УДК 519.612

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА ПРОТЕКАНИЯ В РАЗВЕТВЛЁННЫХ КАНАЛАХ

Е. Э. Гуммель, Ю. Н. Захаров

UNSTEADY FLOW PROBLEM IN BRANCHED CHANNELS

E. E. Hummel, Y. N. Zakharov

В данной статье приводится метод решения нестационарной задачи о движении однородной вязкой несжимаемой жидкости в разветвляющемся канале, вызванном разностью давлений на его входах-выходах. Метод основан на использовании аппроксимации решаемой системы на входах-выходах канала для вычисления значений скоростей и многошаговой итерационной схемы для нахождения давления внутри области решения. Приводятся результаты численного решения двухмерных и трехмерных задач.

This article is devoted to a method for solving the unsteady problem of a homogeneous incompressible viscous fluid motion in a branching channel caused by pressure difference on its entrances and exits. The method is based on the use of the solved system approximation on channel entrances and exits for evaluating velocities and multistep iterative scheme for finding the pressure within the solution area. Also numerical solution results of two- and three-dimensional problems are shown.

Ключевые слова: *однородная вязкая несжимаемая жидкость, система уравнений Навье-Стокса, нестационарная задача, перепад давлений, течение в разветвляющемся канале.*

Keywords: *homogeneous viscous incompressible fluid, Navier-Stokes equations, unsteady problem, pressure drop, flow in a branching channel.*

Практически важными являются задачи о движении воздуха в системах вентиляции в зданиях, подземных сооружениях (шахтах, метро) и т. п. Эти задачи, в силу малости скоростей движения среды и фактической ее несжимаемости, можно моделировать движением вязкой однородной несжимаемой жидкости, когда источником движения является перепад давления на концах разветвленного канала. Детальный анализ таких течений важен, например, при оценке загазованности отдельных участков угольных шахт. Поэтому целью настоящей работы является построение метода решения нестационарной задачи о движении в канале однородной вязкой несжимаемой жидкости при задании давления на входе и выходе канала.

Традиционно в задачах о течении в каналах однородной вязкой несжимаемой жидкости (система уравнений Навье-Стокса) рассматриваются две постановки задач: в первой, более популярной, на твердых стенках задается условие прилипания, а на участках втекания и вытекания – векторы скорости. Этому посвящено достаточно большое число работ (см., например, обзоры в [1], [2]) Вторая постановка заключается в задании на участках втекания-вытекания давления, а не скоростей. То есть движение жидкости в области протекания осуществляется за счет разности давлений. Таким образом, эти задачи приходится решать в формулировке «скорость-давление», а не в формулировке «функция тока-вихрь». В работе [3, с. 78 – 92] показано, что для существования и единственности решения нестационарной задачи, кроме задания давления на участках втекания-вытекания, необходимо задать только одну из компонент скорости так, чтобы вектор скорости на границе втекания-вытекания был ей перпендикулярен. Однако в этом случае отсутствие значения второй компоненты вектора скорости не позволяет без дополнительных условий на нее построить процесс численного решения таких задач. Обычно численно решаются задачи протекания в каналах с параллельными осям координат прямыми границами и углами (см. [4, с. 203 – 207; 5, с. 259 – 270]). В этом случае на входе и выходе задаются «естественные» краевые условия на скорости вида $v=0$, $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ ($u=0$, $\frac{\partial v}{\partial y}=0$), которые позволяют построить алгоритмически замкнутый численный метод решения. В этом случае условие на производную для одной из компонент вектора решения является прямым следствием условия $v=0$ ($u=0$). Однако такое «простое» определение скоростей на границе не всегда возможно. Дело в том, что эти условия на вторую компоненту являются, вообще говоря, «лишними» и, для того чтобы краевая задача с ними имела решение, необходимо, чтобы они были естественным образом согласованы с решением задачи, сформулированной без таких дополнительных условий.

В настоящей работе предложен метод решения поставленной задачи, использующий решаемую систему уравнений для определения значения вектора скорости на границах канала.

1. Рассмотрим двухмерную задачу о протекании вязкой однородной несжимаемой жидкости в канале с заданным перепадом давления на входе и выходе:

$$\begin{aligned} &V_t + (V\cdot\nabla)V + \nabla p - \nu\Delta V = 0, \quad (x,t)\in Q_T, \\ &div\, V = 0, \quad (x,t)\in Q_T, \\ &V(x,0) = V_0(x), \quad x\in\Omega, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &V(x,t) = 0, \quad (x,t)\in S_1, \\ &p(x,t) = p_0(x,t), \quad (x,t)\in S_2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$V\cdot\vec{\tau} = 0, \quad (x,t)\in S_2, \tag{3}$$

где $V = (u(x_1,x_2,t), v(x_1,x_2,t))$ – вектор скорости, $p = p(x_1,x_2,t)$ – давление, $\upsilon > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $x = (x_1,x_2)$, $t\in[0,T]$ – время, Ω – область решения (см. рис. 1), $Q_t = \Omega\times[0,T]$, $S_1 = \gamma_1\times[0,T]$, $S_2 = \gamma_2\times[0,T]$, γ_1 – непроницаемые твердые стенки, γ_2 - участки протекания, $\vec{\tau}$ – касательный вектор к границе γ_2.

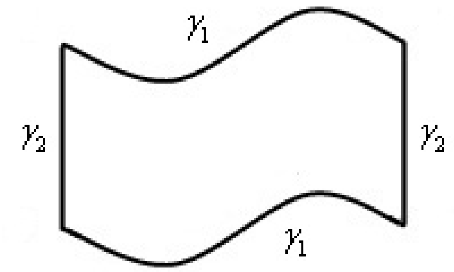


Рис. 1. Область решения

Равенства (3) означают, что вектор скорости V перпендикулярен границам γ_2, но значение его величины не задано. Это обстоятельство является одной из основных трудностей при решении рассматриваемой задачи.

Для численного решения нестационарной системы уравнений (1) с краевыми условиями (2), (3) построим в области Ω разнесенную прямоугольную и в общем случае неравномерную сетку Ω_h, согласованную с границей $\Gamma = \gamma_1\cup\gamma_2$ [6].

Будем решать задачу (1)-(3) с помощью трехэтапной схемы расщепления [7]:

$$\frac{\tilde{V} - V^n}{\tau} = -(\tilde{V}\nabla)\tilde{V} - \upsilon\Delta V; \tag{4}$$

$$-\Delta p = -\frac{div\,\tilde{V}}{\tau}; \tag{5}$$

$$\frac{V^{n+1} - \tilde{V}}{\tau} = -\nabla p, \tag{6}$$

где τ – шаг по времени.

На первом этапе решается уравнение движения (4) без градиента давления. На втором – уравнение Пуассона для давления (5). И на третьем этапе для поправки скорости решается уравнение (6), данными для которого служат решения уравнений (4), (5).

На Ω_h методом контрольного объема аппроксимируем уравнение (4) разностной схемой 2-го порядка по пространству. Для решения необходимо задать скорость на входе и выходе. Поэтому для замыкания системы и реализации какого-либо метода дробных шагов (например, метода стабилизирующей поправки) аппроксимируем уравнение (4) на границах протекания внутрь области решения, заменяя производные односторонними разностями первого порядка аппроксимации. В итоге матрица коэффициентов системы для прогонки в перпендикулярном границе γ_2 направлении будет иметь следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & & & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & & & & & \vdots \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & a_{43} & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & a_{N-3N-2} & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & a_{N-2N-3} & a_{N-2N-2} & a_{N-2N-1} & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & a_{N-1N-2} & a_{N-1N-1} & a_{N-1N} \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & a_{NN-2} & a_{NN-1} & a_{NN} \end{pmatrix}$$

В первой и последних строках стоят три не нулевых элемента, что не позволяет использовать для её обращения трёхдиагональную прогонку. Исключая их с помощью преобразований Гаусса, мы получим систему с трехдиагональной матрицей и уже можем применять обычную скалярную прогонку.

Чтобы задать краевое условие для давления на твердых стенках, выразим из уравнений движения производную по нормали $\frac{\partial p}{\partial n}$ и получим, таким образом, для уравнения Пуассона (5) смешанную краевую задачу. После аппроксимации на Ω_h обычным образом получившуюся краевую задачу мы будем иметь систему линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать на каждом шаге по времени. Т. к. в процессе решения (5) краевые условия не изменяются, то для приближённого решения уравнения Пуассона мы использовали многошаговую итерационную схему, которая в самосопряженном случае является чебышевской [8], но также может быть использована и когда матрица системы несамосопряженная. Еще одним достоинством этой схемы является то, что она устойчива к неточному заданию входных параметров. Задав некоторым образом в начале итерационного процесса входные данные необходимые для построения многошаговой схемы, можно определить оптимальный набор итерационных параметров и использовать его в дальнейшем без изменений.

2. Для проверки работоспособности предлагаемого метода решения нестационарного уравнения Навье-Стокса была рассмотрена задача о течении в разветвляющемся канале (рис. 2). Все результаты приведены при $\nu = 0.01$.

На входах в канал задано давление $p_i, i = 1,...,6$ и нулевая касательная составляющая скорости к границе: на горизонтальных участках $u = 0,$ на вертикальных – $v = 0$. На твердых стенках скорость задается равной нулю.

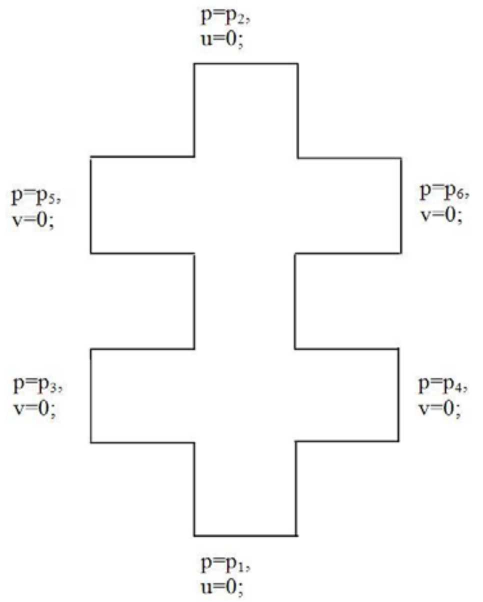


Рис. 2. Разветвляющийся канал

На рис. 3 показана динамика течения до установления, когда на границах задано стационарное давление $p_1 = 0.1,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0.0953,\ p_4 = 0.1,\ p_5 = 0.1,\ p_6 = 0.1$. Как видно из рисунка, при установлении течения вблизи верхней стенки нижнего левого ответвления возникает постепенно увеличивающийся вихрь. При выходе на стационарное течение он занимает почти весь проход, при этом на границе протекания некоторые линии тока направлены внутрь канала, некоторые – наружу.

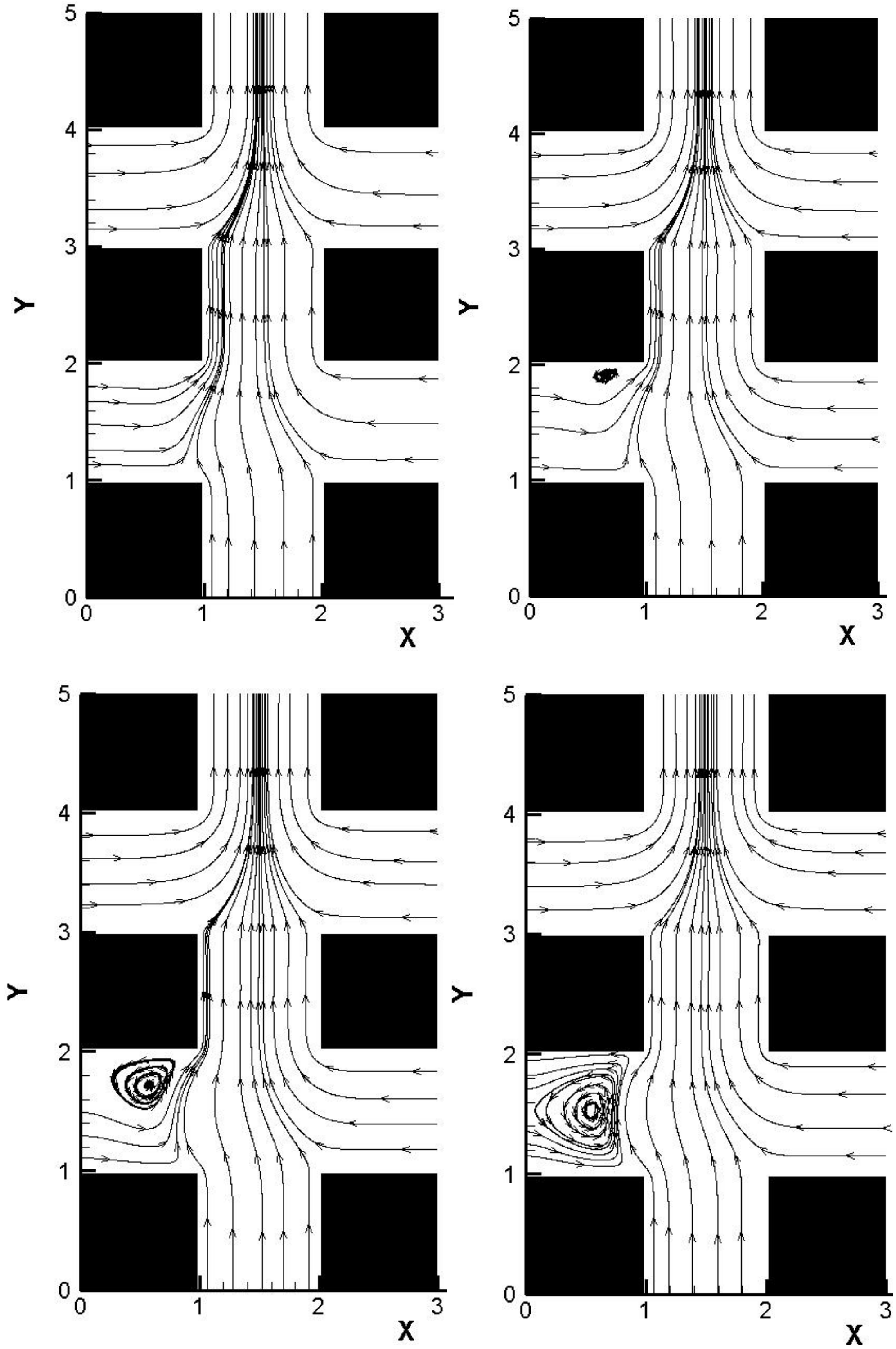


Рис. 3. Течение в канале, $p_3 = 0.0953$, моменты времени t = 7,98; 12; 15,96; 19,68, соответственно

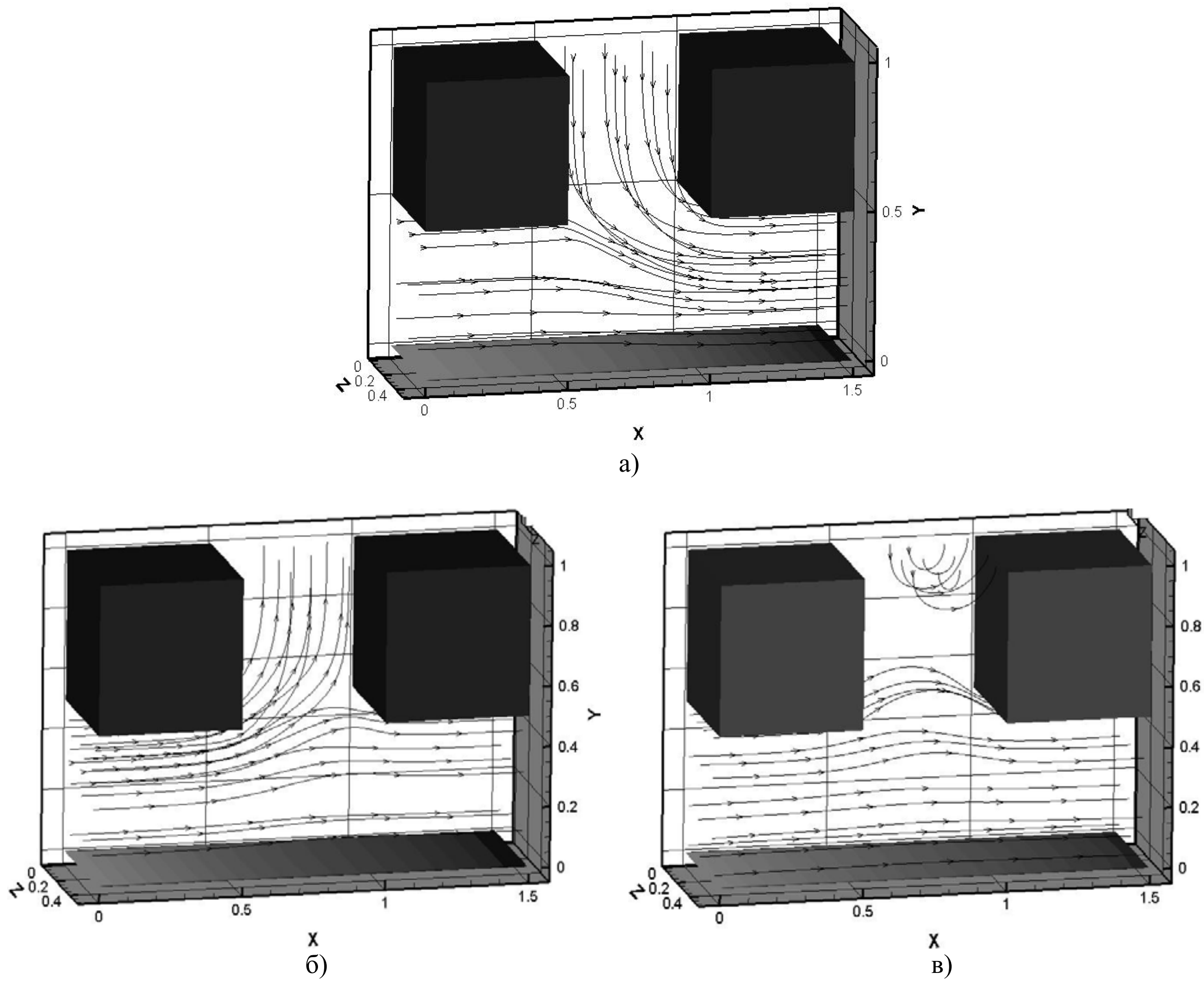
Далее приведены результаты расчётов трёхмерного течения в Т-образном канале, когда на входах-выходах задано давление. Полученные картины установившихся течений приведены на рис. 4. Для всех случаев значение давления слева равно 0.1 ($p_{LEFT} = 0.1$), справа равно нулю ($p_{RIGHT} = 0$). Значение давления на верхнем входе (p_{TOP}) изменялось от 0.1 до 0.03.

На рис. 4а изображено течение при $p_{TOP} = p_{LEFT} = 0.1$. В этом случае жидкость поступает в канал через верхний и левый входы, выходя затем наружу через правую границу протекания, где $p_{RIGHT} = 0$.

На рис. 4б показано изменение течения при уменьшении давления на верхнем входе ($p_{TOP} = 0.03$). Как видно из рисунка, поток жидкости, поступающей в канал, разделяется на две части и выходит наружу как через левую границу, так и через верхнюю.

В третьем же случае (рис. 4в), когда давление p_{TOP} на верхнем ответвлении канала равно 0.051 ($p_{TOP} = 0.051$), течение из верхнего входа не проникает в нижнюю часть. Т. е. течение жидкости из левого входа в правый выход служит препятствием для движения из верхнего отверстия канала. Т. о. получена схожая с двумерным случаем картина течения, когда из одного рукава разветвлённого канала жидкость не проходит в другие его части, т. е. там происходит его запирание.

Т. о., предложенный метод решения нестационарных задач для системы уравнений Навье-Стокса, когда источником движения является разность давлений на границах канала, позволяет решать двухмерные и трёхмерные задачи, обнаруживая не тривиальные течения.



а)

б)

в)

Рис. 4. Течение в Т-образном трехмерном канале

$p_{TOP} = 0.1$, $p_{TOP} = 0.03$, $p_{TOP} = 0.051$ ***соответственно***

Литература

1. Пасконов, В. М. Численное моделирование процессов тепло- и массообмена / В. М. Пасконов, В. И. Полежаев, Л. А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
2. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 612 с.
3. Рагулин, В. В. К задаче о протекании вязкой жидкости сквозь ограниченную область при заданном перепаде давления или напора / В. В. Рагулин // Динамика сплошной среды: сб. научн. тр. – Новосибирск, 1976. – Вып. 27.
4. Кузнецов, Б. Г. Численное исследование течения вязкой несжимаемой жидкости в каналах при заданных перепадах давлений / Б. Г. Кузнецов, Н. П. Мошкин, Ш. Смагулов // Численные методы динамики вязкой жидкости: сб. ИТПМ СО АН СССР. – Новосибирск, 1983.
5. Moshkin, N. Steady viscous incompressible flow driven by a pressure difference in a planar T-junction channel / N. Moshkin, D. Yambangwi // Intern. J. of Comput. Fluid Dyn. – 2009. – Vol. 23. – № 3.
6. Патанкар, С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 124 с.
7. Белоцерковский, О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1984. – 520 с.
8. Захаров, Ю. Н. Градиентные итерационные методы решения задач гидродинамики / Ю. Н. Захаров. – Новосибирск: Наука, 2005. – 239 с.

Информация об авторах

Гуммель Евгений Эрнстович – аспирант, ассистент кафедры вычислительной математики КемГУ, jade_taurus@mail.ru

Hummel Evgenij Ernstovich – post-graduate student, Assistant at the Department of Computational Mathematics of KemSU.

Захаров Юрий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, зав. кафедрой вычислительной математики, КемГУ, т. 8(384-2) 54-27-70, zyn@kemsu.ru

Zakharov Yuriy Nikolaevich – Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Head of the Department of Computational Mathematics of KemSU.