УДК 519.632.4

ОБОСНОВАНИЕ КОРРЕКТНОСТИ НЕЯВНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПОЛИНЕЙНОГО РЕКУРРЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. А.Фомин, Л. Н. Фомина

ARGUMENTATION OF CORRECTNESS OF IMPLICIT ITERATION LINE-BY-LINE RECURRENCE METHOD FOR SOLVING A DIFFERENCE ELLIPTICAL EQUATIONS

A. A. Fomin, L. N. Fomina

Рассматривается матрично-векторная форма записи алгоритма неявного итерационного полинейного рекуррентного метода решения пятидиагональных систем линейных алгебраических уравнений с матрицами положительного типа. Путем пошаговых устойчивых преобразований выводится общий вид и структура результирующего оператора. Приводится обоснование корректности метода.

Matrix –vector form of recording the algorithm of implicit iteration line-by-line recurrence method is proposed for solving five-diagonal matrix systems of linear algebraic equations with a positive type matrixes. Structure of a resultant operator converting original system to the one with an about upside triangular matrix is deduced by means of stepwise stable transformations. Argumentation of correctness of the method is given.

Ключевые слова: разностные эллиптические уравнения, итерационный метод решения, корректность метода.

Keywords: a difference elliptic equations, iteration method, correctness of the method.

Как известно, решение краевых задач тепло- и массопереноса связано с разностной дискретизацией их исходных дифференциальных постановок, что в свою очередь, приводит к возникновению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$A\vec{\Phi} = \vec{f}\,. \tag{1}$$

Здесь A – матрица системы, $\vec{\Phi}$ – искомый вектор решения, $\vec{f}$ – вектор правой части системы. Подобные матрицы обладают высоким порядком и ленточной структурой [1]. Для многомерных задач, полученные таким образом СЛАУ разрешаются, как правило, итерационными методами.

В работах [2, 3] излагаются различные алгоритмы и рассматриваются результаты тестовых расчетов неявного итерационного полинейного рекуррентного метода для случаев, когда A – матрица положительного типа. Данный метод демонстрирует свою высокую эффективность, однако в силу того, что в общем случае записать его в канонической форме [1]

$$P_{k+1}(\vec{\Phi}^{k+1} - \vec{\Phi}^{k}) = \vec{f} - A\vec{\Phi}^{k} \tag{2}$$

не представляется возможным, корректность каждого расчета необходимо фактически доказывать вычислением нормы невязки для очередного приближения решения с учетом оценки нормы обратной матрицы системы. Поэтому в целях теоретической завершенности изложения этого метода представляется необходимым в общем случае обосновать его корректность, то есть показать, что в случае сходимости решения (и, следовательно, выполнении условия $\left\|\vec{\Phi}^{k+1} - \vec{\Phi}^{k}\right\|_{k\to\infty} \to 0$), полученное решение удовлетворяет исходной системе линейных алгебраических уравнений.

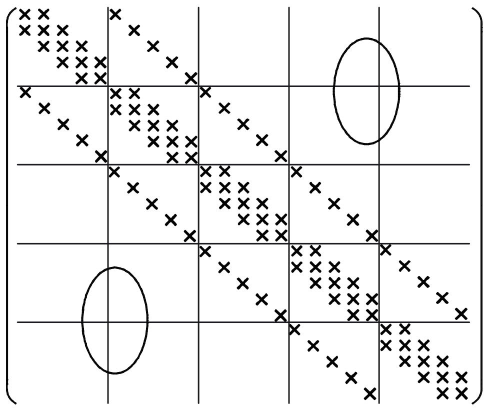

Рис. 1.

Пусть для двумерных задач пятиточечное разностное уравнение имеет следующий вид:

$$a_{P_{ij}}\Phi_{ij} = a_{E_{ij}}\Phi_{i+1j} + a_{W_{ij}}\Phi_{i-1j} + \\ + a_{N_{ij}}\Phi_{ij+1} + a_{S_{ij}}\Phi_{ij-1} + b_{ij},$$

где $1 < i < n, \quad 1 < j < m\,,$ причем $a_P = a_E + a_W + a_S + a_N$. Здесь n, m – количество узлов сеточного разбиения расчетной области по координатам x, y соответственно. Тогда матрица A имеет пятидиагональную структуру (рис. 1). Общее число неизвестных и, следовательно, размерность матрицы A равно числу $N = n\times m$. Как известно, такая матрица может быть разбита на отдельные квадратные клетки, количество которых, для определенности, будет $n\times n$, тогда размерность каждой клетки – $m\times m$. Здесь и далее для наглядности и не в ущерб общности изложения материала выбрана разностная сетка 5×5. Понятно, что в рамках рассматриваемого случая только клетки на диагонали и около диагональные будут отличны от нуля, все остальные – нулевые. Поклеточная структура матрицы A и состав двух клеток (для примера) имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix},$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix} a_{P_{11}} & -a_{N_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ -a_{S_{12}} & a_{P_{12}} & -a_{N_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & -a_{S_{13}} & a_{P_{13}} & -a_{N_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & -a_{S_{14}} & a_{P_{14}} & -a_{N_{14}} \\ 0 & 0 & 0 & -a_{S_{15}} & a_{P_{15}} \end{pmatrix},$$

$$A_{12}=\begin{pmatrix} -a_{E_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_{E_{12}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_{E_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_{E_{14}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a_{E_{15}} \end{pmatrix}.$$

Преобразования СЛАУ начинаются вдоль направления по координате y для j от 1 до m на линии $i = 1$. Первые три уравнения для узлов (1,1), (1,2) и (1,3) имеют следующий вид

$$a_{P_{11}}\Phi_{11} = a_{E_{11}}\Phi_{21} + a_{N_{11}}\Phi_{12} + b_{11}; \quad (3)$$

$$a_{P_{12}}\Phi_{12} = a_{E_{12}}\Phi_{22} + a_{N_{12}}\Phi_{13} + a_{S_{12}}\Phi_{11} + b_{12}; \quad (4)$$

$$a_{P_{13}}\Phi_{13} = a_{E_{13}}\Phi_{23} + a_{N_{13}}\Phi_{14} + a_{S_{13}}\Phi_{12} + b_{13}. \quad (5)$$

Уравнение (3) умножается на отношение $a_{S_{12}} / a_{P_{11}}$ и подставляется в правую часть уравнения (4) вместо третьего слагаемого. После приведения подобных получается соотношение

$$(a_{P_{12}} - a_{N_{11}}a_{S_{12}} / a_{P_{11}})\Phi_{12} = a_{N_{12}}\Phi_{13} + a_{E_{12}}\Phi_{22} + \\ +(a_{E_{11}}a_{S_{12}} / a_{P_{11}})\Phi_{21} + b_{11}a_{S_{12}} / a_{P_{11}} + b_{12}.$$

Переобозначения коэффициентов позволяют переписать последнее уравнение в виде:

$$\alpha_{P_{12}}\Phi_{12} = \alpha_{N_{12}}\Phi_{13} + \alpha_{E_{12}}\Phi_{22} + \alpha_{SE_{12}}\Phi_{21} + \beta_{12}, \quad (6)$$

где $\alpha_{P_{12}} = a_{P_{12}} - a_{N_{11}}a_{S_{12}} / a_{P_{11}}$,

$\alpha_{N_{12}} = a_{N_{12}}$, $\alpha_{E_{12}} = a_{E_{12}}$,

$\alpha_{SE_{12}} = a_{E_{11}}a_{S_{12}} / a_{P_{11}}$, $\beta_{12} = b_{11}a_{S_{12}} / a_{P_{11}} + b_{12}$.

Подобное преобразование проводится и для уравнения с центральным узлом (1,3). Для этого в уравнении (5) исключается слагаемое Φ_{12}, путем подстановки вместо него правой части (6) умноженной на отношение $a_{S_{13}} / \alpha_{P_{12}}$. После приведения подобных получается соотношение

$$(a_{P_{13}} - \alpha_{N_{12}}a_{S_{13}} / \alpha_{P_{12}})\Phi_{13} = a_{N_{13}}\Phi_{14} + \\ +a_{E_{13}}\Phi_{23} + \alpha_{E_{12}}a_{S_{13}} / \alpha_{P_{12}}\Phi_{22} + \\ +\alpha_{SE_{12}}a_{S_{13}} / \alpha_{P_{12}}\Phi_{21} + \beta_{12}a_{S_{13}} / \alpha_{P_{12}} + b_{13}. \quad (7)$$

В матричном виде эти же самые первые два шага преобразований полинейного рекуррентного метода (вывод уравнений (6) и (7)) представляют собой воздействие на исходную систему (1) двух невырожденных операторов $M_{(+)}^{(12)}$ и $M_{(+)}^{(11)}$ [2]:

$$M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}(A\vec{\Phi} - \vec{f}) = 0\,. \quad (8)$$

При этом только диагональные клетки матриц операторов $M_{(+)}^{(11)}$ и $M_{(+)}^{(12)}$ отличны от нуля, из них первые клетки в верхнем ряду имеют следующий вид:

$$M_{11(+)}^{(11)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{S_{12}}/a_{P_{11}} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{11(+)}^{(12)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{S_{13}}/\alpha_{P_{12}} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или, более кратко, структуру:

$$M_{11(+)}^{(11)} = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix}, \quad M_{11(+)}^{(12)} = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix} \quad (9)$$

остальные диагональные клетки – единичные матрицы. Понятно, что матрицы $M_{(+)}^{(11)}$ и $M_{(+)}^{(12)}$ представляют собой частный случай так называемых элементарных нижних треугольных матриц, с помощью которых матрица исходной СЛАУ преобразуется к треугольному виду [4]. Такие матрицы не вырождены, а само преобразование будет устойчивым в силу свойства строчного диагонального преобладания исходной матрицы A. Следовательно, клетки произведения имеют следующую структуру:

$$\left(M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A\right)_{11}=\begin{pmatrix}\times&\times&0&0&0\\0&\times&\times&0&0\\0&0&\times&\times&0\\0&0&\times&\times&\times\\0&0&0&\times&\times\end{pmatrix},$$

$$\left(M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A\right)_{12}=\begin{pmatrix}\times&0&0&0&0\\\times&\times&0&0&0\\\times&\times&\times&0&0\\0&0&0&\times&0\\0&0&0&0&\times\end{pmatrix}.$$

Произведение $M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A$ можно представить в виде суммы $G_{(+)}^{(12)}+L_{(+)}^{(12)}$, причем матрица $L_{(+)}^{(12)}$ состоит из нулей, кроме второй клетки в верхнем ряду, которая имеет всего лишь один ненулевой элемент – коэффициент «внешаблонного» узла [2]:

$$L_{12(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\\times&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

а матрица $G_{(+)}^{(12)}$ содержит все остальные элементы матрицы $M_{(+)}^{(12)}M_{(+)}^{(11)}A$. Используя данное представление, система (8) перепишется в виде:

$$G_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}+L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}=\left[\prod_{j=2}^{1}M_{(+)}^{(1j)}\right]\vec{f}. \qquad (10)$$

При помощи одного из способов аппроксимации значения искомой функции во «внешаблонном» узле производится замена члена уравнения, содержащего его: $L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}\to L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}^{(k)}+\theta B_{(+)}^{(12)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}$, где $\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}=\left(\vec{\Phi}^{(k+1)}-\vec{\Phi}^{(k)}\right)$– приращение решения. При этом алгоритм принимает итерационный характер. Структура матрицы $B_{(+)}^{(12)}$ отражает собственно механизм аппроксимации значения искомой функции во «внешаблонном» узле (2,1) третьего уравнения системы, то есть ее ненулевые элементы являются коэффициентами приближенных преобразований уравнений системы. Так как $B_{(+)}^{(12)}$ умножается на приращение решения $\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}$, то при сходящемся решении данное произведение стремится к нулю.

Вторая клетка в первом ряду матрицы $B_{(+)}^{(12)}$ в случае линейной экстраполяции [2] имеет вид:

$$B_{12(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2\dfrac{\alpha_{SE_{12}}a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}}&\dfrac{\alpha_{SE_{12}}a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}}&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

или, более кратко, структуру

$$B_{12(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&\times&\times&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Все остальные клетки, включая диагональные $B_{ll(+)}^{(12)}$, являются нулевыми матрицами. Очевидно, что то же самое можно сказать и в случае квадратичной экстраполяции [2] с той лишь разницей, что вид второй клетки в первом ряду будет несколько иным. А именно:

$$B_{12(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-3\dfrac{\alpha_{SE_{12}}a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}}&3\dfrac{\alpha_{SE_{12}}a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}}&-\dfrac{\alpha_{SE_{12}}a_{S_{13}}}{\alpha_{P_{12}}}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

или, более кратко, структуру

$$B_{12(+)}^{(12)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&\times&\times&\times&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда понятно, что комбинация $\theta B_{(+)}^{(12)}$, добавленная к матрице $G_{(+)}^{(12)}$, не изменит содержимое диагональных клеток последней. Соответственно элементы матрицы $\theta B_{(+)}^{(12)}$ и последующих подобных матриц в процессе преобразований с помощью элементарных нижних треугольных матриц не будут влиять на элементы главной и двух прилегающих побочных диагоналей итоговой матрицы системы. Следовательно, добавление матрицы $\theta B_{(+)}^{(12)}$ не изменяет свойство вырожденности (не вырожденности) преобразованной СЛАУ.

В итоге, после произведенной замены, уравнение (10) приобретает следующий вид:

$$G_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}^{(k+1)}+\theta B_{(+)}^{(12)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}+ +L_{(+)}^{(12)}\vec{\Phi}^{(k)}=\left[\prod_{j=2}^{1}M_{(+)}^{(1j)}\right]\vec{f}. \qquad (11)$$

Последующее эквивалентное преобразование (11) также выражается в виде воздействия невырожденного оператора $M_{(+)}^{(13)}$, построенного по аналогии (9), на обе части (11), а именно

$$M_{(+)}^{(13)} G_{(+)}^{(12)} \vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta M_{(+)}^{(13)} B_{(+)}^{(12)} \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + M_{(+)}^{(13)} L_{(+)}^{(12)} \vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=3}^{1} M_{(+)}^{(1j)} \right] \vec{f}. \quad (12)$$

Как и на предыдущем шаге алгоритма пусть $M_{(+)}^{(13)} G_{(+)}^{(12)} = G_{(+)}^{(13)} + L_{(+)}^{(13)}$, где матрица $L_{(+)}^{(13)}$ имеет структуру аналогичную $L_{(+)}^{(12)}$, то есть

$$L_{12(+)}^{(13)} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \times 0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}.$$

Замена $L_{(+)}^{(13)} \vec{\Phi}^{(k+1)} \to L_{(+)}^{(13)} \vec{\Phi}^{(k)} + \theta B_{(+)}^{(13)} \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}$ позволяет записать следующее соотношение:

$$G_{(+)}^{(13)} \vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta \left[B_{(+)}^{(13)} + M_{(+)}^{(13)} B_{(+)}^{(12)} \right] \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + \left[L_{(+)}^{(13)} + M_{(+)}^{(13)} L_{(+)}^{(12)} \right] \vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=3}^{1} M_{(+)}^{(1j)} \right] \vec{f}$$

или, при условии $\overline{B}_{(+)}^{(13)} = B_{(+)}^{(13)} + M_{(+)}^{(13)} B_{(+)}^{(12)}$, $\overline{L}_{(+)}^{(13)} = L_{(+)}^{(13)} + M_{(+)}^{(13)} L_{(+)}^{(12)}$,

$$G_{(+)}^{(13)} \vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta \overline{B}_{(+)}^{(13)} \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + \overline{L}_{(+)}^{(13)} \vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=3}^{1} M_{(+)}^{(1j)} \right] \vec{f}. \quad (13)$$

В общем случае для произвольного $j = J$, при увеличении индекса j, на линии $i = 1$ будет иметь место соотношение

$$G_{(+)}^{(1J)} \vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta \overline{B}_{(+)}^{(1J)} \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + \overline{L}_{(+)}^{(1J)} \vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=J}^{1} M_{(+)}^{(1j)} \right] \vec{f}, \quad (14)$$

где $M_{(+)}^{(1J)} G_{(+)}^{(1J-1)} = G_{(+)}^{(1J)} + L_{(+)}^{(1J)}$,

$\overline{B}_{(+)}^{(1J)} = B_{(+)}^{(1J)} + M_{(+)}^{(1J)} \overline{B}_{(+)}^{(1J-1)}$,

$\overline{L}_{(+)}^{(1J)} = L_{(+)}^{(1J)} + M_{(+)}^{(1J)} \overline{L}_{(+)}^{(1J-1)}$.

Окончание прохода по локальному направлению $j = \overline{1, m-1}$ на линии $i = 1$ приводит к итоговому матричному уравнению:

$$G_{(+)}^{(1\,m-1)} \vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta \overline{B}_{(+)}^{(1\,m-1)} \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + \overline{L}_{(+)}^{(1\,m-1)} \vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=m-1}^{1} M_{(+)}^{(1j)} \right] \vec{f}. \quad (15)$$

При этом структуры первой и второй клеток в первом ряду матрицы $G_{(+)}^{(1m-1)}$ и вторых клеток в первом ряду матриц $\overline{L}_{(+)}^{(1\,m-1)}$ и $\overline{B}_{(+)}^{(1\,m-1)}$ будут следующими:

$$G_{11(+)}^{(1\,m-1)} = \begin{pmatrix} \times\times 0\,0\,0 \\ 0 \times\times 0\,0 \\ 0\,0 \times\times 0 \\ 0\,0\,0 \times\times \\ 0\,0\,0\,0 \times \end{pmatrix}, \; G_{12(+)}^{(1\,m-1)} = \begin{pmatrix} \times\, 0\,0\,0\,0 \\ \times\times 0\,0\,0 \\ 0 \times\times 0\,0 \\ 0\,0 \times\times 0 \\ 0\,0\,0 \times\times \end{pmatrix},$$

$$\overline{L}_{12(+)}^{(1\,m-1)} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ \times 0\,0\,0\,0 \\ 0 \times 0\,0\,0 \\ 0\,0 \times 0\,0 \end{pmatrix},$$

$\overline{B}_{12(+)}^{(1\,m-1)} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \times \times 0\,0 \\ 0\,0 \times\times 0 \\ 0\,0\,0 \times\times \end{pmatrix}$ – линейная экстраполяция,

$\overline{B}_{12(+)}^{(1\,m-1)} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \times\times\times 0 \\ 0\,0 \times\times\times \\ 0\,0\,0 \times\times \end{pmatrix}$ – квадратичная экстраполяция.

Аналогичным образом рассматривается проход по локальному направлению на линии $i = 1$ в сторону уменьшения индекса j. Выполнение подобной цепочки преобразований по $j \to 2$ приводит, в итоге, к следующему матричному уравнению

$$G_{(-)}^{(12)} \vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta \overline{B}_{(-)}^{(12)} \Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + \overline{L}_{(-)}^{(12)} \vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=2}^{m} M_{(-)}^{(1j)} \right] \vec{f}, \quad (16)$$

где $M_{(-)}^{(12)} G_{(-)}^{(13)} = G_{(-)}^{(12)} + L_{(-)}^{(12)}$,

$\overline{B}_{(-)}^{(12)} = B_{(-)}^{(12)} + M_{(-)}^{(12)} \overline{B}_{(-)}^{(13)}$,

$\overline{L}_{(-)}^{(12)} = L_{(-)}^{(12)} + M_{(-)}^{(12)} \overline{L}_{(-)}^{(13)}$.

А в общем случае при обратном проходе для произвольного $j = J$ имеют место соотношения $M_{(-)}^{(1J)} G_{(-)}^{(1J+1)} = G_{(-)}^{(1J)} + L_{(-)}^{(1J)}$,

$\overline{B}_{(-)}^{(1J)} = B_{(-)}^{(1J)} + M_{(-)}^{(1J)} \overline{B}_{(-)}^{(1J+1)}$,

$\overline{L}_{(-)}^{(1J)} = L_{(-)}^{(1J)} + M_{(-)}^{(1J)} \overline{L}_{(-)}^{(1J+1)}$.

Структуры первой и второй клеток в первом ряду матрицы $G_{(-)}^{(12)}$ и вторых клеток в первом ряду матриц $\overline{L}_{(-)}^{(12)}$ и $\overline{B}_{(-)}^{(12)}$ будут, соответственно, следующими:

$$G_{11(-)}^{(12)} = \begin{pmatrix} \times & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \end{pmatrix}, \quad G_{12(-)}^{(12)} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \end{pmatrix},$$

$$\overline{L}_{12(-)}^{(12)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{B}_{12(-)}^{(12)} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – линейная экстраполяция,}$$

$$\overline{B}_{12(-)}^{(12)} = \begin{pmatrix} \times & \times & 0 & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 & 0 \\ 0 & \times & \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ – квадратичная экстраполяция.}$$

Здесь еще раз следует обратить внимание на существо переходов

$$L_{(+)}^{(1j)}\vec{\Phi} \to L_{(+)}^{(1j)}\vec{\Phi}^{(k)} + \theta B_{(+)}^{(1j)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}$$

и $L_{(-)}^{(1j)}\vec{\Phi} \to L_{(-)}^{(1j)}\vec{\Phi}^{(k)} + \theta B_{(-)}^{(1j)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)}$,

в которых матрицы $L_{(+)}^{(1j)}$ и $L_{(-)}^{(1j)}$ содержат коэффициенты при неизвестном во «внешаблонном» узле, а матрицы $B_{(+)}^{(1j)}$ и $B_{(-)}^{(1j)}$ выражают собой механизм аппроксимации этого неизвестного через неизвестные в узлах основного шаблона. В качестве таких механизмов ранее были рассмотрены так называемые линейная и квадратичная экстраполяции, хотя понятно, что они не единственные и могут быть другие способы выражения неизвестного во «внешаблонном» узле через неизвестные в узлах основного шаблона [3]. Как будет показано далее, с точки зрения обоснования корректности метода, основным является тот момент, что каков бы не был в общем случае механизм аппроксимации (компенсации), все коэффициенты этого механизма располагаются только в матрицах B. Поэтому в последующих рассуждениях механизм аппроксимации более не детализируется.

В силу совпадения верхних наддиагоналей клеток A_{11} и $G_{11(+)}^{(1\,m\text{-}1)}$ и нижних поддиагоналей клеток A_{11} и $G_{11(-)}^{(12)}$ разность $G_{11(+)}^{(1m-1)} + G_{11(-)}^{(12)} - A_{11}$ представляет собой диагональную клетку с положительными элементами. Тогда понятно, что вычитание из (1), записанного для $\vec{\Phi}^{(k+1)}$, уравнений (15) и (16) позволяет получить систему с «зеркальными» шаблонами [2] на линии $i = 1$

$$\left[G_{(+)}^{(1\,m-1)} + G_{(-)}^{(12)} - A\right]\vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta\left[\overline{B}_{(+)}^{(1\,m-1)} + \overline{B}_{(-)}^{(12)}\right]\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \\ + \left[\overline{L}_{(+)}^{(1\,m-1)} + \overline{L}_{(-)}^{(12)}\right]\vec{\Phi}^{(k)} = \left[\prod_{j=m\text{-}1}^{1} M_{(+)}^{(1j)} + \prod_{j=2}^{m} M_{(-)}^{(1j)} - E\right]\vec{f}. \tag{17}$$

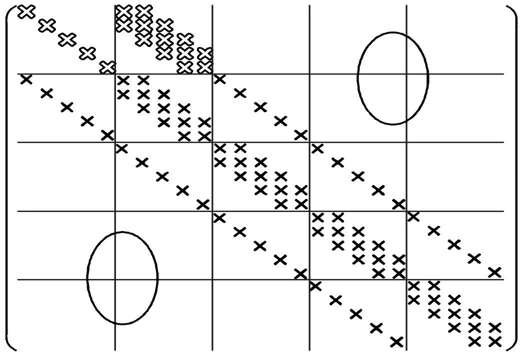

Рис. 2.

При этом структура преобразованной матрицы всей системы (17) примет вид, представленный на рис. 2. Здесь и далее черными крестиками обозначаются не измененные элементы исходной матрицы, а белыми крестиками – преобразованные. Совпадение структур первых двух клеток первых двух рядов говорит о возможности их комбинации с целью обнуления первой клетки второго ряда. Действительно, если обозначить

$$A^{(1)} = \left[G_{11(+)}^{(1m-1)} + G_{11(-)}^{(12)} - A_{11}\right] + \theta\left[\overline{B}_{(+)}^{(1m-1)} + \overline{B}_{(-)}^{(12)}\right],$$

тогда $A_{11}^{(1)} = \left[G_{11(+)}^{(1m-1)} + G_{11(-)}^{(12)} - A_{11}\right]$ в силу равенства нулю диагональных клеток матриц $\overline{B}_{(+)}^{(1m-1)}$ и $\overline{B}_{(-)}^{(12)}$, причем, как уже отмечалось ранее, клетка $A_{11}^{(1)}$ – диагональная матрица, следовательно к ней просто найти обратную матрицу $\left[A_{11}^{(1)}\right]^{-1}$. Далее вводится нижняя треугольная матрица преобразования («деления») $H^{(2)}$, у которой первая клетка второго ряда $H_{21}^{(2)} = -A_{21}\left[A_{11}^{(1)}\right]^{-1}$, все диагональные клетки – единичные матрицы, а остальные клетки – нулевые матрицы. Умножение (17) слева на $H^{(2)}$ и приводит к уравнению вида:

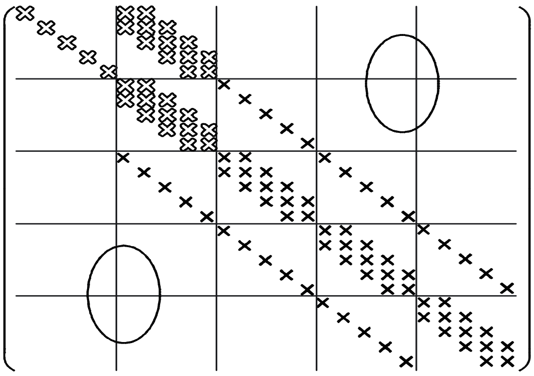

Рис. 3.

$$\left[H^{(2)}G^{(1\,m-1)}_{(+)} + H^{(2)}G^{(12)}_{(-)} - H^{(2)}A\right]\vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta\left[H^{(2)}\bar{B}^{(1\,m-1)}_{(+)} + H^{(2)}\bar{B}^{(12)}_{(-)}\right]\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \left[H^{(2)}\bar{L}^{(1\,m-1)}_{(+)} + H^{(2)}\bar{L}^{(12)}_{(-)}\right]\vec{\Phi}^{(k)} = \left[H^{(2)}\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M^{(1j)}_{(+)} + H^{(2)}\prod_{j=2}^{m}M^{(1j)}_{(-)} - H^{(2)}\right]\vec{f}, \qquad 18)$$

причем структура матрицы уравнения (18) имеет вид, представленный на рис. 3. Поскольку цель проведенных преобразований – изменить структуру клеток во втором ряду по образцу первого со сдвигом на одну клетку вправо и при этом оставить остальные клетки исходной матрицы без изменений, то для этого необходимо скомпоновать уравнения (1), записанное для $\vec{\Phi}^{(k+1)}$, с уравнением (18) таким образом, чтобы в (1) второй ряд клеток был заменен на второй ряд из уравнения (18). Для этого вводятся две диагональные матрицы $E^{(2)}_{(0)}$ и $E^{(2)}_{(p)}$, причем у $E^{(2)}_{(0)}$ почти все диагональные клетки – единичные матрицы, кроме $E^{(2)}_{22(0)}$, которая является нулевой, а у $E^{(2)}_{(p)}$ все наоборот – все диагональные клетки нулевые, кроме $E^{(2)}_{22(p)}$, которая является единичной. Понятно, что $E^{(2)}_{(0)} + E^{(2)}_{(p)} = E$ – тождественный оператор. Полученная при этом сумма:

$$E^{(2)}_{(0)}A\vec{\Phi}^{(k+1)} + E^{(2)}_{(\text{p})}\left[\left(H^{(2)}G^{(1\,m-1)}_{(+)} + H^{(2)}G^{(12)}_{(-)} - H^{(2)}A\right)\vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta\left(H^{(2)}\bar{B}^{(1\,m-1)}_{(+)} + H^{(2)}\bar{B}^{(12)}_{(-)}\right)\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \left(H^{(2)}\bar{L}^{(1\,m-1)}_{(+)} + H^{(2)}\bar{L}^{(12)}_{(-)}\right)\vec{\Phi}^{(k)}\right] = \left[E^{(2)}_{(0)} + E^{(2)}_{(\text{p})}\left(H^{(2)}\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M^{(1j)}_{(+)} + H^{(2)}\prod_{j=2}^{m}M^{(1j)}_{(-)} - H^{(2)}\right)\right]\vec{f}$$

или

$$\left[\left(E^{(2)}_{(0)} - E^{(2)}_{(\text{p})}H^{(2)}\right)A + E^{(2)}_{(\text{p})}H^{(2)}\left(G^{(1\,m-1)}_{(+)} + G^{(12)}_{(-)}\right)\right]\vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta E^{(2)}_{(\text{p})}H^{(2)}\left(\bar{B}^{(1\,m-1)}_{(+)} + \bar{B}^{(12)}_{(-)}\right)\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + E^{(2)}_{(\text{p})}H^{(2)}\left(\bar{L}^{(1\,m-1)}_{(+)} + \bar{L}^{(12)}_{(-)}\right)\vec{\Phi}^{(k)} = \left[\left(E^{(2)}_{(0)} - E^{(2)}_{(\text{p})}H^{(2)}\right) + E^{(2)}_{(\text{p})}H^{(2)}\left(\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M^{(1j)}_{(+)} + \prod_{j=2}^{m}M^{(1j)}_{(-)}\right)\right]\vec{f} \tag{19}$$

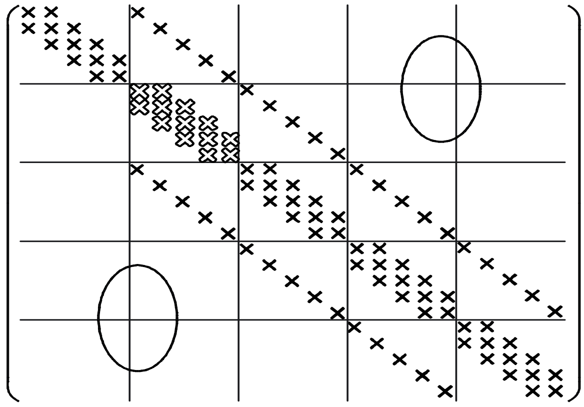

Рис. 4.

представляет собой систему уравнений с матрицей, структура которой представлена на рис. 4. Из вида этой структуры сразу следует вывод о том, что исходная система уравнений разделилась на две подсистемы, первая из которых определяется коэффициентами клеток первого ряда матрицы, а вторая – остальными коэффициентами. При этом, что важно, решение второй подсистемы находится независимо от решения первой. Используя переобозначения

$$\mathcal{G}^{(2)} = \left(E^{(2)}_{(0)} - E^{(2)}_{(p)}H^{(2)}\right)A + E^{(2)}_{(p)}H^{(2)}\left(G^{(1m-1)}_{(+)} + G^{(12)}_{(-)}\right),$$

$$\mathcal{B}^{(2)} = E^{(2)}_{(p)}H^{(2)}\left(\bar{B}^{(1m-1)}_{(+)} + \bar{B}^{(12)}_{(-)}\right),$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = E^{(2)}_{(p)}H^{(2)}\left(\bar{L}^{(1m-1)}_{(+)} + \bar{L}^{(12)}_{(-)}\right),$$

$$\mathcal{M}^{(2)} = \left(E^{(2)}_{(0)} - E^{(2)}_{(p)}H^{(2)}\right) + E^{(2)}_{(p)}H^{(2)}\left(\prod_{j=m\text{-}1}^{1}M^{(1j)}_{(+)} + \prod_{j=2}^{m}M^{(1j)}_{(-)}\right),$$

уравнение (19) окончательно можно переписать в виде

$$\mathcal{G}^{(2)}\vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta\mathcal{B}^{(2)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \mathcal{L}^{(2)}\vec{\Phi}^{(k)} = \mathcal{M}^{(2)}\vec{f}. \tag{20}$$

В заключении выкладок, связанных с линией $i = 1$ следует заметить, что все проведенные преобразования исходной системы представляют собой линейные комбинации уравнений, в которых в качестве сомножителей всегда используются коэффициенты по модулю меньше единицы в силу изначального свойства построчного диагонального преобладания матрицы СЛАУ. Следовательно, проводимые преобразования: 1) устойчивы; 2) сохраняют свойство построчного диагонального преобладания; 3) сохраняют противоположность знаков диагональных и внедиагональных элементов. Иными словами матрица системы (20) $\mathcal{W}^{(2)}(\theta) = \left(\mathcal{G}^{(2)} + \theta\mathcal{B}^{(2)}\right)$ (рис. 4) продолжает оставаться невырожденной. Из проведенных рассуждений также следует еще один очень важный вывод: эквивалентные преобразования группируются в матрицах $\mathcal{G}^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$, $\mathcal{M}^{(2)}$, а приближенные – только в матрице $\mathcal{B}^{(2)}$.

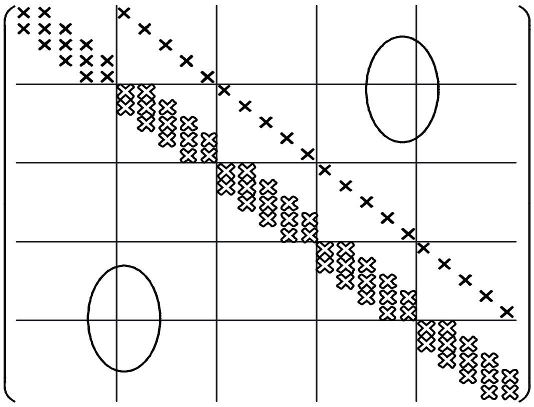

Рис. 5.

Повторение проведенных эквивалентно-приближенных преобразований по всем расчетным линиям $i = \overline{2, n-1}$ (рядам клеток матрицы СЛАУ) приводит к тому, что исходная система преобразуется к виду:

$$\mathcal{G}^{(n)}\vec{\Phi}^{(k+1)} + \theta\,\mathcal{B}^{(n)}\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} + \mathcal{L}^{(n)}\vec{\Phi}^{(k)} = \mathcal{M}^{(n)}\vec{f}, \tag{21}$$

в которой эквивалентные преобразования содержатся в матрицах $\mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{L}^{(n)}$, $\mathcal{M}^{(n)}$, а приближенные только в матрице $\mathcal{B}^{(n)}$, причем матрица $\mathcal{W}^{(n)}(\theta) = \mathcal{G}^{(n)} + \theta\mathcal{B}^{(n)}$ по своей структуре четырехдиагональная и положительного типа (рис. 5), откуда следует последовательно-поклеточная разрешимость полученной системы.

В случае сходимости итерационного процесса имеет место стремление $\Delta\vec{\Phi}^{(k+1)} \to 0$, в результате которого влияние члена, содержащего приближенные преобразования, становится несущественным. Поскольку операторы $\mathcal{G}^{(n)}$, $\mathcal{L}^{(n)}$ и $\mathcal{M}^{(n)}$ – суть чисто эквивалентные преобразования, не меняющие решение исходной системы, то нетрудно путем обратной цепочки преобразований получить явный вид оператора воздействия на первоначальную систему уравнений:

$$\left\{E_{(0)}^{(n)} + E_{(p)}^{(n)}H^{(n)}\left[\left(\prod_{j=m-1}^{1} M_{(+)}^{(n-1j)} + \prod_{j=2}^{m} M_{(-)}^{(n-1j)}\right) - E\right]\right\} \times \left\{E_{(0)}^{(n-1)} + E_{(p)}^{(n-1)}H^{(n-1)}\left[\left(\prod_{j=m-1}^{1} M_{(+)}^{(n-2j)} + \prod_{j=2}^{m} M_{(-)}^{(n-2j)}\right) - E\right]\right\} \times \ldots \times \left\{E_{(0)}^{(2)} + E_{(p)}^{(2)}H^{(2)}\left[\left(\prod_{j=m-1}^{1} M_{(+)}^{(1j)} + \prod_{j=2}^{m} M_{(-)}^{(1j)}\right) - E\right]\right\} \times \left(A\vec{\Phi}^{(*)} - \vec{f}\right) = 0. \tag{22}$$

Понятно, что решение подобной системы является также решением исходной системы (1) поскольку фигурные скобки представляют собой комбинацию невырожденных элементарных нижних и верхних матриц преобразований, которая не приводит к возникновению других дополнительных решений.

На основании проведенных исследований показано, что алгоритм метода путем пошаговых устойчивых преобразований переводит исходную систему уравнений к виду:

$$\mathcal{W}^{(n)}(\theta)\left(\vec{\Phi}^{k+1} - \vec{\Phi}^{k}\right) = \mathcal{R}\left(A\vec{\Phi}^{k} - \vec{f}\right),$$

где $\mathcal{W}^{(n)}(\theta)$ – удобно разрешаемый оператор с четырехдиагональной почти верхнетреугольной матрицей,

$\mathcal{R}$ – оператор невырожденных эквивалентных преобразований (произведение фигурных скобок в (22)),

а θ – итерационный параметр компенсации.

При этом матрицы операторов $\mathcal{W}^{(n)}(\theta)$ и $\mathcal{R}$ выписываются явным образом. Нетрудно видеть, что в этом случае вопрос о корректности метода разрешается естественным образом.

Литература

1. Ильин, В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем [Текст] / В. П. Ильин. – М.: Физматлит. – 1995. – 288 с.
2. Фомина, Л. Н. Использование полинейного рекуррентного метода с переменным параметром компенсации для решения разностных эллиптических уравнений [Текст] / Л. Н. Фомина // Вычислительные технологии. – ИВТ СО РАН. – 2009. – Т. 14. – № 4. – С. 108 – 120.
3. Фомин, А. А. Об одном варианте полинейного рекуррентного метода решения разностных эллиптических уравнений [Текст] / А. А. Фомин, Л. Н. Фомина // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2010. – № 2. – С. 20 – 27.
4. Самарский, А. А. Численные методы [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука. –1989.