

УДК 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕНЕДЖМЕНТА В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ В ФОРМЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

Н. Н. Данилов

MATHEMATICAL MODEL OF MANAGEMENT UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY IN THE FORM OF DYNAMICAL GAME WITH NATURE

N. N. Danilov

Построена математическая модель менеджмента как управления предприятием в рыночных условиях с целью получения прибыли. С учетом агрессивности среды модель принятия управленческих решений (существование конкурентов, неполнота или отсутствие необходимой информации и др.) построена в форме динамической игры с природой. Определены и анализированы принципы оптимального поведения менеджера.

Ключевые слова: менеджмент, предприятие, неопределенность, риск, игра с природой, принципы оптимального выбора управленческих решений.

Mathematical model of management as operation of business in the market with the purpose of profit earning is built. Taking into consideration hostile environment of managerial decision-making (competitors existence, incomplete or null information etc.) the model is built in the form of dynamical game with nature. Principles of optimal behaviour manager's are defined and analysed.

Keywords: management, business, uncertainty, risk, game with nature, principles of optimal managerial decisions.

В теории менеджмента выделяют четыре основных направления (см., напр., [1]): ориентированность на научное управление, администрирование, человеческие взаимоотношения и применение математических методов управления. Математическое направление характеризуется использованием в менеджменте математических моделей и методов. Говоря о математических моделях в менеджменте, прежде всего имеют в виду формализацию задач принятия решения и управленческих задач.

Статистические модели принятия решения, такие как задачи линейного и нелинейного программирования, теоретико-игровые задачи, задачи массового обслуживания и др. не учитывают фактора времени, т. е. являются моделями «застывшего» состояния системы или процесса. Модели управления, в которых существенно учитывается фактор времени, более подходят для применения в менеджменте, изучаются в математической теории оптимальных процессов. Здесь под «управлением» понимается воздействие извне на тот или иной объект (процесс, систему) с целью приведения его в желаемое состояние, если этот объект снабжен «рычагами» управления [2].

Управление как целенаправленный процесс применяется во всех сферах человеческой деятельности – от управления простым техническим агрегатом или семейным бюджетом, до управления высокотехнологичными процессами или целым государством. Менеджмент, как аналог «управления» в области экономической деятельности, имеет конкретный объект приложения и конкретные задачи. Менеджмент – это управление конкретной организацией (фирмой, производством, коммерцией) в рыночных условиях; это совокупность действий по эффективному использованию человеческих, материальных и финансовых ре-

сурсов организации для достижения высокого уровня прибыли.

При математическом моделировании предприятия как объекта менеджмента следует учитывать основные параметры, характеризующие его состояние (фазовые параметры); «рычаги» управления (параметры управления); выявить закономерность изменения во времени фазового состояния под воздействием управляющих параметров; ограниченность управленческих возможностей (ресурсных, финансовых, трудовых и пр.); необходимость соблюдения законодательных и иных норм, регламентированных условиями производства; наличие ряда целей, к достижению которых направлен менеджмент.

При формировании управленческих решений следует также учесть агрессивность среды функционирования предприятия, вызванную наличием конкурентов, изменчивостью рыночной конъюнктуры, отсутствием полной информированности (неопределенностью), а также риски, порождаемые такой средой.

С учетом всего сказанного выше, в этой работе строится математическая модель менеджмента предприятия в форме так называемой динамической игры с природой.

Игры с природой, как математические модели принятия решения в условиях неопределенности, изучаются в теории игр. Это разновидность матричных игр [3], где в роли второго игрока выступает неопределенность с непредсказуемыми исходами. Для лучшего учета возможных последствий неопределенности при принятии решения, последняя условно принимается как сознательная сторона (второй игрок), противодействующая менеджеру (первому игроку).

В этой работе для получения математической модели менеджмента предприятия мы вводим в модель игры с природой фактор времени, превращая её в динамическую модель. В результате искомая модель менеджмента будет иметь форму задачи конфликтного управления.

Введем необходимые обозначения:

t – переменная величина, называемая «временем» и принимающая лишь дискретные значения: $t = 0, 1, \dots, T$;

$x(t) \in R^s$ – вектор фазового состояния предприятия в момент времени t ;

$u_M^t \in R^q$ – вектор управления менеджера в момент t ;

$u_\Pi^t \in R^p$ – вектор управления природы (как игрока) в момент t ;

$f: R^s \times R^q \times R^p \rightarrow R^s$ – вектор-функция, описывающая динамические возможности развития предприятия;

$U_M^t \subset R^q$ – множество допустимых значений управляющих параметров u_M^t (U_M^t – конечное не пустое множество);

$U_\Pi^t \subset R^p$ – множество допустимых значений управляющих параметров u_Π^t (U_Π^t – конечное не пустое множество).

С помощью введенной символики мы можем задать динамику изменения состояния предприятия под воздействием двух управляющих параметров в виде следующей системы:

$$x(t+1) = f(x(t), u_M^t, u_\Pi^t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (1)$$

$$x(0) = x^0, \quad (2)$$

$$u_M^t \in U_M^t, \quad u_\Pi^t \in U_\Pi^t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \quad (3)$$

где $x^0 = (x_1^0, \dots, x_s^0)$ – известное начальное состояние предприятия в момент $t = 0$.

Применяя в дальнейшем терминологию теории игр, менеджера, который распоряжается выбором управления u_M , будем называть первым игроком (игрок I), а «природу», которая «распоряжается» выбором управления u_Π – вторым игроком (игрок II).

С помощью системы (1) – (3) развитие предприятия можно представить следующим образом: в состоянии x^0 под действием выбранных в момент $t = 0$ управлений $u_M^0 \in U_M^0$ и $u_\Pi^0 \in U_\Pi^0$ предприятие переходит (в силу уравнения (1)) в новое состояние:

$$x(1) = f(x^0, u_M^0, u_\Pi^0).$$

Далее, под влиянием выбранных в состоянии $x(1)$ управлений $u_M^1 \in U_M^1$, $u_\Pi^1 \in U_\Pi^1$, предприятие переходит, (в силу уравнения (1)) в новое состояние:

$$x(2) = f(x(1), u_M^1, u_\Pi^1).$$

И так далее. На последнем шаге ($t = T - 1$), находясь в состоянии $x(T - 1)$, под действием выбранных в этом состоянии управлений $u_M^{T-1} \in U_M^{T-1}$ и $u_\Pi^{T-1} \in U_\Pi^{T-1}$, предприятие переходит в состояние:

$$x(T) = f(x(T - 1), u_M^{T-1}, u_\Pi^{T-1}).$$

Полученную таким образом последовательность $x(\cdot) = \{x^0, x(1), \dots, x(T)\}$ будем называть траекторией системы (1) – (2), соответствующей последовательности управлений $u_M(\cdot) = \{u_M^0, u_M^1, \dots, u_M^{T-1}\}$, $u_\Pi(\cdot) = \{u_\Pi^0, u_\Pi^1, \dots, u_\Pi^{T-1}\}$. Последние будем называть допустимыми управлениями первого и второго игроков соответственно.

Множества $U_M = U_M^0 \times U_M^1 \times \dots \times U_M^{T-1}$ и $U_\Pi = U_\Pi^0 \times U_\Pi^1 \times \dots \times U_\Pi^{T-1}$ будем называть множествами допустимых управлений первого и второго игроков соответственно.

Таким образом, каждой паре выбранных управлений $(u_M(\cdot), u_\Pi(\cdot))$ соответствует своя траектория:

$$x(\cdot) = x(\cdot, x^0, u_M(\cdot), u_\Pi(\cdot)) = \{x^0, x(1), \dots, x(T)\},$$

(здесь точка заменяет последовательность значений $t = 1, \dots, T$).

Множество всех (допустимых) траекторий системы (1) – (2) будем обозначать символом $X(x^0, T)$:

$$X(x^0, T) = \{x(\cdot) = x(\cdot, x^0, u_M(\cdot), u_\Pi(\cdot)) \mid u_M(\cdot) \in U_M, u_\Pi(\cdot) \in U_\Pi\}.$$

Введем в рассмотрение множество:

$$G(x(t-1), t) = \{x(t) = x(t, x(t-1), u_1(t-1), u_2(t-1)) \mid$$

$$x(t-1) \in G(x(t-2), t-1), \quad u_1(t-1) \in U_1^{t-1}, \quad u_2(t-1) \in U_2^{t-1}\},$$

которое будем называть множеством достижимости t -го уровня, $t = 1, \dots, T$ (будем считать, что $G(x(-1), 0) = x^0$). Множество

$$G(x^0, T) = \bigcup_{t=1}^T G(x(t-1), t)$$

будем называть множеством достижимости системы (1) – (3). Считается, что $x^0 \in G(x^0, T)$ по определению.

Пусть в каждой точке $x = x(t)$ ($t = 1, \dots, T$) множества достижимости $G(x^0, T)$ системы (1) – (3) определена матрица выигрышей игрока I:

$$h(x(t)) = \begin{pmatrix} a_{11}(x(t)) & a_{12}(x(t)) & \dots & a_{1n}(x(t)) \\ a_{21}(x(t)) & a_{22}(x(t)) & \dots & a_{2n}(x(t)) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x(t)) & a_{m2}(x(t)) & \dots & a_{mn}(x(t)) \end{pmatrix} \quad (4)$$

($h(x^0) = \|0\|_{m \times n}$ – $m \times n$ – матрица с нулевыми элементами, где m и n конечные числа; в общем случае $m = m(x(t))$, $n = n(x(t))$). Целью игрока I является максимизация значения функции:

$$F(x(\cdot), I, J) = \sum_{t=1}^T a_{i_t j_t}(x(t)), \quad (5)$$

где $I = \{i_t, t = 1, \dots, T\}$, $J = \{j_t, t = 1, \dots, T\}$ – последовательности стратегий игроков, выбираемых ими в матричных играх $h(x(t)), t = 1, \dots, T$. Полагаем, что целью игрока II (природы) является минимизация значения функции (5).

Определим классы допустимых стратегий игроков.

Комбинированной стратегией (к-стратегией) игрока I (II) назовем любое отображение $\phi_M(\cdot)$ ($\phi_{II}(\cdot)$), которое каждому состоянию $x(t)$ ставит в соответствие некоторый номер i_t (j_t) строки (столбца) матрицы $h(x(t))$ и некоторое допустимое (на t -м шаге) управление:

$$u_M^t \in U_M^t \quad (u_{II}^t \in U_{II}^t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1.$$

Название «комбинированная стратегия» для $\phi_M(\cdot)$ и $\phi_{II}(\cdot)$ объясняется тем, что их первые компоненты являются стратегиями в матричных играх, а вторые компоненты – допустимыми (позиционными) управлениями в системе (1) – (3).

Множество всех к-стратегий игроков обозначим символами Φ_M, Φ_{II} .

Совокупность

$$\Gamma(x^0, T) = \left\langle \sum(x^0, T); \Phi_M, \Phi_{II}; F \right\rangle, \quad (6)$$

где $\sum(x^0, T)$ – символическое обозначение системы (1) – (2), назовем динамической игрой с природой.

Обоснуем адекватность построенной модели к приведенной выше задаче менеджмента, т. е. покажем, что динамическая игра с природой действительно является математической моделью менеджмента в условиях неопределенности.

Состояние предприятия в каждый момент времени t описывается s -мерным вектором

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_s(t))$. Компоненты вектора $x(t)$ – это числовые значения тех основных параметров, которые характеризуют достигнутые в момент времени t результаты менеджмента – уставный капитал, основные и оборотные фонды, актив и пассив, прибыль, запасы материальных ресурсов, численность работающих и т. д.

В качестве видов управляющих параметров в менеджменте могут быть определены различные факторы в зависимости от поставленных целей. Например, ими могут быть различные варианты распределения финансовых средств (фонда развития предприятия) по всем видам расходов. В этом случае компонентами

вектора управления $u_M^t = (u_{M_1}^t, \dots, u_{M_q}^t)$ будут производственные и непроизводственные затраты, транспортные расходы, инвестиционные вложения, затраты на рекламу и на повышение квалификации работников и др. Задача менеджера заключается в выборе из всех допустимых распределений средств наилучший

вариант (оптимальное управление) с точки зрения эффективного достижения поставленных целей.

Один из сложных вопросов при моделировании развития предприятия здесь (и динамики управляемых систем вообще) – это построение функции f (см. (1)), которая адекватным образом должна описать закон изменения состояния предприятия под воздействием управляющих параметров. Общих методов построения функции f не существует, поэтому для каждой конкретной задачи это творческий процесс. К сожалению, в работах экономистов чаще всего допускается линейная зависимость этой функции от фазового состояния системы и управлений. Очевидно, что это является сильным упрощением действительности. Некоторые методы построения нелинейной функции f , использующие статистические данные о развитии системы, можно найти, например, в работах [4, 5].

Выбор числовых значений управляющих параметров из заданных конечных множеств U_M^t , $t = 0, 1, \dots, T-1$ отражает реально ограниченные возможности управления предприятием. Аналитически эти множества могут быть описаны с помощью системы неравенств (бюджетные, сырьевые и др. ограничения) и уравнений (балансовые, нормативные и др. соотношения) [5].

В менеджменте цели предприятия могут быть сформулированы двояко: либо как максимизация основных производственных показателей на всем плановом периоде с учетом ограниченных ресурсов, либо как достижение запланированных к концу планового периода значений показателей с минимальными издержками. Следует заметить, что одновременная постановка этих двух задач некорректна ввиду их противоречивости, т. е. реально должна быть поставлена одна из двух задач.

В математической модели менеджмента первая задача формализуется как максимизация значений функций, описывающих основные показатели деятельности предприятия (прибыль, рентабельность и др.); вторая задача формализуется как достижение заданного в момент $t = T$ терминального множества (множества фазовых состояний предприятия, соответствующих запланированным значениям показателей) с минимизацией ресурсных или временных затрат.

В построенной выше модели (1) – (5) менеджмента формализована первая задача – максимизация значения функционала (5), где $a_{i_t j_t}(x(t))$ – это численное значение выбранного показателя в состоянии $x(t)$, когда менеджер выбирает в матрице (4) строку с номером i_t , а неопределенность находится в состоянии j_t . Например, если этот показатель является прибылью предприятия, то:

$$a_{i_t j_t}(x(t)) = \sum_l p_l F_l(x(t)) - \sum_z w_z W_z(x(t)),$$

где p_l и w_z – цены выпуска и затрат, а F_l и W_z – производственная функция и функция издержек. Аналитические выражения таких функций можно найти, например, в [5].

Модель (1) – (5) позволяет исследовать вопросы существования, идентификации и вычисления оптимального управления предприятием с помощью методологии динамических игр с природой. Согласно этой методологии, во-первых, «оптимальность» управления предприятием будем понимать в смысле обобщения приспособленных к неопределенности статических принципов Вальда, Гурвица и Сэвиджа [6] на динамический процесс; во-вторых, будем считать, что анализ и выбор допустимых управлений и к-стратегий осуществляется игроками в начальный момент $t = 0$ (в начальном состоянии x^0) на весь период времени $[0, T]$. Это не противоречит принципу построения позиционных управлений в виде $u_M = u_M(x)$ и $u_{II} = u_{II}(x)$.

Процесс управления предприятием с помощью модели (1) – (5) можно представить следующим образом. В начальном состоянии x^0 игроки выбирают некоторые к-стратегии:

$$\phi_M(\cdot) = \{(u_M^0(\cdot), i_1), (u_M^1(\cdot), i_2), \dots, (u_M^{T-1}(\cdot), i_T)\} \in \Phi_M,$$

$$\phi_{II}(\cdot) = \{(u_{II}^0(\cdot), j_1), (u_{II}^1(\cdot), j_2), \dots, (u_{II}^{T-1}(\cdot), j_T)\} \in \Phi_{II},$$

которые порождают некоторую траекторию

$$x(\cdot) = x(\cdot, x^0, u_M(\cdot), u_{II}(\cdot)) = \{x^0, x(1), \dots, x(T)\}$$

системы (1) – (2). По построению модели (1) – (5), во всех точках траектории $x(\cdot)$ (кроме x^0) определены априори матричные игры

$$h(x(1)), h(x(2)), \dots, h(x(T)) \text{ вида (4). К-стратегии}$$

предписывают для них стратегии $(i_1, j_1), \dots, (i_T, j_T)$, которые определяют выигрыши $a_{i_1 j_1}, a_{i_2 j_2}, \dots, a_{i_T j_T}$ первого игрока в соответствующих играх. Следовательно, в ситуации $(\phi_M(\cdot), \phi_{II}(\cdot))$ выигрыш первого игрока равен числу (см. (5)):

$$F(x^0, \phi_M(\cdot), \phi_{II}(\cdot)) = F(x(\cdot), I, J) = \sum_{t=1}^T a_{i_t j_t}.$$

Целью первого игрока (менеджера) является выбор такой к-стратегии $\phi_M^*(\cdot) \in \Phi_M$, которая максимизирует эту сумму. Однако такая цель для первого игрока не достижима, ввиду наличия противодействующего игрока (стремящегося выбрать такую к-стратегию $\phi_{II}^*(\cdot) \in \Phi_{II}$, которая минимизирует эту же сумму). Поэтому «максимизация» не может приниматься как подходящий принцип выбора «оптимальной» к-стратегии в динамической игре с природой.

$$= \begin{pmatrix} \max_{i_t} a_{i_t 1}(x(t)) - a_{11}(x(t)) & \dots & \max_{i_t} a_{i_t n}(x(t)) - a_{1n}(x(t)) \\ \max_{i_t} a_{i_t 1}(x(t)) - a_{21}(x(t)) & \dots & \max_{i_t} a_{i_t n}(x(t)) - a_{2n}(x(t)) \\ \dots & \dots & \dots \\ \max_{i_t} a_{i_t 1}(x(t)) - a_{m1}(x(t)) & \dots & \max_{i_t} a_{i_t n}(x(t)) - a_{mn}(x(t)) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Перейдем к определению наиболее подходящих принципов оптимального выбора к-стратегий игроком I в игре (6).

Каждой траектории $x(\cdot) \in X(x^0, T)$ поставим в соответствие число

$$V_B(x(\cdot)) = \sum_{t=1}^T \max_{i_t=1, \dots, m} \min_{j_t=1, \dots, n} a_{i_t j_t}(x(t)),$$

которое будем называть ценой Вальда для траектории $x(\cdot)$.

Определение 1. К-Стратегия $\phi_M^*(\cdot) \in \Phi_1$ называется оптимальной, по Вальду, к-стратегией первого игрока в игре (6), если

$$\begin{aligned} \min_{u_{II}(\cdot) \in \Phi_{II}} V_B(x(\cdot, x^0, u_M^*(\cdot), u_{II}(\cdot))) = \\ = \max_{u_M(\cdot) \in \Phi_M} \min_{u_{II}(\cdot) \in \Phi_{II}} V_B(x(\cdot, x^0, u_M(\cdot), u_{II}(\cdot))), \end{aligned}$$

где $u_M^*(\cdot) \in U_M$ – позиционное управление, входящее в состав к-стратегии $\phi_M^*(\cdot)$.

Каждой траектории $x(\cdot) \in X(x^0, T)$ поставим в соответствие число

$$\begin{aligned} V_G(x(\cdot)) = \\ = \sum_{t=1}^T \max_{i_t=1, \dots, m} \left[\lambda \min_{j_t=1, \dots, n} a_{i_t j_t}(x(t)) + (1 - \lambda) \max_{j_t=1, \dots, n} a_{i_t j_t}(x(t)) \right], \\ 0 \leq \lambda \leq 1, \end{aligned}$$

которое будем называть ценой Гурвица для траектории $x(\cdot)$.

Определение 2. К-Стратегия $\phi_M^*(\cdot) \in \Phi_1$ называется оптимальной, по Гурвицу, к-стратегией первого игрока в игре (6), если

$$\begin{aligned} \min_{u_{II}(\cdot) \in \Phi_{II}} V_G(x(\cdot, x^0, u_M^*(\cdot), u_{II}(\cdot))) = \\ = \max_{u_M(\cdot) \in \Phi_M} \min_{u_{II}(\cdot) \in \Phi_{II}} V_G(x(\cdot, x^0, u_M(\cdot), u_{II}(\cdot))), \end{aligned}$$

где $u_M^*(\cdot) \in U_M$ – позиционное управление, входящее в состав к-стратегии $\phi_M^*(\cdot)$.

Наряду с матрицей (4) в состоянии $x(t)$ введем в рассмотрение матрицу риска:

$$R(x(t)) = \|r_{i_t j_t}(x(t))\| =$$

Каждой траектории $x(\cdot) \in X(x^0, T)$ поставим в соответствие число

$$V_C(x(\cdot)) = \sum_{t=1}^T \min_{i_t=1,\dots,m} \max_{j_t=1,\dots,n} z_{i_t j_t}(x(t)),$$

которое будем называть оценкой риска по Сэвиджу для траектории $x(\cdot)$.

Определение 3. k -Стратегия $\phi_M^*(\cdot) \in \Phi_1$ называется оптимальной, по Сэвиджу, k -стратегией первого игрока в игре (6), если

$$\begin{aligned} \max_{u_{II}(\cdot) \in \Phi_{II}} V_C(x(\cdot, x^0, u_M^*(\cdot), u_{II}(\cdot))) = \\ = \min_{u_M(\cdot) \in \Phi_I, u_{II}(\cdot) \in \Phi_{II}} V_C(x(\cdot, x^0, u_M(\cdot), u_{II}(\cdot))), \end{aligned}$$

где $u_M^*(\cdot) \in U_M$ – позиционное управление, входящее в состав k -стратегии $\phi_M^*(\cdot)$.

Благодаря конечности множеств U_M^t и U_{II}^t ($t = 1, \dots, T$), оптимальные k -стратегии всех трех видов в игре (6) существуют. Основная сложность, как и в любых задачах оптимального управления, заключается в вычислительном аспекте, а именно – в большой размерности задачи и в трудоемкости алгоритма вычисления оптимальных k -стратегий.

Практически каждый из трех принципов выбора оптимальных k -стратегий отражает различные точки зрения по отношению к неопределенности. Оптимальность, по Вальду, отражает поведение пессимиста, считающего, что неопределенность будет проявляться наихудшим для предприятия образом.

Оптимальность, по Гурвицу, придерживается промежуточной позиции – допускает возможность как наихудшего, так и наилучшего проявления неопределенности. Принцип Сэвиджа, в отличие от двух предыдущих принципов, ориентирован на оценку риска (как следствия неопределенности). Как и принцип Вальда, он отражает поведение менеджера, не склонного к риску.

При выборе управленческого решения в условиях неопределенности рекомендуется анализировать все три принципа оптимальности и остановиться на том варианте, который наиболее предпочтителен с учетом реальной ситуации.

Литература

1. Глухов, В. В. Менеджмент / В. В. Глухов. – СПб: Питер, 2008. – 608 с.
2. Данилов, Н. Н. Основы математической теории оптимальных процессов / Н. Н. Данилов, В. В. Мешечкин. – Кемерово: Кузбассвузиздат, 2004. – 218 с.
3. Данилов, Н. Н. Теоретико-игровое моделирование конфликтных ситуаций / Н. Н. Данилов. – Томск: Изд-во ТГУ, 2005. – 120 с.
4. Математический аппарат экономического моделирования / Под ред. Е. Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1983.
5. Данилов, Н. Н. Курс математической экономики / Н. Н. Данилов. – М.: Высшая школа, 2006. – 407 с.
6. Красс, М. С. Математические методы и модели для магистрантов экономики / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – СПб.: Питер, 2006. – 496 с.