УДК 519.86

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ОБРАЗОВАНИЯ РЕГИОНА ПРИ ПОМОЩИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В КОНТЕКСТЕ УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ

М. В. Косенкова, Е. С. Чернова

RESEARCH OF THE EDUCATIONAL SYSTEM OF REGION USING MATHEMATICAL MODELLING IN THE CONTEXT OF SUSTAINABLE DEVELOPMENT

M. V. Kosenkova, E. S. Chernova

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы» по лоту шифр «2011-1.4-502-004» «Проведение поисковых научно-исследовательских работ в целях развития общероссийской мобильности в области информационно-телекоммуникационных технологий и вычислительных систем» по теме: «Разработка математических моделей, алгоритмов и Web-приложений для поддержки стратегического управления инновационной организацией (государственный контракт № 14.740.11.0965 от 05.05.11).

В статье рассматривается проблема функционирования системы образования с точки зрения контекста устойчивого развития. Построена математическая модель динамики численности групп населения в сфере образования в виде дискретной задачи оптимального управления. Доказана теорема существования оптимальной траектории и предложен метод ее нахождения, формализовано понятие равновесия.

The article considers the problem concerning functioning of educational system in terms of the sustainable development context. Mathematical model of dynamics of numerosity of the population groups in the educational sector is built in the form of discrete optimal control problem. Theorem of existence of optimal trajectory is proved, method of finding of the solution is proposed, concept of balance is formalized.

***Ключевые слова**:* устойчивое развитие, социальная система, оптимальное управление, равновесие, математическое моделирование, система образования.

***Keywords**:* sustainable development, social system, optimal control, balance, mathematical modelling, educational system.

В настоящее время, в связи с присоединением России к Болонскому процессу и сопутствующим переходом к двухуровневой системе высшего образования, реформированием школьного образования, демографическим спадом в РФ, возникают проблемы набора абитуриентов на различные направления подготовки и в целом выбора стратегических направлений развития системы образования с учетом социально-экономических факторов и региональных особенностей.

Под устойчивым развитием в самом общем смысле понимается такое состояние общества, при котором удовлетворяются потребности настоящего поколения без лишения возможности будущих поколений удовлетворять свои потребности. Оно включает в себя не только экономические, но также экологические и социальные составляющие, которые являются основой триединой концепции устойчивого развития [16].

Переход к устойчивому развитию РФ в целом возможен только в том случае, если будет обеспечено устойчивое развитие всех ее регионов [8]. Это предполагает формирование эффективной пространственной структуры экономики страны при соблюдении баланса интересов всех субъектов Российской Федерации, что предопределяет необходимость разработки и реализации программ перехода к устойчивому развитию для каждого региона, а также дальнейшей интеграции этих программ при разработке государственной политики в области устойчивого развития. Проблемы, решаемые в каждом регионе, в значительной степени должны соответствовать федеральным задачам, но при этом необходим учет местных особенностей.

Социальная составляющая устойчивого развития подчеркивает важность сохранения стабильности существующих социальных систем. Устойчивое развитие предполагает создание такой социально-экономической системы, которая обеспечивала бы на долгосрочной основе не только высокий уровень жизни, но и высокий уровень ее качества, т. е. рост реальных доходов, образовательного уровня, улучшения здравоохранения и т. д. Помимо всего перечисленного, устойчивое социальное развитие означает сбалансированное решение демографических проблем [15], к числу которых относятся упадок в численности коренного населения России, демографическое развитие семьи, миграция, высокий уровень смертности и низкий уровень рождаемости, диспропорция в численности городского и сельского населения и др. Важное место среди них занимает проблема образования.

За это десятилетие ожидается резкое, более чем на 40 %, уменьшение числа выпускников школы и соответственное уменьшение приема во все учреждения профессионального образования [11]. В связи

с этим возникает необходимость в определении спроса на учебные места и расчета количества учебных мест для каждого региона, что в значительной мере и определяет уровень образования – один из главных индикаторов уровня жизни. В основу методологии исследования данной глобальной проблемы может быть положено математическое моделирование как способ научного познания, позволяющий охватить все аспекты устойчивого развития [3, 4, 13].

Широкое распространение получили модели формирования учебных групп и прогнозирования числа учащихся, переходящих из одной образовательной категории в другую. Наиболее часто используются регрессионные и в особенности авторегрессионные модели. Кроме того, применяются потоковые модели, а также модели линейного программирования и имитационные модели планирования учебной работы. Поскольку процесс обучения имеет годовой цикл, то широкое распространение получили различные варианты марковской модели. Существуют также работы, в которых рассматривается анализ сочетания классического и дистанционного обучения в школе при помощи систем массового обслуживания. Более полное представление об уровне исследований в рассматриваемой области можно найти в [6].

В Институте прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН в 1995 году были построены структурные модели, показывающие, как будет меняться общая эффективность системы образования при изменении финансового положения при различной структурной политике [7]. При этом выделялось три группы вузов: университеты, обеспечивающие инновационный потенциал; инженерные вузы, ориентированные на поддержание техносферы и социальной структуры; педагогические и медицинские вузы, а также другие институты, готовящие людей массовых профессий. В статье [1] обсуждается проблема экономического анализа роли высшей школы в создании инновационной среды в России.

В данной работе рассмотрим проблему устойчивого функционирования социальной системы образования, где устойчивость понимается через стабилизацию потоков учащихся и выпускников в институциональных структурах системы образования с учетом непрерывности обучения.

С целью моделирования системы образования разобьем население на следующие классы: Q_1 – класс людей, получающих среднее образование, Q_2 – начальное специальное, Q_3 – среднее специальное, Q_4 – высшее, Q_5 – класс людей, не занятых в образовательном процессе.

Будем предполагать, что структура социальной системы остается неизменной на протяжении конечного периода времени [0, *T*], разбитом дискретными точками 0,1,2,…,*T* с шагом дискретизации – один год. Тогда её можно представить в виде ориентированного графа *G=(S,F)* (рис. 1.), где *S* – множество его вершин, соответствующих классам группировки, а *F* – множество дуг. Возможность перехода из класса Q_i в класс Q_j определяется наличием дуги $(i, j) \in F$.

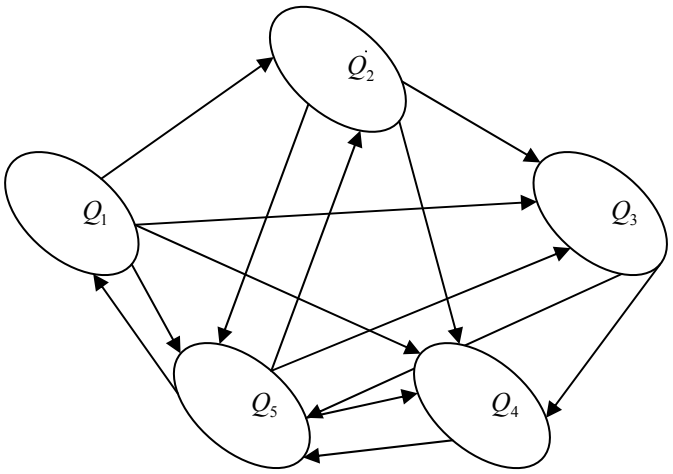

Рис. 1. ***Общая структура системы образования***

Графу *G=(S,F)* поставим в соответствие матрицу

$$A_G = \left\| a_{ij} \right\|_{5\times 5},\ a_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad (i,j) \in F, \\ 0, & \textit{если} \quad (i,j) \notin F \end{cases}$$

и назовем её матрицей смежности для G.

Под динамикой социальной системы будем понимать изменение численности объектов в классах Q_i с течением времени (см. [5, 10]). Обозначим

$x_i(t)$ – численность объектов в классе Q_i в момент времени *t*.

Будем считать, что переход объекта из класса в класс зависит от распределения денежных средств по различным сферам, таким, как образование, поддержка малого бизнеса, содействие занятости населения и т. д.

Тогда $f_{ij}(u(t))$ – численность объектов класса Q_i, переходящих в момент времени *t* в класс Q_j, где $u(t) = (u_1(t),...,u_l(t))$ – это вектор, координаты которого представляют собой инвестиции в соответствующую сферу финансирования.

Тогда в момент времени *t* в терминах матрицы смежности A_G величина $x_i(t)$ определяется следующим образом:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \\ +\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} a_{ji} f_{ji}(u(t)) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} a_{ij} f_{ij}(u(t)) + \gamma_i y(t),$$

$$i = 1,...,5;\ t=1,...,T, \qquad (1)$$

где $y(t) = B(t) - D(t)$, $B(t)$ – прирост населения (естественный и механический), а $D(t)$ – убыль населения (естественная и механическая) в году *t*, которые определяются путем прогнозирования с применением статистических данных региона:

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 5, \\ 0, \text{ если } i = 1,...,4. \end{cases}$$

Соотношение (1) будем называть уравнением динамики социальной системы, или социальным процессом. В начальный момент *t = 0*

$$x_i(0) = x_i^0,\ i = 1,...,5, \qquad (2)$$

где $(x_1^0,...,x_5^0)$ – известное состояние системы в момент *t = 0*.

Предполагается, что

$$\alpha_i^t \le x_i(t) \le \beta_i^t;\ t = 1,...,T;\ \ i = 1,...,5, \qquad (3)$$

где α_i^t, β_i^t – фиксированные числа, выражающие ограничения на численность класса Q_i.

Очевидно, что из класса Q_i не должно выйти объектов больше, чем в этом классе находится. Тогда:

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{5} f_{ij}(u(t)) \le x_i(t-1);\ t = 1,...,T,\ i = 1,...,5. \qquad (4)$$

Так как численность объектов, переходящих из класса Q_i в класс Q_j, не может быть отрицательной, то потребуем выполнения следующих условий:

$$f_{ij}(u(t)) \ge 0, \\ i = 1,...,5;\ \ j = 1,...,5;\ \ t = 1,...,T. \qquad (5)$$

Будем считать, что экспертным путем определено соотношение мест, выделяемых ежегодно на учреждения начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования. Этот факт можно записать в виде следующих соотношений:

$$f_{12}(u(t)) = \lambda_1 f_{13}(u(t)),\ f_{12}(u(t)) = \\ = \lambda_2 f_{14}(u(t)),\ t = 1,...,T,\ \lambda_1,\lambda_2 \in R^1. \qquad (6)$$

Общее количество выпускников учреждений начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования должно быть равно количеству вакантных рабочих мест на момент времени t:

$$f_{25}(u(t)) + f_{35}(u(t)) + f_{45}(u(t)) = \\ = W(u(t)),\ t = 1,...,T, \qquad (7)$$

где $W(u(t))$ представляет собой зависимость количества вакантных рабочих мест от инвестиций в соответствующие сферы, которая при отсутствии финансирования будет принимать нулевое значение.

Кроме того, очевидно, можно предположить, что на момент времени t количество денежных средств, выделяемых на каждую из сфер финансирования, ограничено. Тогда:

$$0 \le u_k(t) \le \delta_k^t,\ k = 1,...,l,\ t = 1,...,T. \qquad (8)$$

Из содержательной интерпретации устойчивого развития региона необходимо задать цель управления системой (1)-(8) на момент времени T, то есть прийти к заданному состоянию системы, которое можно определить при помощи теоретико-игрового подхода (подробнее см. [3, 14]):

$$x_i(T) = x_i^T,\ i = 1,...,5. \qquad (9)$$

Любую последовательность

$$u(\cdot) = \left\{ u(1),...,u(T) \right\},$$

удовлетворяющую условиям (3) – (8), будем называть допустимым управлением системой (1) – (9).

Последовательность $x(\cdot) = \left\{ x(0), x(1),..., x(T) \right\}$ решений системы (1) – (3), (9) соответствующую допустимому управлению $u(\cdot)$, будем называть допустимой траекторией системы (1) – (9).

В качестве критерия эффективности развития рассматриваемой социальной системы возьмем функционал, отражающий суммарную «полезность» региона от функционирования системы образования:

$$J(x^0, u) = \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij} f_{ij}(u(t)) \to \max, \qquad (10)$$

где вектор $u(t)$ составлен из управляющих параметров в момент *t*, а w_{ij} характеризует положительный эффект от перехода одного объекта из класса Q_i в класс Q_j.

Допустимое управление

$$u^*(\cdot) = \left\{ u^*(1),...,u^*(T) \right\},$$

доставляющее максимальное значение критерию (10), будем называть оптимальным управлением, а допустимую траекторию

$$x^*(\cdot) = \left\{ x^*(0), x^*(1),...,x^*(T) \right\},$$

соответствующую оптимальному управлению $u^*(\cdot)$ – оптимальной траекторией системы (1)-(10) [2, 12].

Соотношения (1)-(10) представляют собой математическую модель социальной системы образования в виде дискретной задачи оптимального управления.

Для определения равновесия рассматриваемой социальной системы образования разобьем каждый из приведенных выше классов на группы. Класс Q_1 будет представлен тремя группами: R_1 – учеников первого класса средней школы, R_2 – учеников 2 – 10 классов, R_3 – учеников одиннадцатого класса (выпускников). Аналогично класс Q_3 разобьем на группы:

R_5 – учащихся первого курса в учреждениях среднего профессионального образования,

R_6 – учащихся второго курса,

R_7 – выпускников.

Будем считать, что процесс обучения студентов в высшем учебном заведении является непрерывным, то есть учащиеся, получившие степень бакалавра, поступают в магистратуру. Тогда класс Q_4 будет подразделяться на следующие группы:

R_8 – студентов первого курса в учреждениях высшего профессионального образования,

R_9 – студентов 2 – 5 курсов,

R_{10} – выпускников.

Для приведения обозначений к единой форме переобозначим класс Q_2 людей, получающих начальное специальное образование, через R_4, а класс Q_5 людей, не занятых в образовательном процессе, через R_{11}.

Структура полученной социальной системы представлена на рис. 2.

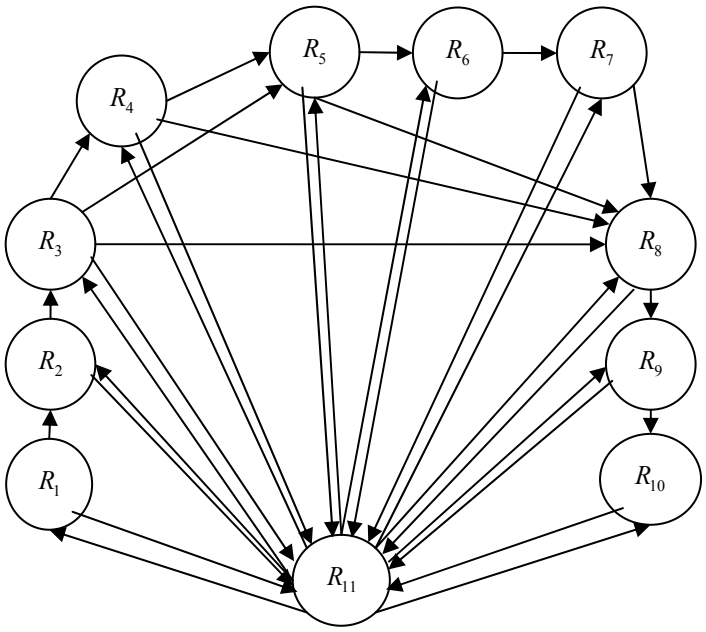

Рис. 2. ***Детализированная структура системы образования***

Обозначим общее количество классов через $m = 11$. Будем предполагать, что функции $f_{ij}(u(t))$, $i, j = 1,...,m$, являются линейными по $u(t)$, то есть:

$$f_{ij}(u(t)) = \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk} u_k(t). \quad (11)$$

Тогда перепишем систему (2)-(10) с учетом новых обозначений:

$$x_i(t) = x_i(t-1) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} a_{ji} \sum_{k=1}^{l} \eta_{jik} u_k(t) -$$

$$-\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk} u_k(t) + \gamma_i y(t),$$

$$i = 1,...,m;\ t=1,...,T, \quad (12)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i = 11, \\ 0, \text{ если } i = 1,...,10. \end{cases}$$

$$x_i(0) = x_i^0,\ i = 1,...,m, \quad (13)$$

$$\alpha_i^t \le x_i(t) \le \beta_i^t;\ t = 1,...,T;\ i = 1,...,m; \quad (14)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{m} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk} u_k(t) \le x_i(t-1);$$

$$t = 1,...,T,\ i = 1,...m; \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk} u_k(t) \ge 0,\ i, j = 1,...,m;\ \ t = 1,...,T; \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{l} \eta_{12k} u_k(t) = \lambda_1 \sum_{k=1}^{l} \eta_{13k} u_k(t),\ \sum_{k=1}^{l} \eta_{12k} u_k(t) =$$

$$= \lambda_2 \sum_{k=1}^{l} \eta_{14k} u_k(t),\ t = 1,...,T, \lambda_1, \lambda_2 \in R^1 \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^{l} \eta_{25k} u_k(t) + \sum_{k=1}^{l} \eta_{35k} u_k(t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{l} \eta_{45k} u_k(t) = W(u(t)),\ t = 1,...,T, \quad (18)$$

$$0 \le u_k(t) \le \delta_k^t,\ k = 1,...,l, t = 1,...,T, \quad (19)$$

$$x_i(T) = x_i^T,\ i = 1,...,m, \quad (20)$$

$$J(x^0, u) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} w_{ij} \eta_{ijk} u_k(t) \to \max. \quad (21)$$

Рассмотрим вопрос существования оптимального решения в задаче (12)-(21). Обозначим множество допустимых значений управляющих параметров в задаче (12)-(21) через U_t, $t = 1,...,T$.

Теорема 1. Пусть в задаче (12)-(21) выполняются следующие условия:

$$\alpha_i^t \le x_i^0 + \gamma_i \sum_{\tau=1}^{t} y(\tau) \le \beta_i^t;\ t = 1,...,T;\ i = 1,...,m;$$

функция $W(u(t))$ линейна. Тогда в задаче (12)-(21) существует оптимальная траектория.

Доказательство. Проверим, что решение $u_k(t) = 0,\ k = 1,...,l,$ является допустимым управлением в момент *t*, т. е. что U_t, $t = 1,...,T$, – непустые множества. Условия (16), (17), (19), очевидно, будут выполняться.

Поскольку количество объектов в группе неотрицательно, то условие (15) также справедливо при $u_k(t) = 0,\ k = 1,...,l$. Равенство (18) будет удовлетворяться в силу того, что при отсутствии финансирования функция $W(u(t))$ принимает нулевое значение.

Рассмотрим фазовые ограничения (14). Перепишем (12) в следующем виде:

$$x_i(t) = x_i^0 + \sum_{\tau=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} a_{ji} \sum_{k=1}^{l} \eta_{jik} u_k(\tau) -$$

$$-\sum_{\tau=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{l} \eta_{ijk} u_k(\tau) + \gamma_i \sum_{\tau=1}^{t} y(\tau),$$

$$i = 1,...,m;\ t = 1,...,T.$$

При $u_k(t) = 0,\ k = 1,...,l$, последнее равенство для $i = 1,...,m;\ t=1,...,T$, запишется следующим образом:

$$x_i(t) = x_i^0 + \gamma_i \sum_{\tau=1}^{t} y(\tau).$$

Тогда ограничения (14) будут выполняться при условиях:

$$\alpha_i^t \le x_i^0 + \gamma_i \sum_{\tau=1}^{t} y(\tau) \le \beta_i^t;\ t = 1,...,T;\ i = 1,...,m,$$

что, очевидно, равносильно условию теоремы.

Кроме того, множества U_t, $t = 1,...,T$, задаются системой нестрогих линейных неравенств, следовательно, являются замкнутыми. Докажем ограниченность этих множеств.

Приведем систему ограничений (14) – (19) к векторно-матричной форме:

$$Au(t) \le \beta^t - x(t-1) - \gamma y(t),$$

$$-Au(t) \le -\alpha^t + x(t-1) + \gamma y(t),$$

$$Hu(t) \le x(t-1),$$

$$\Theta u(t) \ge 0,$$

$$\Lambda_1 u(t) = 0,\ \Lambda_2 u(t) = 0,\ Cu(t) = 0,$$

$$Iu(t) \le \Delta^t,\ u(t) \ge 0,$$

где $u(t) = (u_1(t),...,u_l(t))$,

$x(t-1) = (x_1(t-1),...,x_m(t-1))$,

$\gamma = (\gamma_1,...,\gamma_m)$, $\Delta^t = (\delta_1^t,...,\delta_l^t)$,

$\alpha^t = (\alpha_1^t,...,\alpha_m^t)$, $\beta^t = (\beta_1^t,...,\beta_m^t)$,

$A = \left\| a'_{ik} \right\|_{m\times l}, a'_{ik} = \sum_{j=1}^{m} (a_{ji}\eta_{jik} - a_{ij}\eta_{ijk}),$

$H = \left\| \eta'_{ik} \right\|_{m\times l}, \ \eta'_{ik} = \sum_{j=1}^{m} \eta_{ijk},$

$\Theta^T = (\Theta_1,...,\Theta_m), \ \Theta_i = \left\| q^i_{jk} \right\|_{m\times l},$

$q^i_{jk} = \begin{cases} 0, i = j, k = 1,...,l, i,j = 1,...,m, \\ \eta_{ijk}, i \neq j, k = 1,...,l, i,j = 1,...,m, \end{cases}$

$\Lambda_1 = \left\| \lambda^1_k \right\|_{1\times l}, \ \lambda^1_k = \eta_{12k} - \lambda_1\eta_{13k},$

$\Lambda_2 = \left\| \lambda^2_k \right\|_{1\times l}, \ \lambda^2_k = \eta_{12k} - \lambda_2\eta_{14k},$

$C = \left\| c'_k \right\|_{1\times l}, \ c'_k = \eta_{25k} + \eta_{35k} + \eta_{45k} - c_k,$

I – единичная матрица.

Составим двойственную систему неравенств к полученной системе ограничений:

$A^T p(t) - A^T r(t) + H^T h(t) + \Theta^T z(t) + \Lambda_1^T s(t) +$

$+\Lambda_2^T g(t) + C^T f(t) + I^T d(t) > 0,$

$p(t) \geq 0, r(t) \geq 0, h(t) \geq 0, z(t) \geq 0, d(t) \geq 0,$

где

$p(t) = (p_1(t),...,p_m(t)), r(t) = (r_1(t),...,r_m(t)), h(t) =$

$= (h_1(t),...,h_m(t)), z(t) = (z_1(t),...,z_{m\cdot m}(t)),$

$s(t), g(t), f(t) \in R^1, d(t) = (d_1(t),...,d_l(t))$ – двойственные переменные.

Непустое множество U_t ограничено в том и только в том случае, если двойственная система неравенств совместна. Таким образом, для ограниченности множества, заданного системой (14)-(19), необходимо и достаточно существование векторов

$p(t), r(t), h(t) \in R^m, z(t) \in R^{m\cdot m},$

$s(t), g(t), f(t) \in R^1, d(t) \in R^l$,

удовлетворяющих системе неравенств-ограничений в векторно-матричной форме.

Покажем, что векторы, удовлетворяющие условиям:

$p(t) = r(t), h(t) = 0, z(t) = 0,$

$s(t) = 0, g(t) = 0, f(t) = 0, d(t) > 0$

являются решением двойственной задачи:

$A^T p(t) - A^T r(t) + H^T h(t) + \Theta^T z(t) +$

$+\Lambda_1^T s(t) + \Lambda_2^T g(t) + C^T f(t) + I^T d(t) =$

$= A^T (p(t) - r(t)) + I^T d(t) = I^T d(t) > 0,$

т. е. система ограничений в векторно-матричной форме совместна. Это означает, что множество U_t, $t = 1,...,T$ – ограничено.

Итак, мы доказали, что управление $u \equiv 0$ и соответствующая ему траектория будут допустимыми в задаче с фазовыми ограничениями. Поскольку одно допустимое управление существует, функции в правых частях уравнений (12) непрерывны, функционал качества (21) непрерывен на $R^m \times R^{l\cdot T}$, множество U_t допустимых значений управляющих параметров непусто, замкнуто и ограничено, то задача оптимального управления (12) – (21) будет разрешима, а следовательно, будет существовать оптимальная траектория в этой задаче [12]. Теорема доказана.

Для нахождения решения рассматриваемой задачи воспользуемся методом динамического программирования. Уравнение Беллмана для модели (12)-(21) будет выглядеть следующим образом [2]:

$$\begin{cases} V(t-1,x) = \max\limits_{u(t)\in U_t} \left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{l} w_{ij}\eta_{ijk}u_k(t, x(t-1)) + V(t,x) \right), \\ V(T,x) = 0, \end{cases}$$

где $V(t-1,x)$ – функция Беллмана.

Выполняя последовательные вычисления этапа условной максимизации для $t = T, T-1,...,1$, получим условно-оптимальные управления в виде:

$$u^*(t) = u^*(t, x^*(t-1)). \quad (22)$$

Затем на этапе безусловной максимизации определим оптимальные управления $u^*(\cdot)$ и соответствующую оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$ при помощи уравнений движения (12) и условно-оптимальных управлений по формулам (22). Таким образом, будет найден оптимальный процесс $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ динамики социальной системы, доставляющий максимум функционала качества (21).

Перейдем к формализации понятия равновесия. Под равновесием рассматриваемой социальной системы будем понимать такое ее состояние, при котором:

1. Количество учащихся, поступивших в образовательное учреждение, должно по истечению установленного срока быть равно количеству выпускников.

2. Все выпускники 11-х классов средней школы должны поступить в учреждения начального профессионального, среднего профессионального и высшего образования.

Очевидно, данные требования являются достаточно строгими и неосуществимыми на практике, поэтому будем считать, что они выполняются с некоторым минимальным отклонением.

Таким образом, для формализации состояния равновесия социальной системы, описываемой соотношениями (12)-(21), наиболее подходящими являются равенства:

$$x_1(t) = \mu_1 x_3(t + t_1); \ t = 1,...,T - t_1; \quad (23)$$

$$x_5(t) = \mu_2 x_7(t + t_2); \ t = 1,...,T - t_2; \quad (24)$$

$$x_8(t) = \mu_3 x_{10}(t + t_3); \ t = 1,...,T - t_3; \quad (25)$$

$$\mu_4 x_3(t) = x_4(t+1) + x_5(t+1) + x_8(t+1); \ t = 1,...,T-1, \quad (26)$$

где μ_i, $i = 1,...,4$, – коэффициенты отклонения,

t_1, t_2, t_3 – время обучения соответственно в учреждениях среднего, среднего специального и высшего образования.

Определение 1. Оптимальную траекторию $x^*(\cdot)$, вдоль которой выполняются условия (23)-(26) будем называть равновесной траекторией системы (12)-(21).

Рассмотрим условие (23). С учетом (12) получим:

$$x_1(t-1) + \sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11,1k} - \eta_{1,11k} - \eta_{12k}\right)u_k(t) = \mu_1\left(x_3(t+t_1-1) + \sum_{k=1}^{l}\left(\begin{matrix}\eta_{11,3k} + \eta_{2,3k} - \eta_{34k} - \\ -\eta_{35k} - \eta_{38k} - \eta_{3,11k}\end{matrix}\right)u_k(t)\right).$$

Аналогичными последовательными подстановками $x_1(\tau)$, $\tau = t-1,...,0$, и $x_3(\tau)$, $\tau = t+t_1-1,...,0$, из (12) перейдем к соотношению, в обеих частях которого получим функции, зависящие от начальной точки x^0 и управлений u:

$$x_1^0 + \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11,1k} - \eta_{1,11k} - \eta_{12k}\right)u_k(\tau) = \mu_1\left(x_3^0 + \sum_{\tau=1}^{t+t_1}\sum_{k=1}^{l}\left(\begin{matrix}\eta_{11,3k} + \eta_{23k} - \eta_{34k} - \\ -\eta_{35k} - \eta_{38k} - \eta_{3,11k}\end{matrix}\right)u_k(\tau)\right). \quad (27)$$

Применяя данную процедуру подстановки, уравнения (24)-(26) перепишем соответственно в виде:

$$x_5^0 + \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{35k} + \eta_{11,5k} + \eta_{45k} - \eta_{56k} - \eta_{58k} - \eta_{5,11k}\right)u_k(\tau) = \mu_2\left(x_7^0 + \sum_{\tau=1}^{t+t_2}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{67k} + \eta_{11,7k} - \eta_{78k} - \eta_{7,11k}\right)u_k(\tau)\right), \quad (28)$$

$$x_8^0 + \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{38k} + \eta_{48k} + \eta_{58k} + \eta_{78k} + \eta_{11,8k} - \eta_{89k} - \eta_{8,11k}\right)u_k(\tau) = \mu_3\left(x_{10}^0 + \sum_{\tau=1}^{t+t_3}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11,10k} + \eta_{9,10k} - \eta_{10,11k}\right)u_k(\tau)\right), \quad (29)$$

$$\mu_4\left(x_3^0 + \sum_{\tau=1}^{t}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11,3k} + \eta_{23k} - \eta_{34k} - \eta_{35k} - \eta_{38k} - \eta_{3,11k}\right)u_k(\tau)\right) = x_4^0 + \sum_{\tau=1}^{t+1}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{34k} + \eta_{11,4k} - \eta_{45k} - \eta_{48k} - \eta_{4,11k}\right)u_k(\tau) +$$

$$+x_5^0 + \sum_{\tau=1}^{t+1}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{11,5k} + \eta_{45k} + \eta_{56k} - \eta_{58k} - \eta_{5,11k}\right)u_k(\tau) +$$

$$+x_8^0 + \sum_{\tau=1}^{t+1}\sum_{k=1}^{l}\left(\eta_{38k} + \eta_{48k} + \eta_{58k} + \eta_{78k} + \eta_{11,8k} - \eta_{89k} - \eta_{8,11k}\right)u_k(\tau). \quad (30)$$

Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2. Пусть в задаче (12)-(21) $x^*(\cdot)$ – оптимальная равновесная траектория. Тогда порождающие ее управления $u^*(\cdot)$ будут удовлетворять условиям (27)-(30).

Таким образом, при помощи построенной дискретной модели оптимального управления можно определить оптимальное распределение средств в различные сферы финансирования с целью достижения устойчивого состояния функционирования системы образования. Теорема 2 позволяет определить, является ли найденная оптимальная траектория равновесной в смысле определения 1.

Литература

1. Ахромеева, Т. С. Новые направления системного анализа и компьютерного моделирования образовательной стратегии и политики России [Электронный ресурс] / Т. С. Ахромеева, М. А. Капустин, С. А. Кащенко и др. – М. – 2001. – URL: http://www.keldysh.ru/papers/2001/prep89/prep2001_89.html.

2. Данилов, Н. Н. Основы математической теории оптимальных процессов [Текст] / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 219 с.

3. Данилов, Н. Н. Применение математических моделей в исследовании вопросов устойчивого развития региона [Текст] / Н. Н. Данилов, Л. П. Иноземцева // Факторы устойчивого развития регионов России / О. О. Ардасова, С. К. Волков, Н. Н. Данилов и др. – Новосибирск: СИБ-ПРИНТ, 2008. – Р. 1. – С. 11 – 56.

4. Данилов, Н. Н. Устойчивое развитие: методология математических исследований [Текст] / Н. Н. Данилов // Вестник КемГУ. Математика. – 2000. – Вып. 4. – С. 5 – 15.

5. Злобина, С. Л. Исследование математических моделей равновесного и стабильного развития социальных систем [Текст] / С. Л. Злобина: дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. – Кемерово, 2003. – 185 с.

6. Исследование операций: в 2-х томах: [пер. с англ.] [Текст] / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М.: Мир, 1981. – Т. 2. – 677 с.

7. Капица, С. П. Синергетика и прогнозы будущего [Текст] / С. П. Капица, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий // Сер. «Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения». – М.: Наука, 1997. – 285 с.

8. Концепция перехода Российской Федерации к устойчивому развитию [Электронный ресурс]. – URL: http://russia-eu.ru/node/14.

9. Косенкова, М. В. Необходимые и достаточные условия равновесия социальной динамической системы с нелинейным критерием качества [Текст] / М. В. Косенкова // Информационные технологии и математическое моделировании (ИТТМ-2009): материалы VIII Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (12 – 13 ноября 2009 г.) – Томск: ТГУ, 2009. – Ч. 1. – С. 283 – 286.

10. Косенкова, М. В. Построение математической модели социальной системы в виде дискретной задачи оптимального управления [Текст] / М. В. Косенкова // Информационные технологии и математическое моделировании (ИТТМ-2010): материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (19 – 20 ноября 2010 г.) – Томск: ТГУ, 2010. – Ч. 1. – С. 106 – 107.

11. Пресса о проблемах образования (обзор подготовлен пресс-центром министерства). [Электронный ресурс]. – URL: http://ed.informika.ru/min/press/2004/01/pressa/925,print/.

12. Пропой, А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов [Текст] / А. И. Пропой. – М.: Наука, 1973. – 256 с.

13. Чернова, Е. С. Вычисление оптимальной траектории в модели устойчивого развития региона, построенной в форме модифицированной глобальной модели «Мир-3» [Текст] / Е.С. Чернова // Вестник Кемеровского государственного университета: журнал теоретических и прикладных исследований. – 2009. – № 2. – С. 48 – 51.

14. Чернова, Е. С. Методика определения конечного состояния региона как целевой точки устойчивого развития с помощью теоретико-игрового подхода [Электронный ресурс] / Е. С. Чернова // Известия Иркутской государственной экономической академии (Байкальский государственный университет экономики и права). – 2010. – № 6. – URL: http://eizvestia.isea.ru/reader/article.aspx?id=7051.

15. Чернова, Е. С. Об одной модели демографических процессов в Кемеровской области в контексте устойчивого развития [Текст] / Е. С. Чернова // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТТМ-2010): материалы IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием (19 – 20 ноября 2010 г.) – Томск: ТГУ, 2010. – Ч. 1. – С. 161 – 164.

16. Brundtland, G. H. Our common future: The World Commission on Environment and Development [Text] / G. H. Brundtland. – Oxford: Oxford University Press, 1987. – 400 p.