УДК 517.545

РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА С ПЕРЕМЕННЫМ ДИВИЗОРОМ

М. В. Комарова

DIMENSIONS OF PRYM DIFFERENTIALS SPACES WITH VARIABLE DIVISORS

M. V. Komarova

Пространства мероморфных абелевых дифференциалов на компактной римановой поверхности с проколами находят применение в теоретической физике и в уравнениях математической физики.

В работе В. В. Чуешева найдены размерности $i_{\rho,k}(D)$ *пространств* $\Omega_{\rho}^{k}(D)$, *состоящих из мероморфных* k *–дифференциалов Прима для характера* ρ, *кратных дивизору D на F, в случае, когда* $\deg D = (2g-2)k$, $k \geq 0, k \in N$.

В данной работе найдены размерности $i_{\rho,k}(D)$ *для любых дивизоров D, как положительных, так и отрицательных переменных степеней.*

Spaces of meromorphic abelian differentials on a compact Riemann surface with punctures find application in theoretical physics and in the equations of mathematical physics.

In V. V. Chuyeshev's work $i_{\rho,k}(D)$ *dimensions of* $\Omega_{\rho}^{k}(D)$ *spaces, consisting of Prym meromorphic* k*-differentials for the character* ρ, *multiple to a divisor D on F, when* $\deg D = (2g-2)k$, $k \geq 0, k \in N$, *have been-found.*

In this article dimensions $i_{\rho,k}(D)$ *for any divisors D for the character* ρ, *both of positive, and negative variable degrees, have been found.*

Ключевые слова*: компактная риманова поверхность, абелевы дифференциалы, дифференциалы Прима для характеров.*

Keywords*: compact Riemann surfaces, abelian differentials, Prym differentials for characters.*

Введение

Пространства мероморфных абелевых дифференциалов на компактной римановой поверхности F с проколами находят применение в теоретической физике и в уравнениях математической физики [1, 2, 3].

В [4] найдены размерности $i_{\rho,k}(D)$ пространств $\Omega_{\rho}^{k}(D)$, состоящих из мероморфных k –дифференциалов Прима для ρ, кратных дивизору D на F, в случае, когда:

$$\deg D = (2g-2)k,\ k \geq 0, k \in N.$$

Цель работы – найти размерности $i_{\rho,k}(D)$ для любых дивизоров D, как положительных, так и отрицательных переменных степеней.

1. Предварительные сведения

Определение 1.1. (Абстрактная) риманова поверхность есть пара (F,Σ), состоящая из комплексно аналитической структуры Σ на двумерной поверхности *F*. Часто для кратности вместо (F,Σ) пишут *F*.

Определение 1.2. Пусть $k \in Z$. Мероморфным k –дифференциалом ω на римановой поверхности F называется закон, сопоставляющий каждой локальной координате *z* на *F* мероморфную функцию $f(z)$ такую, что выражение $f(z)dz^k$ будет инвариантно относительно замен локального параметра z на *F*. Для *k* = 1 такие дифференциалы называются абелевыми [3].

Дивизором на римановой поверхности F называется формальное произведение

$$D = P_1^{n_1}...P_k^{n_k}, P_j \in F, n_j \in Z, j = 1,...,k.$$

Обозначим через *Div(F)* группу дивизоров на *F* с операцией умножения дивизоров. Она является свободной коммутативной группой. Единица в *Div(F)* будет обозначаться 1 (пустой дивизор). Для каждого дивизора *D* определена степень $\deg D = \sum_{j=1}^{k} n_j$.

Степень deg задает гомоморфизм из группы *(Div(F),*) в *(Z,+).* Если $f \in M^*(F)$, т. е. *f* – мероморфная функция на *F*, не являющая тождественным нулем, то определен ее дивизор $(f) = \prod_{P \in F} P^{ord_P f} \in Div(F)$.

Отсюда получаем гомоморфизм () из *M*(F)* в группу $Div_0(F)$ (группу дивизоров степени 0), так как число нулей равно числу полюсов для мероморфной функции (с учетом кратности). Обозначим через *DivH(F)* образ по отображению () для *M*(F*). Дивизоры из *DivH(F)* называют главными, то есть дивизорами для однозначных мероморфных функций на *F*. Фактор–группа $Div(F) \,/\, Div_H(F)$ называется группой классов дивизоров.

Определение 1.3. Два дивизора *D* и *D1* называются линейно эквивалентными (*D* ~ *D1*), если *D/D1* – главный дивизор на *F*.

Для любого дивизора *D* на *F* вводится комплексное векторное пространство $L(D) = \{f \in M(F) : (f) \ge D\}$. $i_k(D) = \dim_C \Omega^k(D)$ Его размерность *r(D*) будем называть размерностью дивизора D. Также для любого $D \in Div(F)$ вводится комплексное векторное пространство $\Omega^k(D)$, состоящее из ω таких, что ω – абелев *k*–дифференциал на *F* с $i_k(D) = \dim_C \Omega^k(D)$ $(\omega) \ge D$. Его размерность $i_k(D) = \dim_C \Omega^k(D)$ называется индексом специальности для дивизора *D* при *k*=1 $i_k(D) = \dim_C \Omega^k(D)$.

Для краткости будем писать $\Omega^1(D) = \Omega(D)$ и $i_1(D) = i(D)$.

Определение 1.4. Отображение Якоби $\phi : F \to J(F)$ определяется по формуле:

$$\phi(P) = {}^t\int_{P_0}^{P} \zeta = {}^t\left(\int_{P_0}^{P} \zeta_1, ..., \int_{P_0}^{P} \zeta_g\right) \in C^g,$$

где P_0 – фиксированная точка на *F* и пути интегрирования берутся одинаковыми для всех координат, а $\zeta_1,...\zeta_g$ – базис голоморфных 1–дифференциалов на *F*, и J*(F)* – многообразие Якоби для *F* [3,5].

Теорема (Римана–Роха) [3,4]. Пусть F – компактная риманова поверхность рода g, g>0. Тогда верно равенство $r(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i(D)$.

Теорема (Г. Абеля) [3]. Пусть $D \in Div(F)$. Тогда *D* – главный дивизор на компактной римановой поверхности *F* рода $g \ge 1$, если и только если deg*D*=0 и $\phi(D) = 0$, где φ – отображение Якоби для *F*.

Определение 1.5. Характером ρ на фундаментальной группе $\pi_1(F)$ для компактной римановой поверхности F называется любой гомоморфизм из группы $\pi_1(F)$ в мультипликативную группу $C^* = C \setminus \{0\}$, поля комплексных чисел *C*.

Опишем, прежде всего, мультипликативные функции *f*, не имеющие ни нулей, ни полюсов. Если *f* – мультипликативная функция на *F* без нулей и полюсов, то $\frac{df}{f}$ – голоморфный абелев дифференциал.

Отсюда $\frac{df}{f} = \sum_{j=1}^{g} c_j \zeta_j$, а значит

$$f(P) = f(P_0) \exp \int_{P_0}^{P} \sum_{j=1}^{g} c_j \zeta_j,$$
$$c_j \in C, j = 1, ..., g.$$

Учитывая выбор канонического базиса $\{\zeta_j\}_{j=1}^{g}$, для канонического гомологического базиса $a_1, ..., a_g, b_1, ..., b_g$ петель на *F* [3], получим, что характер *ρ* для *f* имеет вид:

$\rho(a_k) = \exp c_k, \rho(b_k) = \exp(\sum_{j=1}^{g} c_j \pi_{jk}), k = 1, ..., g,$ где $\pi_{jk} = \int_{b_k} \zeta_j, j, k = 1, ..., g.$ Будем называть такие характеры ρ несущественными, а *f* (с таким характером) – единицей. Характеры, которые не являются несущественными, будем называть существенными на $\pi_1(F)$.

Для любого дивизора D обозначим через $r_\rho(D^{-1})$ и $i_{\rho,k}(D)$ и размерности векторных пространств, состоящих из функций f и (ρ, k) – дифференциалов ω для ρ таких, что $(f) \ge D^{-1}$ и $(\omega) \ge D$ на F соответственно.

Теорема (Римана – Роха для характеров) [3]. Пусть F – компактная риманова поверхность рода $g \ge 1$. Тогда для любого дивизора D на F и любого характера $\rho, \rho \ne 1$, верно равенство:

$$r_\rho(D^{-1}) = \deg D - g + 1 + i_{\rho^{-1}}(D).$$

Определение 1.6. Мероморфным (ρ, k)–дифференциалом Прима на F для ρ называется однозначная мероморфная дифференциальная k –форма $\varphi = \varphi(z)dz^k$ на круге U такая, что

$$\varphi(Tz)(dTz)^k = \rho(T)\varphi(z)dz^k, T \in \Gamma, z \in U, k \in Z,$$

где Γ – фуксова группа первого рода инвариантно действующая в круге U и униформизирующая F в U, т. е. $U/\Gamma=F$.

Теорема (Римана–Роха для (ρ, k)–дифференциалов и характеров) [4]. Для любых g>0 и $k \in Z$ верно равенство

$$i_{\rho,k}(D) = (g-1)(2k-1) - \deg D + i((f)Z^k / D) = (g-1)(2k-1) - \deg D + r((f)Z^{k-1} / D$$

при любом характере ρ на компактной римановой поверхности F рода g, где f – любая мультипликативная функция для ρ, $f\ne 0$, Z– канонический класс дивизоров абелевых дифференциалов на F.

Предложение 1.1 [3]. *Если degD>0, то r(D)=0.*

В частности, если D=1 и ρ – несущественный характер, т. е. существует мультипликативная единица f для ρ, где (f)=1, то при $k > 1$ и $g \ge 2$ верно равенство

$$i_{\rho,k}(1) = (g-1)(2k-1) + r\left(Z^{k-1}\right) = (2k-1)(g-1),$$

так как $\deg Z^{k-1} = (k-1)(2g-2) > 0$.

Предложение 1.2 [3]. *Если* $\deg D = 0$, *то r(D)=1, если D главный и r(D)=0, если D неглавный.*

2. Нахождение размерности $i_{\rho,k}(D)$ для переменного дивизора *D*

Случай deg$D$<0 рассмотрим отдельно.

Предложение 2.1. Для любого дивизора D, – n=degD<0 верно равенство $i_{\rho,k}(D) = (2k-1)(g-1) + n > 0$, для любых характеров ρ, k ≥ 1 и g ≥ 2.

Доказательство. По теореме Римана–Роха для (ρ, k)–дифференциалов верно равенство:

$$i_{\rho,k}(D) = (g-1)(2k-1) - \deg D + r((f)Z^{k-1} / D) = (g-1)(2k-1) + n > 0.$$

Здесь $r\left((f)\dfrac{Z^{k-1}}{D}\right) = 0$, так как

$$\deg(f)\frac{Z^{k-1}}{D} = 0 + (k-1)(2g-2) - \deg D = (k-1)(2g-2) + n > 0.$$

Предложение доказано.

В дальнейшем будем рассматривать любые дивизоры степеней $n = \deg D \ge 0.$

Случай $k=1$. Составим таблицу из $i_{\rho,1}(D)$ для deg $D = n$.

Пусть $n > 2g–2$, тогда имеем $i_{\rho,1}(D) = 0$ при deg $D=2g–2+m$, $m=1,2,\ldots$. Действительно, если существует $\omega \ne 0$ такой, что $(\omega) \ge D$, то $\deg(\omega) \ge \deg D.$ Отсюда получаем, что верно неравенство $2g-2 \ge 2g-2+m.$ Противоречие. Следовательно, в этом случае $i_{\rho,1}(D) = 0$.

Случай $n = 2g – 2$ рассмотрен в таблице 3.1 в [4].

Пусть $0< n <2g – 2$, тогда используя теорему Римана–Роха получим, что

$$i_{\rho,1}(D) = (g-1) - n + r\left(\frac{D_0 Z^0}{D}\right).$$

Если ρ – несущественный характер, то

$$i_{\rho,1}(D) = i(D) = (g-1) - n + r\left(\frac{1}{D}\right),$$

где $D_0 = (f) = 1$ и f – мультипликативная единица для ρ на F.

Если ρ – существенный характер, то $i_{\rho,1}(D) = g - 1 - n + r\left(\frac{D_0}{D}\right)$,

где $D_0 = (f) \neq 1$, f – мультипликативная функция для ρ на F.

Таким образом, с учетом [4], доказана теорема о размерности $i_{\rho,1}(D)$, которую удобно сформулировать в виде таблицы 1.

Таблица 1

Для размерности iρ,1 (D)

g≥2	**deg D = n**	**Несущественный характер**		**Существенный характер**	
	n > 2g - 2	0			
	0 < n < 2g – 2	$g-1-n+r\left(\frac{1}{D}\right)$		$g-1-n+r\left(\frac{D_0}{D}\right)$	
	n = 2g – 2	D~Z	$D \nsim Z$	D~D0Z	$D \nsim D_0 Z$
		1	$r\left(\frac{1}{D}\right)-g+1$	1	$r\left(\frac{D_0}{D}\right)-g+1$

Случай k=2. Составим таблицу из размерностей $i_{\rho,2}(D)$.

Пусть $\deg D = n > (2g-2)2$, тогда имеем $i_{\rho,2}(D) = 0$ при deg $D = (2g – 2)2 + m, m = 1, 2, ...$.

Так как, если существует ω≠0 такое, что $(\omega) \geq D$, то deg(ω) ≥ deg D и $(2g – 2)2 \geq (2g – 2)2 + m$. Противоречие. Следовательно, в этом случае $i_{\rho,2}(D) = 0$.

Пусть $0 < n < 2g – 2$, тогда используя теорему Римана–Роха для (ρ, k)–дифференциалов, получим, что верно равенство

$$i_{\rho,2}(D) = (2\cdot 2-1)(g-1) - \deg D + r\left((f)\frac{Z^{2-1}}{D}\right) = 3(g-1) - n + r\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 3g-3-n,$$

так как

$$\deg\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 0 + (2g-2) - n > 0 \text{ и } r\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 0.$$

При $n = 2g – 2$ имеем

$\deg\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 0 + 2g - 2 + n = 0$, а значит верно равенство $r\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 0$, когда D не эквивалентно $D_0 Z$ и $r\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 1$, когда D эквивалентно $D_0 Z$.

Случай $n = (2g – 2)2$ имеется в таблице 3.1 в [4]. Пусть $2g – 2 < n< (2g -2)2$, тогда имеем равенство

$$i_{p,2}(D) = 3g - 3 - n + r(\frac{D_0 Z^1}{D}).$$

Здесь $\deg\left(\frac{D_0 Z^1}{D}\right) = 0 + 2g - 2 - n < 0$, и если существует f, $(f) \geq \frac{D_0 Z^1}{D}$,

то $0 = \deg(f) \geq \deg\frac{D_0 Z^1}{D}, \deg\frac{D_0 Z^1}{D} < 0$ и нет противоречия. Следовательно, в этом случае имеем только: для несущественного характера ρ

$$i_{\rho,2}(D) = 3g - 3 - n + r\left(\frac{Z}{D}\right),$$

а для существенного характера ρ

$$i_{\rho,2}(D) = 3g - 3 - n + r\left(\frac{D_0 Z}{D}\right).$$

Таким образом, доказана теорема о размерности $i_{\rho,2}(D)$, которую сформулируем в виде таблицы 2.

Таблица 2

Для размерности iρ,2 (D)

g≥2	**deg D = n**	**Несущественный характер**		**Существенный характер**	
	n>4g–4	0			
	0<n<2g–2	3g–3–n			
	2g-2<n<4g-4	$3g-3-n+r\left(\frac{Z}{D}\right)$		$3g-3-n+r\left(\frac{D_0 Z}{D}\right)$	
	n = 2g–2	D~Z	$D \nsim Z$	D~D0Z	$D \nsim D_0 Z$
		g	g–1	g	g–1
	n = 4g–4	D~Z2	$D \nsim Z^2$	D~ D0Z2	$D \nsim D_0 Z^2$
		1	$r\left(\frac{Z}{D}\right)-g+1$	1	$r\left(\frac{D_0 Z}{D}\right)-g+1$

Рассмотрим общий случай $k \geq 3$. Составим таблицу из $i_{\rho,k}(D)$.

Пусть *n > (2g – 2)k*, тогда имеем $i_{\rho,k}(D) = 0$ при deg *D = (2g – 2)k + m, m = 1,2,...,* так как, если существует $\omega \neq 0$ такое, что (ω) ≥ *D*, то deg(ω) ≥ deg *D* и (*2g – 2)k* ≥ *(2g – 2)k* + m. Противоречие. Следовательно $i_{\rho,k}(D) = 0$ при этих условиях.

Пусть 0< n < (2g – 2)(k – 1), тогда по теореме Римана–Роха для (ρ, k)–дифференциалов получим, что

$$i_{\rho,k}(D) = (2k-1)(g-1) - \deg D + r\left((f)\frac{Z^{k-1}}{D}\right) = (2k-1)(g-1) - n,$$

так как

$$\deg\left((f)\frac{Z^{k-1}}{D}\right) = 0 + (k-1)(2g-2) - n > 0.$$

Пусть *n = deg D = (2g – 2)(k – 1),* тогда имеем $\deg\left((f)\frac{Z^{k-1}}{D}\right) = 0 + (2g-2)(k-1) - n = 0.$ Поэтому верно $r\left(\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}\right) = 0$, когда *D* не эквивалентно $D_0 Z^{k-1}$ и $r\left(\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}\right) = 1$, когда D эквивалентно $D_0 Z^{k-1}$.

Случай *n = (2g – 2)k* рассмотрен в таблице 3.1 в [4].

Пусть *(2g – 2)(k – 1)< n < (2g – 2)k*, тогда имеем равенство

$$i_{p,k}(D) = (2k-1)(g-1) - n + r\left(\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}\right).$$

Здесь $\deg\frac{D_0 Z^{k-1}}{D} = 0 + (k-1)(2g-2) - n < 0$, и если существует f, $(f) \geq \frac{D_0 Z^{k-1}}{D}$, то

$$0 = \deg(f) \geq \deg\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}, \deg\frac{D_0 Z^{k-1}}{D} < 0$$

и нет противоречия. Следовательно, только получаем: для несущественного характера *ρ*

$$i_{\rho,k}(D) = (2k-1)(g-1) - n + r\left(\frac{Z^{k-1}}{D}\right),$$

а для существенного характера ρ

$$i_{\rho,k}(D) = (2k-1)(g-1) - n + r\left(\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}\right).$$

Таким образом, с учетом предложения 2.1 доказана теорема о размерности $i_{\rho,k}(D)$, которую сформулируем в виде таблицы 3.

Таблица 3

Для размерности iρ,k (D)

<table>
<tr><th rowspan="11">g≥2</th><th>deg D=n>0</th><th colspan="2">Несущественный характер</th><th colspan="2">Существенный характер</th></tr>
<tr><td>n>(2g–2)k</td><td colspan="4">0</td></tr>
<tr><td>0<n<(2g–2)(k–1)</td><td colspan="4">(2k–1)(g–1)–n</td></tr>
<tr><td>(2g–2)(k–1)<n<(2g–2)k</td><td colspan="2">$(2k-1)(g-1)-n+r\left(\frac{Z^{k-1}}{D}\right)$</td><td colspan="2">$(2k-1)(g-1)-n+r\left(\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}\right)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=(2g–2)(k–1)</td><td>D~Zk-1</td><td>$D \nsim Z^{k-1}$</td><td>D~D0Zk-1</td><td>$D \nsim D_0 Z^{k-1}$</td></tr>
<tr><td>g</td><td>g–1</td><td>g</td><td>g–1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">n=(2g–2)k</td><td>D~Zk</td><td>$D \nsim Z^k$</td><td>D~D0Zk</td><td>$D \nsim D_0 Z^k$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$r\left(\frac{Z^{k-1}}{D}\right)-g+1$</td><td>1</td><td>$r\left(\frac{D_0 Z^{k-1}}{D}\right)-g+1$</td></tr>
<tr><td>deg D=-n<0</td><td colspan="4">(2k–1)(g–1)+n</td></tr>
</table>

Таким образом, в данной работе получены размерности $i_{\rho,k}(D)$ для любых дивизоров *D*, как положительных, так и отрицательных переменных степеней deg*D*. Отметим, что случаи $n = (2g-2)k, k \geq 0, k \in N$ найдены были в работе [4].

Замечание 2.1. Размерности получены для фиксированной поверхности F рода g, $g \geq 2$. Используя методы, развитые в [4], и свойства пространства Тейхмюлера можно получить аналогичные результаты для любых переменных характеров ρ на переменной поверхности F_μ.

Замечание 2.2. При ρ=1 эти таблицы дают размерности пространств абелевых k–дифференциалов, кратных D, относительно переменной deg D на компактной римановой поверхности рода g, $g \geq 2$.

Литература

1. Dick, R. Holomorphic differentials on punctures Riemann surfaces / R. Dick // Differential Geometric Methods in Theoretical Physics: Physics and Geometry, Proc. NATO Advanced Research Workshop and XVIII International Conference, Davis, Calif. 1988, 2 – 8 June. – N. – Y.: London, 1990.
2. Dick, R. Krichever – Novikov – like Bases on Punctured Riemann Surfaces / R. Dick // Notkestrasse 85, 2 Hamburg 52. Deutsches Elektronen – synchrotron (DESY) 89-059, May 1989.
3. Farkas, H. M. Riemann surfaces / H. M. Farkas, I. Kra // Grad. Text's Math. – New-York: Springer, 1992. – Vol. 71.
4. Чуешев, В. В. Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. – Ч. 2. / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2003.
5. Чуешев, В. В. Геометрическая теория функций на компактной римановой поверхности / В. В. Чуешев. – Кемерово: КемГУ, 2005.

Информация об авторе:

Комарова Марина Владимировна **–** магистр 2 курса математического факультета, КемГУ, т. 8-908-942-10-89, marishaignat@bk.ru.

Komarova Marina Vladimirovna – Master's Programme student at the Mathematical Faculty of KemSU.