УДК 514.132

О ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Г. А. Байгонакова, Д. Ю. Соколова

ON THE AREA OF A TRAPEZOID IN SPHERICAL GEOMETRY

G. A. Baigonakova, D. Yu. Sokolova

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-90701-моб_ст и 12-01-00210-а) и Совета по грантам при президенте Российской Федерации (гранты МК-4447.2012.1 и НШ-921.2012.1).

В данной статье получена формула площади сферической трапеции через длины ее сторон.
In this paper we give a formula for the area of a spherical trapezoid in terms of its sides lengths.

Ключевые слова: *сферическая геометрия, площадь, трапеция.*
Keywords: *spherical geometry, area, trapezoid.*

1. Введение

Из элементарной геометрии нам известна формула площади треугольника S через длины его сторон a, b и c. Она может быть представлена в следующем виде:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p,$$

где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ − полупериметр треугольника. Она известна как формула Герона.

Площадь четырёхугольника, вообще говоря, не определяется через длины его сторон. Однако, это справедливо в некоторых частных случаях, например, когда четырёхугольник является вписанным, либо когда он представляет собой трапецию. В первом случае его площадь описывается формулой Брахмагупты:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

где a, b, c, d − длины сторон четырёхугольника, а $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ его полупериметр. Формулу Брахмагупты и её доказательство можно найти в книге [7, с. 90]. Во втором случае площадь трапеции находится через длины её сторон элементарными вычислениями по формуле, приведённой ниже.

Отметим, что для сферического четырёхугольника формула площади через длины его сторон и диагонали была получена в монографии [4, с. 165]. Она имеет следующий вид.

Теорема 1. Площадь S сферического четырёхугольника ABCD со сторонами a,b,c,d и диагоналями e, f находится из соотношения:

$$\sin^2\frac{S}{4} = \frac{(\sin\frac{e}{2}\sin\frac{f}{4} + \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2})(\sin\frac{e}{2}\sin\frac{f}{4} - \cos\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{d}{2})}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}. \qquad (1)$$

Напомним [3], что выпуклый четырехугольник вписан в окружность тогда и только тогда, когда выполнено равенство

$$\sin\frac{e}{2}\sin\frac{f}{4} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{d}{2}\cdot$$

Подставляя это соотношение в формулу (1) получим следующий сферический аналог формулы Брахмагупты [4, с. 46].

Следствие. Площадь S вписанного в окружность сферического четырёхугольника ABCD со сторонами a, b, c, d находится по формуле:

$$\sin^2\frac{S}{4}=\frac{\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}\sin\frac{p-d}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}}.$$

В гиперболическом случае варианты формул Брахмагупты для вписанного четырехугольника представлены в работе [2]. Формула площади трапеции на гиперболической плоскости через длины её сторон получена в работе одного из авторов [8].

Цель настоящей статьи – перенести результаты работы [8] на сферический случай. Все приведённые ниже результаты будут сформулированы для сферической плоскости с гауссовой кривизной к = 1. Необходимые сведения по сферической геометрии приведены в книге [5].

2. Основной результат

Определение. Выпуклый четырехугольник ABCD называется трапецией, если для его внутренних углов справедливо соотношение

$$\angle A+\angle B=\angle C+\angle D. \tag{2}$$

Замечание. Данное определение трапеции эквивалентно общепринятому в евклидовой геометрии.

В этом случае стороны AD и BC называются основаниями трапеции, а AB и CD – ее боковыми сторонами. Длины сторон AB, BC, CD, AD будем обозначать соответственно, буквами a, b, c, d; длины диагоналей AC и BD – буквами e и f (рис. 1).

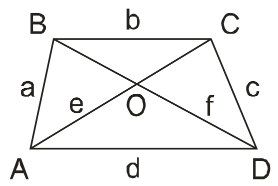

Рис. 1. Трапеция

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что трапеция является выпуклым четырёхугольником и $b \neq d$. При $b = d$, как и в евклидовой геометрии (случай параллелограмма), площадь трапеции не определяется по длинам её сторон.

Для вычисления площади трапеции нам потребуется следующая теорема. В гиперболическом случае она доказана в работе Ф. В. Петрова [6].

Теорема 2. Пусть ABCD – выпуклый четырёхугольник в сферической геометрии. Тогда следующие два свойства эквивалентны:

$$(i)\ \ \angle BAD+\angle ABC=\angle ADC+\angle DCB.$$

$$(ii)\ \ \angle CAD+\angle CBD=\angle BCA+\angle BDA.$$

Доказательство. Выведем (ii), предполагая (i). Пусть точка E симметрична точке D относительно середины AB, и точка F симметрична точке A относительно середины CD, тогда равны пары треугольников: $\Delta ABE=\Delta BAD$ и $\Delta CDA=\Delta BDA$ (рис. 2.)

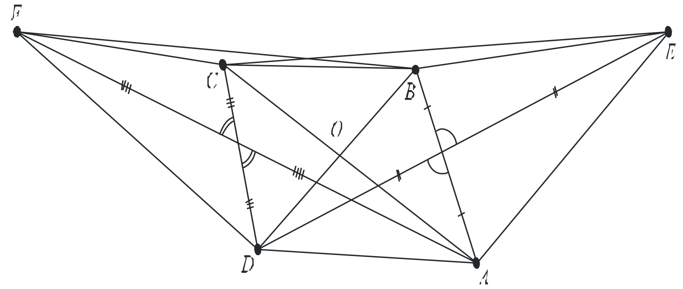

Рис. 2. Выпуклый четырёхугольник

По двум сторонам и углу между ними равны ΔEBC и ΔFCB

$$\begin{aligned}(\angle EBC &= 2\pi-(\angle CBA+\angle ABE)=\\ &=2\pi-(\angle CBA+\angle DAB)=\\ &=2\pi-(\angle BCD+\angle CDA)=\\ &=2\pi-(\angle BCD+\angle DCF)=\angle FCB).\end{aligned}$$

Значит, $EC = FB$, и по трем сторонам равны треугольники $\Delta FBD = \Delta ACE$, так что $\angle FDB = \angle CAE$. Откуда из равенств $\angle FDC = \angle DCA$ и $\angle BAE = \angle DBA$ следует, что $\angle DBA + \angle CAB = \angle BDC + \angle DCA$. Вычитая последнее равенство из (i), получаем (ii).

Для вывода (i) из (ii) надо рассмотреть точку, симметричную D относительно середины AC, и точку, симметричную A относительно BD середины, и провести аналогичные рассуждения.

Заметим, что каждое из свойств (i) и (ii) равносильно тому, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией с основаниями BC и AD. Вычитая из первого равенства второе, получим, что справедлива следующая лемма.

Лемма. Для трапеции $ABCD$ справедливо соотношение

$$\angle DBA + \angle CAB = \angle BDC + \angle DCA.$$

В силу формулы Гаусса-Бонне площади треугольников AOB и COD находятся по формулам:

$$S_{AOB} = \angle CAB + \angle ABD + \angle AOB - \pi,$$

$$S_{COD} = \angle ACD + \angle CDB + \angle COD - \pi.$$

Учитывая утверждение леммы и равенство вертикальных углов $\angle AOB = \angle COD$, получим, что $S_{AOB} = S_{COD}$.

Отсюда непосредственно заключаем, что имеют место равенства площадей $S_{ADB} = S_{ADC}$ и $S_{ABC} = S_{BCD}$. Обозначим через $S(a,b,c)$ площадь сферического треугольника с длинами сторон a, b, c. Переписывая полученные два равенства в терминах длин сторон, установим, что справедливо следующее следствие.

Следствие. Для площадей треугольников с соответствующими сторонами выполнены равенства

$$\begin{cases} S(a,d,f) = S(c,d,e), \\ S(b,a,e) = S(b,c,f). \end{cases} \tag{3}$$

Из работы [5] известна следующая формула для площади S сферического треугольника со сторонами a,b,c:

$$\tan\frac{S(a,b,c)}{4} = \sqrt{\begin{matrix}\tan\frac{a+b+c}{4}\tan\frac{b+c-a}{4}\tan \\ \tan\frac{a-b+c}{4}\tan\frac{a+b-c}{4},\end{matrix}}, \tag{4}$$

которая элементарными преобразованиями приводиться к следующему сферическому аналогу формулы Билински [1]

$$\cos\frac{S(a,b,c)}{2} = \frac{\cos(a) + \cos(b) + \cos(c) + 1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}. \tag{5}$$

Положим $c(a) = \cos(\frac{a}{2})$ и $s(a) = \sin(\frac{a}{2})$. Подставляя равенство $\cos(a) = 2c^2(a) - 1$ в уравнение (5), получим, что система уравнений (3) эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} \dfrac{c^2(a) + c^2(d) + c^2(f) - 1}{c(a)c(f)} = \dfrac{c^2(c) + c^2(d) + c^2(e) - 1}{c(c)c(e)}, \\ \dfrac{c^2(a) + c^2(b) + c^2(e) - 1}{c(a)c(e)} = \dfrac{c^2(c) + c^2(b) + c^2(f) - 1}{c(c)c(f)}. \end{cases} \tag{6}$$

Решая эту систему на компьютере относительно $c(e)c(f)$ и $\dfrac{c(e)}{c(f)}$, получим следующее предложение.

Предложение. Длины сторон и диагоналей трапеции связаны соотношениями

$$\begin{cases} c(e)c(f) = c(a)c(c) - s(b)s(d), \\ \dfrac{c(e)}{c(f)} = \dfrac{c(c)s(b) - c(a)s(d)}{c(a)s(b) - c(c)s(d)}. \end{cases} \tag{7}$$

Из данной системы уравнений находятся выражения для длин диагоналей трапеции $ABCD$:

$$c^2(e) = \frac{c(c)s(b) - c(a)s(d)}{c(a)s(b) - c(c)s(d)}(c(a)c(c) - s(b)s(d)), \tag{8}$$

$$c^2(f) = \frac{c(a)s(b) - c(c)s(d)}{c(c)s(b) - c(a)s(d)}(c(a)c(c) - s(b)s(d)). \tag{9}$$

Сформулированное предложение потребуется для доказательства теоремы о площади трапеции.

Теорема 3. Площадь S сферической трапеции ABCD со сторонами a, b, c, d находится из соотношения:

$$\tan^2\frac{S}{4} = \frac{\sin^2\frac{b+d}{2}\sin\frac{a+b-c-d}{4}\sin\frac{a+b+c-d}{4}\sin\frac{-a+b+c-d}{4}\sin\frac{a-b+c+d}{4}}{\sin^2\frac{b-d}{2}\cos\frac{a-b-c-d}{4}\cos\frac{a-b+c-d}{4}\cos\frac{a+b-c+d}{4}\cos\frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Замечание. Евклидов вариант формулы, выражающий квадрат площади трапеции через её стороны, находится элементарными вычислениями из геометрических соображений и имеет вид:

$$S_E{}^2 = \frac{(b+d)^2(a+b-c-d)(a+b+c-d)(-a+b+c-d)(a-b+c+d)}{16(b-d)^2}.$$

Отметим также, что $\tan^2\frac{S}{4} \approx (\frac{S_E}{4})^2$ при достаточно малых величинах a, b, c, d.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$, изображенную на рисунке 1. Для вычисления её площади воспользуемся формулой (1) и представим ее в следующем виде:

$$\sin^2\frac{S}{4} = \frac{(s(e)(f))^2 - (c(a)c(c) - c(b)c(d))^2}{4c(a)c(b)c(c)c(d)}. \tag{10}$$

Вычисляя выражение $(s(e)s(f))^2 = (1 - c^2(e))(1 - c^2(f))$ по формулам (8), (9) и подставляя полученное значение в (10), после упрощения на компьютере получим:

$$\sin^2\frac{S}{4} = \frac{\sin^2\frac{b+d}{2}\sin\frac{a+b-c+d}{4}\sin\frac{a+b+c-d}{4}\sin\frac{a-b-c+d}{4}\sin\frac{a-b+c+d}{4}}{c(b)c(d)(c(c)s(b) - c(a)s(d))(c(c)s(d) - c(a)s(b))}. \tag{11}$$

Далее,

$$\cos^2\frac{S}{4} = \frac{\sin^2\frac{b-d}{2}\cos\frac{a-b-c-d}{4}\cos\frac{a-b+c-d}{4}\cos\frac{a+b-c+d}{4}\cos\frac{a+b+c+d}{4}}{c(b)c(d)(c(c)s(b) - c(a)s(d))(c(a)s(b) - c(c)s(d))}. \tag{12}$$

Поделив (11) на (12), имеем утверждение теоремы

$$\tan^2\frac{S}{4} = \frac{\sin^2\frac{b+d}{2}\sin\frac{a+b-c-d}{4}\sin\frac{a+b+c-d}{4}\sin\frac{-a+b+c-d}{4}\sin\frac{a-b+c+d}{4}}{\sin^2\frac{b-d}{2}\cos\frac{a-b-c-d}{4}\cos\frac{a-b+c-d}{4}\cos\frac{a+b-c+d}{4}\cos\frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Что и требовалось доказать.

Литература

1. Bilinski, S. Zur Begrundung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene / S. Bilinski // Math. Ann. – 1969.
2. Mednykh, A. D. Brahmahupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane / A. D. Mednykh // Sib. Electron. Math. Reports. – 2012 to appear.
3. Valentine, J. E. An Analogue of Ptolemy's Theorem in Spherical Geometry / J. E. Valentine // Amer. Math. Monthly. – 1970. – Vol. 77.
4. M'Clelland, W. J. A Treatise on Spherical Trigonometry with application to Spherical Geometry and Numerous Examples. Part II / W. J. M'Clelland, T. Preston. – London: Macmillian and Co,1886.
5. Алексеевский, Д. В. Геометрия пространств постоянной кривизны / Д. В. Алексеевский, Э. Б. Винберг, А. С. Солодовников // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ. – 1988. – Т. 29.

6. Петров, Ф. В. Вписанные четырехугольники и трапеции в абсолютной геометрии / В. Ф. Петров // Математическое просвещение. – Сер. 3. – 2009. – Вып. 13.
7. Понарин, Я. П. Элементарная геометрия. Планиметрия / Я. П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – Т. 1.
8. Соколова, Д. Ю. О площади трапеции на плоскости Лобачевского / Д. Ю. Соколова // Сиб. электрон. мат. изв. – 2012.

Информация об авторах:

Байгонакова Галия Аманболдыновна – аспирант кафедры математического анализа ГАГУ, т. 8(913) 691-8816, e-mail: galyaab@mail.ru.

Bajgonakova Galiya Amanboldynovna – post-graduate student at the Department of Mathematical Analysis of Gorno-Altaysk State University.

Соколова Дарья Юрьевна – аспирант лаборатории теории функции Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, т. 8(913) 460-2823, e-mail: from_dasha@mail.ru.

Sokolova Daria Yurievna – post-graduate student at the Laboratory of Function theory of S. L. Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS.