

УДК 27 21 00

РАЗБИЕНИЕ КЛАССА D НА ПОДКЛАССЫ

Т. М. Пуолокайнен

CLASSIFICATION CLASS D OF POLYHEDRONS

T. M. Puolokhainen

Настоящая работа посвящена разбиению выпуклых многогранников одного класса на подклассы. Принципом классификации является количество направлений в пространстве, параллельно которым расположены грани фрагментов призматических частей, принадлежащих границе многогранника. Рассматриваемая задача связана с проблемой Хадвигера о покрытии выпуклых геометрических тел их образами при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы.

The paper is continuation of the author's series of paper devoted to the solution of Hadwiger's problem connected with covering of convex polyhedrons with help of body images at homothety. The problem under discussion can be described as follows: to give the classification of all convex polyhedrons the surface of which includes a special part.

Ключевые слова: выпуклые многогранники, классификация, покрытие, гомотетия.

Keywords: convex polyhedrons, classification, covering, homothety.

Введение

В работе [1] Хадвигер сформулировал гипотезу, согласно которой для покрытия любого выпуклого тела в n -мерном евклидовом пространстве достаточно 2^n тел меньших размеров, гомотетичных данному телу. В работе [2, с. 34 – 40] автора все выпуклые многогранники трехмерного евклидова пространства были разбиты на четыре класса: A , B , C , D . В работе [3, с. 151 – 154] автора была осуществлена классификация многогранников класса A . Работа [4] автора посвящена покрытию многогранников класса A их меньшими копиями при гомотетии в трехмерном евклидовом пространстве. В работе [2, с. 34 – 40] автора к классу B были отнесены выпуклые многогранники, поверхность которых содержит одну или несколько призматических частей. В работе [2, с. 34 – 40] автора к классу C были отнесены выпуклые многогранники, граница которых содержит, по крайней мере, одну поверхность переходного типа и не содержит призматических частей. Настоящая статья посвящена разбиению всех многогранников класса D на подклассы. Классификация многогранников класса D необходима для того, чтобы решить задачу покрытия не отдельно взятого многогранника этого класса его образами при гомотетии с коэффициентами, меньшими единицы, а всего класса выпуклых многогранников. Например, если многогранник принадлежит первому подклассу класса D , то его покрытие можно осуществить точно так же, как покрытие многогранника класса A , если нормали граней удовлетворяют дополнительному условию. Если это дополнительное условие не выполнено, то для покрытия многогранника найден другой прием. Аналогично может быть осуществлено покрытие многогранников второго и третьего подкласса класса D .

1. Некоторые определения

В работе [2, с. 34 – 40] автора введено понятие призматической части поверхности. Напомним это определение.

Определение 1. Пусть M — выпуклый многогранник и q — некоторая прямая в пространстве. Пусть имеется n граней многогранника M , параллельных прямой q ($n \geq 3$). Пусть все n граней, параллельных прямой q , образуют одну компоненту связности. Пусть эта компонента связности гомеоморфна кольцу между двумя окружностями. Граница компоненты связности состоит из двух замкнутых непересекающихся ломаных, каждая из которых топологически эквивалентна окружности. В этом случае будем говорить, что граница выпуклого многогранника содержит призматическую часть.

В работе автора [2, с. 34 – 40] дано определение поверхности переходного типа. Напомним это определение.

Пусть на плоскости заданы две окружности w и w_1 , центры и радиусы которых различны. Пусть эти окружности касаются внутренним образом в точке Q . Множество точек плоскости, заключенных между двумя окружностями, включая окружности и точку Q , обозначим W .

Определение 2. Рассмотрим выпуклый многогранник M . q — некоторая прямая в пространстве. Пусть имеется n граней многогранника M , параллельных прямой q ($n \geq 3$), и образующих одну компоненту связности, гомеоморфную множеству W . Компоненту связности границы многогранника, топологически эквивалентную множеству W , назовем многогранной поверхностью переходного типа.

Дадим определение фрагмента призматической части поверхности.

Определение 3. Рассмотрим все грани выпуклого многогранника, параллельные некоторой прямой m в пространстве. Пусть эти грани образуют одну компоненту связности. Пусть эта компонента связности границы многогранника состоит не менее, чем из трех граней и топологически эквивалентна кругу. Такую часть поверхности многогранника назовем фрагментом призматической части первого вида.

Замечание 1. Граница фрагмента призматической части первого вида представляет собой простую замкнутую пространственную ломаную.

Рассмотрим множество кругов $w_1, w_2, \dots, w_n$, где $n \geq 2$. Пусть любые два соседних круга касаются, при этом не соседние круги общих точек не имеют. Обозначим точки касания пар соседних кругов

$$A_1 = w_1 \cap w_2; A_2 = w_2 \cap w_3; \dots; A_{n-1} = w_{n-1} \cap w_n.$$

Круги w_1 и w_n не имеют общих точек. Обозначим объединение всех таких кругов U .

Определение 4. Пусть имеется выпуклый многогранник. Рассмотрим все его грани, параллельные некоторой прямой m пространства. Пусть эти грани образуют компоненту связности, топологически эквивалентную множеству U . Такое объединение граней многогранника назовем *фрагментом призматической части второго вида*.

Замечание 2. Граница фрагмента призматической части второго вида представляет собой объединение n простых замкнутых ломаных. Каждые две соседние простые замкнутые ломаные имеют одну общую вершину. Граница фрагмента призматической части второго вида содержит $n-1$ общих вершин.

Дадим определение многогранника класса D .

Определение 5. К классу D отнесем такие выпуклые многогранники, граница которых не содержит призматической части, не содержит поверхности переходного типа, но содержит один или несколько фрагментов призматической части первого или второго вида.

2. Разбиение класса D на подклассы

Все многогранники класса D разобьем на три подкласса, каждый из которых будем называть классом. Принципом разбиения выбираем количество направлений, параллельно которым расположены фрагменты призматических частей, лежащие на границе многогранника.

К классу $D1$ отнесем многогранники класса D , граница которых содержит один или несколько фрагментов призматических частей, грани которых параллельны *одному* направлению в пространстве.

Пусть m и q – две не параллельные прямые в пространстве. Пусть границе выпуклого многогранника M класса D принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой m . Пусть границе того же многогранника принадлежит еще один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой q . В этом случае многогранник отнесем к классу $D2$.

Пусть m , p и q – три попарно не параллельные прямые в пространстве. Пусть границе выпуклого многогранника класса D принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой m . Пусть поверхности многогранника M принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой p . Пусть, кроме того, границе многогранника M принадлежит один или несколько фрагментов призматических частей, параллельных прямой q . В этом случае многогранник отнесем к классу $D3$.

Замечание 3. Фрагменты призматических частей, о которых говорится в описании классов $D1$, $D2$, $D3$, могут быть как *первого*, так и *второго* вида.

Замечание 4. Многогранники класса D могут содержать фрагменты призматических частей, параллельные *четырем и более* направлениям в пространстве. Все такие многогранники класса D также отнесем к классу $D3$.

3. Классификация многогранников класса $D1$

Напомним, что в класс $D1$ вошли многогранники, граница которых содержит один или несколько фрагментов призматических частей. Каждая грань фрагмента (фрагментов) призматической части параллельна одному направлению в пространстве. Все многогранники класса $D1$ разобьем на два класса.

1) Многогранники класса $D1$, содержащие *один* фрагмент призматической части (первого или второго вида).

2) Многогранники класса $D1$, содержащие *два и более* фрагментов призматической части (первого или второго вида).

Сначала рассмотрим многогранники класса $D1$, содержащие один фрагмент призматической части *первого вида*. Все такие многогранники разделим на подклассы по следующему принципу. Рассмотрим единичные векторы внешних нормалей к каждой грани фрагмента призматической части. Пусть фрагменту призматической части принадлежат грани $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$. Обозначим единичные векторы внешних нормалей граней $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ соответственно $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_k$. Перенесем единичные векторы внешних нормалей граней на единичную сферу. Все эти векторы лежат в одной плоскости. В работе [2, с. 34 – 40] автора было доказано, что угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_k$ меньше 360° . Все многогранники класса $D1$, содержащие один фрагмент призматической части первого вида, разделим на три множества по углу между векторами. Для этого обозначим угол между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_k$ буквой ϕ :

$$1) \phi < 180^\circ,$$

$$2) \phi = 180^\circ,$$

$$3) \phi > 180^\circ.$$

Многогранники класса $D1$, содержащие *один* фрагмент призматической части *второго вида*, также можно классифицировать по углу, который образуют векторы единичных внешних нормалей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_k$.

В работе [2] автора сформулирована теорема, в которой описано свойство фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению.

Теорема. Рассмотрим многогранник класса $D1$, фрагмент призматической части которого параллелен направлению q в пространстве. Вынесем единичные векторы внешних нормалей граней фраг-

мента призматической части на единичную сферу. Обозначим концы единичных векторов $A_1, A_2, \dots, A_n$. Рассмотрим объединение дуг $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$. Получим дугу A_1A_n окружности большого круга. Пусть имеется еще один или несколько фрагментов призматических частей многогранника M , параллельных направлению q , которым соответствуют свои дуги окружности большого круга. Все полученные таким образом дуги окружности большого круга не имеют общих точек.

Рассмотрим многогранники класса $D1$, содержащие два и более фрагментов призматической части (первого или второго вида), параллельных одному направлению. Если построить векторы единичных внешних нормалей к каждой грани каждого фрагмента, а затем перенести все эти векторы на единичную сферу, то все они окажутся лежащими в одной плоскости единичной сферы. Пусть, для определенности, поверхность многогранника класса $D1$ содержит три фрагмента призматической части, каждый из которых параллелен некоторой прямой. Пусть $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_k$ - единичные векторы внешних нормалей первого фрагмента призматической части. Обозначим

$$\alpha = \angle(\vec{n}_1, \vec{n}_k).$$

Аналогично для второго и третьего фрагментов призматических частей получим

$$\beta = \angle(\vec{m}_1, \vec{m}_j), \quad \gamma = \angle(\vec{p}_1, \vec{p}_m).$$

Так как многогранник выпуклый, то углы α, β, γ не имеют общих точек, кроме центра окружности. Заштрихуем эти углы. Среди трех не заштрихованных углов окружности выбираем такой угол, мера которого наибольшая. Если все не заштрихованные углы равны, то выбираем любой из них. Обозначим меру этого угла ∂ . Угол, равный разности полного угла и угла ∂ , назовем углом закрутки фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению в пространстве. Обозначим меру угла закрутки фрагментов призматических частей в данном направлении ϕ . Мы рассмотрели случай, когда фрагментов призматических частей на поверхности многогранника три. Аналогично рассматриваем случай, когда границе многогранника принадлежит любое конечное число фрагментов призматических частей, параллельных одному направлению в пространстве.

Все многогранники класса $D1$, содержащие несколько фрагментов призматической части, параллельных одному направлению в пространстве, раз-

делим на подклассы по величине угла закрутки ϕ фрагментов призматических частей.

- 1) Угол ϕ меньше развернутого угла.
- 2) Угол ϕ равен развернутому углу.
- 3) Угол ϕ больше развернутого угла.

4. Классификация многогранников классов $D2$ и $D3$

Рассмотрим теперь многогранник класса $D2$. Пусть граница многогранника содержит фрагменты призматических частей, грани которых параллельны двум направлениям в пространстве. В каждом из направлений может быть расположен один или несколько фрагментов призматических частей первого или второго вида. Особенности расположения фрагментов призматических частей в одном направлении были рассмотрены в пункте 3. Все рассмотрения пункта 3 можно перенести на фрагменты призматических частей, расположенные в каждом из двух направлений. Если рассмотреть фрагменты призматических частей первого или второго вида, параллельные двум направлениям, то возможны такие случаи их взаимного расположения:

- 1) пересечение двух фрагментов призматических частей, взятых по одному из каждого направления, может быть пусто;
- 2) пересечение фрагментов призматических частей разных направлений может состоять из одной грани или одной вершины;
- 3) пересечение фрагментов призматических частей разных (двух) направлений может состоять из двух параллельных граней, одной грани и одной вершины, а также из двух вершин.

Аналогичные рассуждения можно осуществить и для многогранников класса $D3$.

Литература

1. Hadwiger, G. *Ungeloste Probleme*. References Elem. der Math / G. Hadwiger. – 1957. – № 20.
2. Пуолокайнен, Т. М. Классификация выпуклых многогранников / Т. М. Пуолокайнен // Труды ПетрГУ. Сер. «Математика». – 2004. – Вып. 11.
3. Пуолокайнен, Т. М. Разбиение многогранников класса A на подклассы / Т. М. Пуолокайнен // Альманах современной науки и образования. – № 7(14).
4. Пуолокайнен, Т. М. Покрытие многогранников класса A образами многогранников при гомотетии / Т. М. Пуолокайнен // Вестник ВСГУ. Сер. «Естественные науки». – 2008. – № 4.