УДК 519.872

# ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $MAP^{(2)}|GI_2|\infty$ МЕТОДОМ ПРОСЕЯННОГО ПОТОКА

*И. А. Синякова, С. П. Моисеева*

# INVESTIGATION OF THE $MAP^{(2)|}GI_2|\infty$ SYSTEM WITH THE METHOD OF SCREENING FLOW

*I. A. Sinaykova, S. P. Moiseeva*

***Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)» Федерального агентства по образованию РФ по проекту «Разработка методов исследования немарковских систем массового обслуживания и их применения к сложным экономическим системам и компьютерным сетям связи».***

В работе проведено исследование немарковской модели параллельного обслуживания сдвоенных заявок в системе массового обслуживания, состоящей из двух блоков обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов. На вход системы поступает MAP-поток сдвоенных заявок. Для исследования таких систем массового обслуживания предлагается оригинальный метод просеянного потока. Получены вид характеристической функции для рассматриваемой системы и асимптотические приближенные равенства первого и второго порядков.

In this paper we study non-Markov models of parallel double service applications in a queuing system consisting of two blocks of service with an unlimited number of servers. The input to the system MAP-flow dual applications comes. The original method screening flow is proposed for investigating these queuing systems. We received the form of the characteristic function for the system and the asymptotic approximate equality of the first and second orders.

***Ключевые слова:*** немарковские системы с неограниченным числом обслуживающих приборов, метод просеянного потока, параллельное обслуживание, метод асимптотического анализа.

***Keywords:*** non-Markov system with an unlimited number of servers, the method screening flow, parallel service, the method of asymptotic analysis.

## 1. Постановка задачи

На современном этапе развития теории массового обслуживания одним из востребованных направлений является исследование систем массового обслуживания (СМО) с групповым поступлением заявок и параллельным обслуживанием [1, 2]. Область применения таких СМО довольно обширна, например, при моделировании современных информационно-вычислительных систем необходимо учитывать пакетный характер трафика, а также один из основных принципов при проектировании современных компьютерных сетей – параллельность процессов обработки информации [6, 7]. Поэтому возникает необходимость в разработке новых математических моделей систем массового обслуживания, а именно, систем с неординарными входящими потоками и различными вариантами обслуживания, в том числе с двумя и более блоками обслуживания.

В качестве математической модели процесса распараллеливания вычислений предлагается рассмотреть систему массового обслуживания с двумя блоками обслуживания, каждый из которых содержит неограниченное число приборов (рис. 1).

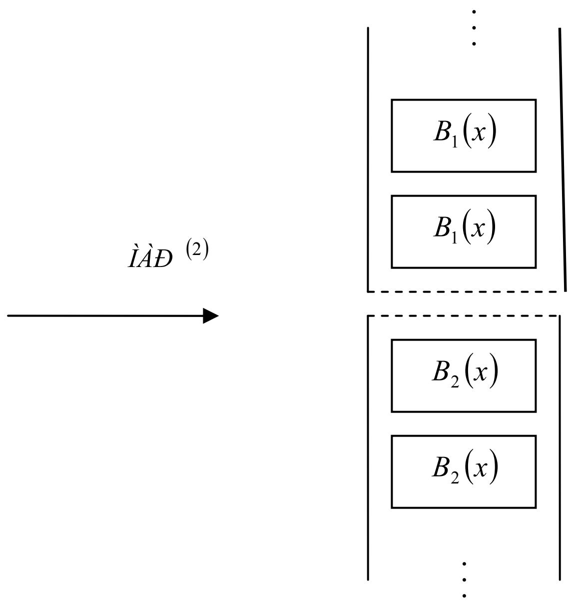


*Рис. 1.* ***СМО с параллельным обслуживанием сдвоенных заявок***

Пусть на вход системы обслуживания поступает MAP-поток сдвоенных заявок, то есть в момент наступления события в рассматриваемом потоке в систему одновременно поступают две заявки. Будем считать, что MAP-поток определяется эргодической цепью Маркова $k(t)$, заданной матрицей $Q$ – её инфинитезимальных характеристик $q_{k1k2}$, набором неотрицательных величин $\lambda_k \geq 0$ и набором вероятностей $d_{k1k2}$ для любых $k_1 \neq k_2$ [3].

Дисциплина обслуживания определяется тем, что одна из этих заявок поступает в первый, а другая во второй блоки обслуживания и занимает любой из свободных приборов, на котором выполняется ее обслуживание. Продолжительности обслуживания различных заявок стохастически независимы и одинаково распределены для всех приборов соответствующего блока [4]. Пусть $B_1(x)$, $B_2(x)$ функции распределения времени обслуживания для первого и второго блоков соответственно.

Обозначим $i_1(t), i_2(t)$ – число приборов, занятых в момент времени $t$ в первом и втором блоках обслуживания, а стационарное распределение вероятностей значений процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$ обозначим

$$\ddot{I}\left(i_1,i_2\right)=P\left\{i_1\left(t\right)=i_1,i_2\left(t\right)=i_2\right\}.$$

Для рассматриваемой системы ни двумерный случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t)\}$ изменения во времени состояний системы, ни трехмерный случайный процесс $\{k(t), i_1(t), i_2(t)\}$ не являются марковскими.

Для исследования рассматриваемой системы $MAP^{(2)}|GI_2|\infty$ применим метод просеянного потока [5].

## 2. Метод просеянного потока

Предлагаемый метод позволяет проблему исследования немарковской системы обслуживания с неограниченным числом приборов свести к задаче анализа нестационарного марковизируемого потока.

На оси времени $t$ отметим моменты наступления событий этого потока. Выделим некоторый момент времени $t_1$. Пусть $t_1 = 0$. Будем полагать, что заявки входящего потока, поступившие в систему в момент времени $t<t_1 = 0$ формируют события двумерного просеянного потока, с вероятностями $S_1(t) = 1\text{-}B_1(\text{-}t)$, $S_2(t) = 1\text{-}B_2(\text{-}t)$, а с вероятностью 1- $S_1(t)$ и 1- $S_2(t)$ не рассматриваются.

Обозначим $\{n_1(t), n_2(t)\}$ – двумерный процесс, компоненты которого характеризуют число событий просеянных потоков, наступивших до момента времени $t$.

Если в некоторый начальный момент времени $t_0 < t_1$ система обслуживания свободна, то есть в ней нет обслуживаемых заявок, то для момента времени $t_1$ выполняется равенство: $i_1(t) = n_1(t)$, $i_2(t) = n_2(t)$, то есть число $i_k(t_1)$ приборов, занятых в $k$-м блоке обслуживания рассматриваемой системы обслуживания, равно числу $n_k(t_1)$ событий просеянного потока, наступивших до момента времени $t_1$.

Для распределения вероятностей:

$$P(k,n_1,n_2,t) = \\ = P\left\{k(t)=k, n_1(t)=n_1, n_2(t)=n_2\right\},$$

по формуле полной вероятности запишем следующие равенство [4]:

$$\begin{aligned}
&P\left(k,n_1,n_2,t+\Delta t\right)=P\left(k,n_1,n_2,t\right)\left(1-\lambda_k\Delta t\right)\left(1+q_{kk}\Delta t\right)+P\left(k,n_1-1,n_2-1,t\right)\lambda_k\Delta t S_1\left(t\right)S_2\left(t\right)+\\
&+P\left(k,n_1-1,n_2,t\right)\lambda_k\Delta t S_1\left(t\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)+P\left(k,n_1,n_2-1,t\right)\lambda_k\Delta t S_2\left(t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)+\\
&+P\left(k,n_1,n_2,t\right)\lambda_k\Delta t\left(1-S_1\left(t\right)\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)+\sum_{\nu\neq k}\left\{P\left(\nu,n_1,n_2,t\right)\left(1-d_{\nu k}\right)+\right.\\
&+\left[P\left(\nu,n_1-1,n_2-1,t\right)S_1\left(t\right)S_2\left(t\right)+P\left(\nu,n_1-1,n_2,t\right)S_1\left(t\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)+\right.\\
&\left.\left.+P\left(\nu,n_1,n_2-1,t\right)S_2\left(t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)+P\left(k,n_1,n_2,t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)\right]d_{\nu k}\right\}q_{\nu k}\Delta t+o\left(\Delta t\right).
\end{aligned}$$

Далее запишем систему дифференциальных уравнений Колмогорова [3]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P\left(k,n_1,n_2,t\right)}{\partial t}&=P\left(k,n_1,n_2,t\right)\left(-\lambda_k+q_{kk}\right)+\left\{P\left(k,n_1-1,n_2-1,t\right)S_1\left(t\right)S_2\left(t\right)+\right.\\
&+P\left(k,n_1-1,n_2,t\right)S_1\left(t\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)+P\left(k,n_1,n_2-1,t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)S_2\left(t\right)+\\
&\left.+P\left(k,n_1,n_2,t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)\right\}\lambda_k+\sum_{\nu\neq k}\left\{P\left(\nu,n_1,n_2,t\right)\left(1-d_{\nu k}\right)+\right.\\
&+\left[P\left(\nu,n_1-1,n_2-1,t\right)S_1\left(t\right)S_2\left(t\right)+P\left(\nu,n_1-1,n_2,t\right)S_1\left(t\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)+\right.\\
&\left.\left.+P\left(\nu,n_1,n_2-1,t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)S_2\left(t\right)+P\left(\nu,n_1,n_2,t\right)\left(1-S_1\left(t\right)\right)\left(1-S_2\left(t\right)\right)\right]d_{\nu k}\right\}q_{\nu k}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Начальное условие для решения $P(k,n_1,n_2,t)$ в момент времени $t_0$ определим в виде:

$$P(k,n_1,n_2,t_0)=\begin{cases}R(k), & \text{если} \quad n_1,n_2=0,\\ 0, & \text{если} \quad n_1,n_2>0.\end{cases}$$

Обозначив

$$H\left(k,u,w,t\right)=\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}e^{jun_1}e^{jwn_2}P\left(k,n_1,n_2,t\right)=R\left(k\right)M\left\{e^{jun_1}e^{jwn_2}\left|k\left(t\right)=k\right.\right\},$$

из (1) для этих функций получим задачу Коши [6]:

$$\frac{\partial H\left(k,u,w,t\right)}{\partial t}=\lambda_k\left[\left(e^{ju}-1\right)S_1\left(t\right)+\left(e^{jw}-1\right)S_2\left(t\right)+\left(e^{ju}-1\right)\left(e^{jw}-1\right)S_1\left(t\right)S_1\left(t\right)\right]H\left(k,u,w,t\right)+$$

$$+\sum_{\nu} H(\nu,u,w,t) q_{\nu k} + \sum_{\nu} H(\nu,u,w,t)\left\{\left(1+\left(e^{ju}-1\right)S_1(t)+\left(e^{jw}-1\right)S_2(t)+\left(e^{ju}-1\right)\left(e^{jw}-1\right)S_1(t)S_2(t)\right)d_{\nu k}\right\}q_{\nu k},$$

$$H(k,u,w,t_0) = R(k).$$

Эту систему запишем в матричной форме, обозначив вектор строки:

$H(u,w,t)=\{H(1,u,w,t), H(2,u,w,t),\ldots\}$,

$R=\{R(1),R(1),\ldots\}$ – вектор стационарного распределения управляющей цепи Маркова

и следующие матрицы:

$Q$ - матрица инфинитезимальных характеристик $q_{k1k2}$;

$\Lambda$ - диагональная матрица с элементами $\lambda_k$ по главной диагонали;

$A$ - матрица из элементов $d_{k1k2}\, q_{k1k2}$;

$B = \Lambda + A$.

Тогда систему (2) запишем в виде:

$$\frac{\partial H(u,w,t)}{\partial t} = H(u,w,t)\left\{Q+\begin{bmatrix}\left(e^{ju}-1\right)S_1(t)+\\ +\left(e^{jw}-1\right)S_2(t)+\\ +\left(e^{ju}-1\right)\left(e^{jw}-1\right)S_1(t)S_2(t)\end{bmatrix}B\right\},$$

$$H(u,w,t_0) = R. \quad (2)$$

### 3. Метод асимптотического анализа системы $MAP^{(2)}|GI_2|\infty$ в условии растущего времени обслуживания

Уравнение (2), определяющее характеристики рассматриваемой системы обслуживания, будем решать в асимптотическом условии растущего времени обслуживания, полагая, что среднее значение времени обслуживания в каждом блоке $b_1\to\infty$, $b_2\to\infty$ [5].

#### 3.1. Асимптотика первого порядка

Обозначим $b_1 = 1/\varepsilon$, $b_2 = 1/\varepsilon$ и в уравнении (2) выполним замены:

$$t\varepsilon = \tau,\ t_0\varepsilon = \tau_0,\ S_1(t) = S_1(\tau),$$
$$S_2(t) = S_2(\tau),\ u = \varepsilon x,\ w = \varepsilon y,$$
$$H(u,w,t) = F_1(x,y,\tau,\varepsilon). \quad (3)$$

Для $F_1(x,y,\tau,\varepsilon)$ получим уравнение:

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(x,y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = F_1(x,y,\tau,\varepsilon)\left\{Q + \left[\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)S_1(\tau)+\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)S_2(\tau)+\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)S_1(\tau)S_2(\tau)\right]B\right\}. \quad (4)$$

Докажем следующее утверждение.

**Теорема**. Предельное (при $\varepsilon\to 0$) значение $F_1(x, y, \tau)$ решения $F_1(x, y, \tau, \varepsilon)$ уравнения (4) имеет вид:

$$F_1(x,y,\tau) = R\exp\left\{jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + jy\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z)dz\right\}, \quad (5)$$

где величина $\kappa_1$ определена равенством

$$\kappa_1 = RBE. \quad (6)$$

**Доказательство.** В уравнении (4) выполним предельный переход при $\varepsilon\to 0$

$$F_1(x,y,\tau)Q = 0.$$

Поэтому ее решение имеет вид:

$$F_1(x,y,\tau) = \Phi_1(x,y,\tau)R, \quad (7)$$

в котором скалярную функцию $\Phi_1(x,y,\tau)$ определим следующим образом.

Просуммируем все уравнения системы (4), тогда получим:

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(x,y,\tau,\varepsilon)}{\partial t}E = F_1(x,y,\tau,\varepsilon)\left\{\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)S_1(\tau)+\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)S_2(\tau)+\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)S_1(\tau)S_2(\tau)\right\}BE.$$

Поделим левую и правую части этого равенства на $\varepsilon$ и, полагая $\varepsilon\to 0$, получим, что для $F_1(x, y, \tau)$ выполняется равенство:

$$\frac{\partial F_1(x,y,\tau)}{\partial \tau}E = F_1(x,y,\tau)\left\{jxS_1(\tau)+jyS_2(\tau)\right\}BE,$$

подставляя в которое (7) и учитывая (6) и что $RE = 1$, получим для функции $\Phi_1(x,y,\tau)$ линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial \Phi_1(x,y,\tau)}{\partial \tau} = \Phi_1(x,y,\tau)\kappa_1\left\{jxS_1(\tau)+jyS_2(\tau)\right\},$$

решение которого имеет вид:

$$\Phi_1(x,y,\tau) = \exp\left\{jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + jy\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z)dz\right\}.$$

Подставляя в (7) получим:

$$F_1(x,y,\tau) = R\exp\left\{jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + jy\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z)dz\right\}.$$

В силу замен (3) и равенства (5) можно записать асимптотическое, при $\varepsilon\to 0$, приближенное равенство:

$$H(u,w,t) = F_1(x,y,\tau,\varepsilon) \approx F_1(x,y,\tau) = R\exp\left\{jx\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + jy\kappa_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z)dz\right\} =$$

$$= R\exp\left\{ jx\kappa_1\int_{t_0}^{t} S_1(z)dz + jy\kappa_1\int_{t_0}^{t} S_2(z)dz \right\},$$

поэтому для характеристической функции [7] величины $\{n_1(t),n_2(t)\}$ запишем:

$$Me^{j(u+w)n_1(t)n_2(t)} = H(u,w,t)E =$$
$$= \exp\left\{ ju\kappa_1\int_{t_0}^{t} S_1(z)dz + jw\kappa_1\int_{t_0}^{t} S_2(z)dz \right\}.$$

При $t = t_1 = 0$ для характеристической функции процесса $\{i_1(t),i_2(t)\}$ в стационарном режиме получим:

$$Me^{j(u+w)n_1(t)n_2(t)} = H(u,w,0)E =$$
$$= \exp\left\{ ju\kappa_1\int_0^{x_0}\left(1-B_1(z)\right)dz + jw\kappa_1\int_0^{x_0}\left(1-B_2(z)\right)dz \right\} =$$
$$= \exp\left\{ ju\kappa_1 b_1 + jw\kappa_1 b_2 \right\}.$$

Полученное равенство будем называть асимптотикой первого порядка для системы обслуживания $MAP^{(2)}|GI_2|\infty$.

### 3.2. Асимптотика второго порядка

Решение $H(u,w,t)$ уравнения (2) запишем в виде произведения:

$$H(u,w,t) = H_2(u,w,t)\exp\left\{ juk_1\int_{t_0}^{t} S_1(z)dz + jwk_1\int_{t_0}^{t} S_2(z)dz \right\}, \tag{8}$$

подставляя которое в (2), получим уравнение для $H_2(u,w,t)$ в виде:

$$\frac{\partial H_2(u,w,t)}{\partial t}\exp\left\{ juk_1\int_{t_0}^{t} S_1(z)dz + jwk_1\int_{t_0}^{t} S_2(z)dz \right\} +$$
$$+H_2(u,w,t)\left\{ juk_1S_1(t) + jwk_1S_2(t)\right\}\exp\left\{ juk_1\int_{t_0}^{t} S_1(z)dz + \right.$$
$$\left. + jwk_1\int_{t_0}^{t} S_2(z)dz \right\} = H_2(u,w,t)\exp\left\{ juk_1\int_{t_0}^{t} S_1(z)dz + jwk_1\int_{t_0}^{t} S_2(z)dz \right\}\times$$
$$\times\left\{ Q + \begin{bmatrix} \left(e^{ju}-1\right)S_1(t) + \left(e^{jw}-1\right)S_2(t) + \\ +\left(e^{j(u+w)}-1\right)S_1(t)S_2(t) + \left(e^{ju}-1\right)S_1(t)S_2(t) + \left(e^{jw}-1\right)S_1(t)S_2(t) \end{bmatrix} B \right\}.$$

Следовательно, $H_2(u,w,t)$ является решением уравнения:

$$\frac{\partial H_2(x,y,t)}{\partial t} =$$
$$= H_2(x,y,t)\left\{ Q + \begin{bmatrix} \left(e^{ju}-1\right)S_1(t) + \left(e^{jw}-1\right)S_2(t) + \left(e^{ju}-1\right)\left(e^{jw}-1\right)S_1(t)S_2(t)\right]B - \\ -\left[ juk_1S_1(t) + jwk_1S_2(t)\right] \end{bmatrix} I \right\}, \tag{9}$$

где $I$ – единичная диагональная матрица.

Обозначив $b_1 = 1/\varepsilon^2$, $b_2 = 1/\varepsilon^2$, в уравнении (9) выполним замены:

$$t\varepsilon^2 = \tau,\ t_0\varepsilon^2 = \tau_0,\ S_1(t) = S_1(\tau),$$
$$S_2(t) = S_2(\tau),\ u = \varepsilon x\ w = \varepsilon y,$$
$$H_2(u,w,t) = F_2(x,y,\tau,\varepsilon) \tag{10}$$

и получим:

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(x,y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =$$
$$= F_2(x,y,\tau,\varepsilon)\left\{ \begin{matrix} Q + \left[\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)S_1(\tau) + \right. \\ +\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)S_2(\tau) \end{matrix} \right. +$$
$$+\left(e^{j\varepsilon x}-1\right)\left(e^{j\varepsilon y}-1\right)\cdot$$
$$\left. \begin{matrix} \cdot S_1(\tau)S_2(\tau)\right]B - \\ -\left[ j\varepsilon xk_1S_1(\tau) + j\varepsilon yk_1S_2(\tau)\right]I \end{matrix} \right\}. \tag{11}$$

**Теорема 2.** Предельное (при $\varepsilon\to0$) значение $F_2(x,y,\tau)$ решения $F_2(x,y,\tau,\varepsilon)$ уравнения (11) имеет вид:

$$F_2(x,y,\tau) =$$
$$= R\exp\left\{ \frac{(jx)^2}{2}\left( k_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)dz + 2k_2\int_{\tau_0}^{\tau} S_1^2(z)dz \right) + \right.$$
$$+\frac{(jy)^2}{2}\left( k_1\int_{\tau_0}^{\tau} S_2(z)dz + \right.$$

$$+2k_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_2^2(z)\,dz\Bigg) + \frac{j^2xy}{2}(2k_1+4k_2)\int\limits_{\tau_0}^{\tau} S_1(z)S_2(z)\,dz\Bigg\}, \qquad (12)$$

где величина к$_2$ определяется равенством

$$k_2 = f_2(B-k_1I)E, \qquad (13)$$

а вектор $f_2$ удовлетворяет условию $f_2E$=0 и является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений

$$f_2Q + R(B-k_1I) = 0\,. \qquad (14)$$

**Доказательство.** Решение $F_2(x,y,\tau,\varepsilon)$ уравнения (11) запишем в виде разложения:

$$F_2(x,y,\tau,\varepsilon) = \Phi_2(x,y,\tau)\{R + j\varepsilon xS_1(\tau)f_2 + j\varepsilon yS_2(\tau)f_2\} + o(\varepsilon^2), \qquad (15)$$

подставив которое в (11), получим:

$$o(\varepsilon^2) = \Phi_2(x,y,\tau)\{j\varepsilon(x\,S_1(\tau)f_2 + yS_2(\tau)f_2)Q + Rj\varepsilon[xS_1(\tau)+yS_2(\tau)][B-k_1I]\},$$

т. к. $RQ$ = 1, то вектор $f_2$ является решением неоднородной системы линейных алгебраических уравнений (14).

Для нахождения скалярной функции $\Phi_2(x,y,\tau)$ просуммируем все уравнения системы (11), получим равенство:

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2(x,y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}E = F_2(x,y,\tau,\varepsilon)\Big\{\Big[\big(e^{j\varepsilon x}-1\big)S_1(\tau) + \big(e^{j\varepsilon y}-1\big)S_2(\tau) + \big(e^{j\varepsilon x}-1\big)\big(e^{j\varepsilon y}-1\big)\cdot$$

$$\cdot S_1(\tau)S_2(\tau)\Big]B - \big[j\varepsilon\big(x\,k_1S_1(\tau)+yk_1S_2(\tau)\big)\big]I\Big\}E = F_2(x,y,\tau,\varepsilon)\{j\varepsilon x(B-k_1I)S_1(\tau) +$$

$$+j\varepsilon y(B-k_1I)S_2(\tau) + \left[\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}S_1(\tau) + \frac{(j\varepsilon y)^2}{2}S_2(\tau) + (j\varepsilon)^2xyS_1(\tau)S_2(\tau)\right]B\}E =$$

$$= F_2(x,y,\tau,\varepsilon)\left\{j\varepsilon\big[\big(xS_1(\tau)+yS_2(\tau)\big)(B-k_1I)\big] + \left[\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}S_1(\tau)+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}S_2(\tau)+(j\varepsilon)^2xyS_1(\tau)S_2(\tau)\right]B\right\}E + o(\varepsilon^2).$$

Подставляя разложение (15) в последнее равенство, получаем:

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi_2(x,y,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \Phi_2(x,y,\tau)\{j\varepsilon(x\,S_1(\tau)+yS_2(\tau)R(B-k_1I)E +$$

$$+\left[\frac{(j\varepsilon x)^2}{2}S_1(\tau)+\frac{(j\varepsilon y)^2}{2}S_2(\tau)+(j\varepsilon)^2xyS_1(\tau)S_2(\tau)\right]RBE +$$

$$+(j\varepsilon)^2\big(xS_1(\tau)+yS_2(\tau)\big)^2f_2(B-k_1I)E\} + o(\varepsilon^3),$$

т. к., $RE$=1,к$_2$=$f_2$($B$-к$_1I$)$E$ и $RBE$=1, получим, что функция $\Phi_2(x,y,\tau)$ является решением уравнения:

$$\frac{\partial\Phi_2(x,y,\tau)}{\partial\tau} = \Phi_2(x,y,\tau)\left\{\begin{matrix}\frac{(jx)^2}{2}[k_1S_1(\tau)+2k_2S_1^2(\tau)] + \\ +\frac{(jy)^2}{2}[k_1S_2(\tau)+2k_2S_2^2(\tau)]\end{matrix} + \frac{j^2xy}{2}[2k_1+4k_2]S_1(\tau)S_2(\tau)\right\}, \qquad (16)$$

следовательно, решение $\Phi_2(x,y,\tau)$ уравнение (16) имеет вид:

$$\Phi_2(x,y,\tau) = \exp\left\{\frac{(jx)^2}{2}\left(k_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)dz + 2k_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1^2(z)dz\right) + \frac{(jy)^2}{2}\left(k_1\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_2(z)dz + 2k_2\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_2^2(z)dz\right) + \frac{j^2xy}{2}(2k_1+4k_2)\int\limits_{\tau_0}^{\tau}S_1(z)S_2(z)dz\right\}.$$

Подставляя которое в (15) и полагая ε = 0, получим равенство (12). Теорема доказана.

В силу замен (10), а также равенства (12) для $H_2(u,w,t)$, можно записать асимптотическое (приближенное) равенство:

$$H_2(u,w,t) = F_2(x,y,\tau,\varepsilon) \approx F_2(x,y,\tau) =$$

$$= R\exp\left\{\frac{(ju)^2}{2}\left[k_1\int\limits_{t_0}^{t}S_1(z)dz + 2k_2\int\limits_{t_0}^{t}S_1^2(z)dz\right] + \frac{(jw)^2}{2}\left[k_1\int\limits_{t_0}^{t}S_2(z)dz + 2k_2\int\limits_{t_0}^{t}S_2^2(z)dz\right] + \frac{j^2uw}{2}[2k_1+4k_2]\int\limits_{t_0}^{t}S_1(z)S_2(z)dz\right\}.$$

Обозначим:

$$\int_{-\infty}^{0} S_1^2(z)dz = \int_{-\infty}^{0}\left(1-B_1(-z)\right)^2 dz = \int_{0}^{\infty}\left(1-B_1(z)\right)^2 dz = \beta_1,$$

$$\int_{-\infty}^{0} S_2^2(z)dz = \int_{-\infty}^{0}\left(1-B_2(-z)\right)^2 dz = \int_{0}^{\infty}\left(1-B_2(z)\right)^2 dz = \beta_2,$$

$$\int_{-\infty}^{0} S_1(z)S_2(z)dz = \int_{-\infty}^{0}\left(1-B_1(-z)\right)\left(1-B_2(-z)\right)dz = \int_{0}^{\infty}\left(1-B_1(-z)\right)\left(1-B_2(-z)\right)dz = \beta_{12}.$$

Тогда, при $t = t_1 = 0$ и $t_0 = -\infty$, в силу равенства (15) получим:

$$H(u,w,0) = H_2(u,w,0)\exp\left\{juk_1b_1 + jwk_1b_2\right\} =$$
$$= R\exp\left\{ju\kappa_1b_1 + jw\kappa_1b_2 + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1b_1 + 2\kappa_2\beta_1\right] + \frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1b_2 + 2\kappa_2\beta_2\right] + \frac{j^2uw}{2}\left[2\kappa_1 + 4\kappa_2\right]\beta_{12}\right\}.$$

Следовательно, для характеристических функций [7] величины $\{n_1(t),n_2(t)\}$ можно записать равенство:

$$Me^{j(un_1(t)+wn_2(t))} = H(u,w,t)E =$$
$$= \exp\left\{ju\kappa_1\int_{-\infty}^{0} S_1(z)dz + jw\kappa_1\int_{-\infty}^{0} S_2(z)dz + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1b_1 + 2\kappa_2\beta_1\right] + \frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1b_2 + 2\kappa_2\beta_2\right] + \frac{j^2uw}{2}\left[2\kappa_1 + 4\kappa_2\right]\beta_{12}\right\}.$$

Следовательно, для характеристических функций процессов $i_1(t)$ и $i_2(t)$ и в стационарном режиме можно записать равенство:

$$h_1(u) = Me^{jui_1(t)} = Me^{jun_1(0)} = H(u,0,0)E =$$
$$= \exp\left\{ju\kappa_1b_1 + \frac{(ju)^2}{2}\left[\kappa_1b_1 + 2\kappa_2\beta_1\right]\right\},$$

$$h_2(w) = Me^{jwi_2(t)} = Me^{jwn_2(0)} = H(0,w,0)E =$$
$$= \exp\left\{jw\kappa_1b_2 + \frac{(jw)^2}{2}\left[\kappa_1b_2 + 2\kappa_2\beta_2\right]\right\},$$

которое будем называть асимптотикой второго порядка для системы обслуживания $MAP^{(2)}|GI_2|\infty$.

**Литература**


1. Эндрюс, Г. Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования / Г. Р. Эндрюс: [пер. с англ.]. – М.: Вильямс, 2003. – 512 с.
2. Топорков, В. В. Модели распределенных вычислений / В. В. Топорков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 320 с.
3. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: НТЛ, 2005. – 228 с.
4. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания. – Изд. 3-е, испр. и доп. / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: КомКнига, 2005. – 408 с.
5. Назаров, А. А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А. А. Назаров, С. П. Моисеева. – Томск: НТЛ, 2006. – 112 с.
6. Эльцгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльцгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.
7. Назаров, А. А. Теория вероятностей и случайных процессов / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: НТЛ, 2006. – 204 с.