8
$y_t^{СППЖ}$	62.8	62.86	62.89	62.92	62.96	63.1	63.23	63.37	63.55	63.68
$y_t^{ОРЖ}$	8.9	10	11.1	11.6	12.2	13.6	14.5	15.9	17.3	17.7
<i>Значения интегрального показателя</i>										
$ИП_t$	–	0.50	0.53	0.55	0.57	0.54	0.54	0.53	0.54	0.64

Таблица 10

## Результаты вычислений для варианта Г

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Управляющие переменные</i>										
$x_{1t}$	–	260	310	285	364	410	440	520	799	718
$x_{2t}$	–	1660	1767	1768	1060	2032	2648	2502	2995	2359
$x_{3t}$	–	3383	2597	2602	3220	5520	4278	5962	5995	3012
$x_{4t}$	–	6828	6896	6910	6895	7123	6926	7064	7191	6959
$x_{5t}$	–	1783	1416	1444	1260	2522	2098	2762	2995	2012
<i>Фазовые переменные</i>										
$y_t^{ОЗО}$	690.2	610.6	548.6	513.2	486.4	533.1	533.3	591.9	628.3	584.2
$y_t^{ПИНВ}$	4.91	6.61	6.98	7.1	6.53	8.1	8.66	9.2	9.8	8.4
$y_t^{ОСМ}$	16.5	16.39	16.27	16.16	16	15.98	15.91	15.87	15.84	15.76
$y_t^{СППЖ}$	62.8	62.71	62.64	62.57	62.52	62.56	62.59	62.68	62.85	62.97
$y_t^{ОРЖ}$	8.9	10.2	11.1	12	13	14.5	15.6	16.9	18.2	18.4
<i>Значения интегрального показателя</i>										
$ИП_t$	–	0.5	0.53	0.56	0.62	0.58	0.57	0.57	0.56	0.64

**Вариант Г.** Пусть на 20 % увеличится минимальный уровень расходов на здравоохранение. В этом случае результаты расчетов по методу динамического программирования показывают рост терминального значения интегрального показателя здоровья населения от 0.62 до 0.64 (табл. 10).

**Вариант Д.** Пусть на 20 % уменьшится минимально возможное значение инвестиций в промышленность. Тогда вычисления по методу динамического программирования, результаты которых приведены в таблице 11, свидетельствуют об увеличении интегрального показателя здоровья населения в момент  $T$  со значения 0.62 до 0.63.

Таблица 11

## Результаты вычислений для варианта Д

$t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Управляющие переменные</i>										
$x_{1t}$	–	260	305	485	614	704	655	752	897	818
$x_{2t}$	–	2517	1610	1613	1588	3522	3278	3762	4195	3012
$x_{3t}$	–	3783	2597	2602	3560	4522	4278	5762	6095	2454
$x_{4t}$	–	5571	5877	5707	5478	6339	5900	5772	5593	5764
$x_{5t}$	–	1783	2597	2602	1560	2522	2278	2762	3195	2012
<i>Фазовые переменные</i>										
$y_t^{ОЗО}$	690.2	615.3	539.4	494.2	477.2	523.5	541.2	577.9	609.2	550.9
$y_t^{ПИНВ}$	4.91	6.83	6.49	6.33	6.46	8.5	8.7	9.3	9.6	8
$y_t^{ОСМ}$	16.5	16.39	16.27	16.17	16.1	16	15.98	15.94	15.91	15.82
$y_t^{СППЖ}$	62.8	62.62	62.52	62.49	62.47	62.56	62.59	62.65	62.75	62.81
$y_t^{ОРЖ}$	8.9	10	10.9	11.6	12.5	13.7	14.6	15.7	16.7	16.6
<i>Значения интегрального показателя</i>										
$ИП_t$	–	0.49	0.52	0.59	0.62	0.54	0.55	0.54	0.54	0.63

Таким образом, дополнительно проведенные расчеты показывают, что попытки варьировать параметры модели (6) – (14) порождают адекватные отклики. Так, увеличение в условии задачи суммарных ежегодных инвестиций на 10 % от исходного уровня вызвало рост терминального значения  $ИП$  до значения 0.65, а их снижение на 5 % уменьшило интегральный показатель здоровья населения в момент  $T$  до 0.60. Также оказалось, что значение  $ИП$  в момент  $T$  будет возрастать при увеличении минимальной границы расходов на образование или на здравоохранение, а также будет расти при снижении минимума инвестиций в промышленность.

### Заключение

Проведенные исследования продемонстрировали возможность использования интегрального показателя как обобщающей характеристики при построении математических моделей регионального развития в виде задачи оптимального управления, где интегральный показатель выступает в роли критерия качества. В частности, в построенной модели максимизации уровня здоровья населения области он дает комплексную оценку разных аспектов состояния здоровья населения, а управлениями берутся инвестиции в различные сферы экономической активности.

Предложенный подход к применению интегрального показателя может быть использован не только для решения проблем здравоохранения, как это было сделано в данной статье, но и в других сферах деятельности при наличии соответствующих методик расчета и статистического материала.

### Литература

1. Айвазян, С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. Данилов, Н. Н. Основы математической теории оптимальных процессов / Н. Н. Данилов, В. В. Мещечкин. – Кемерово: Кузбассвуиздат, 2004.
3. Кирьянов, Б. Ф. К проблеме определения весовых коэффициентов параметров линейных моделей интегральных показателей качества систем / Б. Ф. Кирьянов // Вестник НовГУ. – 2007. – № 44. – С. 33 – 37.
4. Кирьянов, Б. Ф. К теории построения интегральных показателей качества систем на основе линейных математических моделей / Б. Ф. Кирьянов, Д. В. Кирьянов // Современные наукоемкие технологии. – 2008. – № 4. – С. 73 – 74.
5. Кирьянов, Б. Ф. Математические модели интегрального показателя здоровья населения / Б. Ф. Кирьянов // Фундаментальные исследования. – 2008. – № 9. – С. 99 – 100.
6. Кирьянов, Б. Ф. Методика определения значений параметров моделей интегрального показателя общественного здоровья / Б. Ф. Кирьянов // Охрана здоровья населения – национальный приоритет государственной политики (Сборник научных трудов ННЦ Северо-Западного Отделения РАМН, т. 5). – М.: Медицина, 2006. – С. 125 – 130.
7. Кирьянов, Б. Ф. Усовершенствованные многопараметрические модели интегрального показателя общественного здоровья населения / Б. Ф. Кирьянов, В. А. Медик // Охрана здоровья населения – национальный приоритет государственной политики: сборник научных трудов ННЦ Северо-Западного Отделения РАМН, т. 5. – М.: Медицина, 2006. – С. 67 – 73.

8. Кузбасс, 2010: стат. сб. // Кемеровостат. – Кемерово, 2010.

9. Пропой, А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. – М.: Наука, 1973.