УДК 519.872

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С КОНФЛИКТАМИ ЗАЯВОК

Т. В. Любина, А. А. Назаров

RESEARCH OF NON-MARKOVIAN DYNAMIC RQ-SYSTEM WITH CONFLICTS OF DEMANDS

T. V. Lyubina, A. A. Nazarov

Работа выполнена в рамках аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2011 годы)», проект № 11803.

В статье рассматривается немарковская RQ-система с конфликтами заявок, управляемая динамической дисциплиной обслуживания. Проводится анализ этой RQ-системы и находится характеристическая функция распределения вероятностей P(i) числа заявок в источнике повторных вызовов. Найдено условие существования стационарного режима RQ-системы. Получено распределение вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов для гамма-распределения времени обслуживания, а также для экспоненциального времени обслуживания.

In article the non-Markovian RQ-system with conflicts of the demands, controlled dynamic discipline of service is considered. The analysis of this RQ-system is carried out and there is a characteristic function of distribution of probabilities of number of demands in a source of repeated calls. The condition of existence of a stationary mode of RQ-system is found. Distribution of probabilities of number of demands in a source of repeated calls for holding time gamma distribution, and also for an exponential holding time is received.

Ключевые слова: RQ-система, динамический протокол доступа, конфликт заявок, пропускная способность.

Keywords: RQ-system, the dynamic report of access, the conflict of demands, throughput.

Введение

Исследование математических моделей компьютерных сетей связи является необходимым для обеспечения надёжной передачи данных. Методы теории массового обслуживания [1 – 3] являются наиболее действенными в проведении таких исследований, в частности, при исследовании RQ-систем (Retrial Queueing systems) [4 – 7], которые являются адекватными математическими моделями компьютерных сетей связи. В монографии J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral [4] приведено более семисот ссылок на работы по этой тематике, опубликованные за последние двадцать лет.

Большого внимания заслуживают вопросы исследования математических моделей сетей связи случайного доступа [8 – 10]. Особенностью протоколов случайного множественного доступа является то, что для станций не вводится изначальной строгой очерёдности. Каждая станция после появления у неё готового пакета вправе его передавать сразу же, как только обнаружит канал свободным. При этом не исключена возможность возникновения конфликта [11, с. 38], если произойдёт наложение и искажение сигналов, передающих сообщение. В подобных случаях станция прекращает передачу и генерирует случайную задержку, после которой вновь пытается занять канал. Представляет интерес рассмотрение моделей, учитывающих интервалы недоступности прибора (моноканала), когда реализуется этап оповещения о конфликте [12, с. 94 – 111] и комплексное исследование процессов функционирования прибора и источника повторных вызовов.

Исследованию математических моделей компьютерных сетей связи в виде систем массового обслуживания (СМО) с источником повторных вызовов посвящены работы А. А. Назарова, А. Н. Дудина, И. И. Хомичкова [1, 8 – 10, 13 – 14] и др. Однако ряд задач, посвящённых исследованию RQ-систем и моделей сетей случайного доступа, остаётся не решённым, и для них требуется разработка оригинальных методов исследования, в частности, недостаточно исследованы системы с динамическим протоколом доступа.

В данной статье проведем исследование немарковской RQ-системы с конфликтами заявок, управляемой динамической дисциплиной обслуживания.

1. Математическая модель

Рассмотрим немарковскую однолинейную динамическую RQ-систему, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ (рис. 1). Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. Если во время обслуживания одной заявки поступает другая, то они вступают в конфликт. Обе заявки, попавшие в конфликт, переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), из которого с динамической (зависящей от состояния ИПВ) интенсивностью σ / i вновь обращаются к прибору с попыткой повторного его захвата, то есть вероятность обращения к прибору за время Δt для любой заявки из ИПВ составляет $\frac{\sigma}{i}\Delta t + o(\Delta t)$, если в ИПВ находится i заявок. Если прибор свободен, то поступающая заявка становится на обслуживание, если же он занят, то вновь возникает конфликт заявок и процедура его разрешения повторяется.

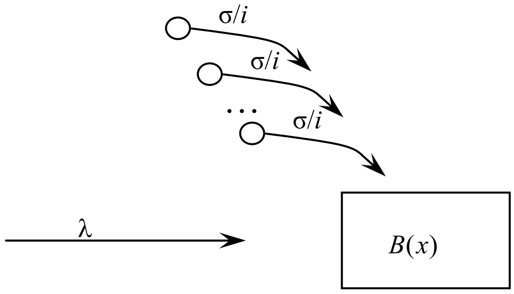

Рис. 1. **Немарковская динамическая RQ-система с конфликтами заявок**

Задачей данной работы является нахождение распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов.

2. Исследование немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом:

$$k(t)=\begin{cases}0, \text{ если прибор свободен,}\\ 1, \text{ если прибор занят,}\end{cases}$$

$z(t)$ – длина интервала от момента t до момента окончания текущего режима функционирования прибора при $k(t)=1$ в момент времени t.

Компонента $z(t)$ определяется только в те моменты, когда $k(t)=1$, если $k(t)=0$, то компонента $z(t)$ не определяется. Обозначим

$P\{k(t)=0, i(t)=i\}=P(0,i,t)$,

$P\{k(t)=1, i(t)=i, z(t)<z\}=P(1,i,z,t)$.

Процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(k,i,z,t)$ состояний $\{k,i,z\}$ рассматриваемой RQ-системы Δt-методом по формуле полной вероятности составим систему равенств:

$$\begin{cases}P(0,0,t+\Delta t)=P(0,0,t)(1-\lambda\Delta t)+P(1,0,\Delta t,t)+o(\Delta t),\\ P(1,0,z-\Delta t,t+\Delta t)=\left[P(1,0,z,t)-P(1,0,\Delta t,t)\right](1-\lambda\Delta t)+P(0,0,t)\lambda\Delta tB(z)+P(0,1,t)\sigma\Delta tB(z)+o(\Delta t),\\ P(0,1,t+\Delta t)=P(0,1,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t)+P(1,1,\Delta t,t)+o(\Delta t),\\ P(1,1,z-\Delta t,t+\Delta t)=\left[P(1,1,z,t)-P(1,1,\Delta t,t)\right](1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t)+P(0,1,t)\lambda\Delta tB(z)+\\ \quad+P(0,2,t)\sigma\Delta tB(z)+o(\Delta t),\\ \ldots\\ P(0,i,t+\Delta t)=P(0,i,t)(1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t)+P(1,i,\Delta t,t)+P(1,i-2,t)\lambda\Delta t+P(1,i-1,t)\sigma\Delta t+o(\Delta t),\\ P(1,i,z-\Delta t,t+\Delta t)=\left[P(1,i,z,t)-P(1,i,\Delta t,t)\right](1-\lambda\Delta t)(1-\sigma\Delta t)+P(0,i,t)\lambda\Delta tB(z)+\\ \quad+P(0,i+1,t)\sigma\Delta tB(z)+o(\Delta t),\end{cases} \tag{1}$$

применяя которые, получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова и запишем её для стационарного распределения $P(0,i,t)=P(0,i)$, $P(1,i,z,t)=P(1,i,z)$:

$$\begin{cases}-P(0,0)\lambda+\dfrac{\partial P(1,0,0)}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial P(1,0,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial P(1,0,0)}{\partial z}-P(1,0,z)\lambda+\\ +P(0,0)\lambda B(z)+P(0,1)\sigma B(z)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}-P(0,1)(\lambda+\sigma)+\dfrac{\partial P(1,1,0)}{\partial z}=0,\\ \dfrac{\partial P(1,1,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial P(1,1,0)}{\partial z}-P(1,1,z)(\lambda+\sigma)+\\ +P(0,1)\lambda B(z)+P(0,2)\sigma B(z)=0,\end{cases} \tag{2}$$

$$\ldots$$

$$\begin{cases}-P(0,i)(\lambda+\sigma)+\dfrac{\partial P(1,i,0)}{\partial z}+\\ +P(1,i-2)\lambda+P(1,i-1)\sigma=0,\\ \dfrac{\partial P(1,i,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial P(1,i,0)}{\partial z}-P(1,i,z)(\lambda+\sigma)+\\ +P(0,i)\lambda B(z)+P(0,i+1)\sigma B(z)=0.\end{cases}$$

Чтобы решить систему (2), определим характеристические функции:

$$H(0,u)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(0,i),$$

$$H(1,u,z)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P(1,i,z). \tag{3}$$

Тогда из системы (2) с учётом равенств (3) получаем следующую систему уравнений для функций $H(0,u)$ и $H(1,u,z)$:

$$\begin{cases} -H(0,u)(\lambda+\sigma)+P(0,0)\sigma+\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}+H(1,u)e^{2ju}\lambda+H(1,u)e^{ju}\sigma-P(1,0)e^{ju}\sigma=0, \\ \dfrac{\partial H(1,u,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(1,u,z)(\lambda+\sigma)+P(1,0,z)\sigma+H(0,u)\lambda B(z)+H(0,u)e^{-ju}\sigma B(z)- \\ -P\left(0,0\right)e^{-ju}\sigma B(z)=0, \end{cases} \tag{4}$$

которая является системой двух уравнений с двумя основными неизвестными $H(0,u)$, $H(1,u)$ и четырьмя вспомогательными неизвестными $\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}$, $P(0,0)$, $P\left(1,0\right)$ и $P(1,0,z)$.

Нахождение вспомогательных неизвестных

Из первых двух уравнений системы (2) неизвестные $P\left(1,0\right)$ и $P(1,0,z)$ выразим через величину $P(0,0)$. Для этого второе уравнение системы (2) запишем в виде:

$$\frac{\partial P(1,0,z)}{\partial z}-P(1,0,z)\lambda=$$
$$=\frac{\partial P(1,0,0)}{\partial z}-P(0,0)\lambda B(z)-P(0,1)\sigma B(z),$$

откуда получим:

$$P(1,0,z)=$$
$$=e^{\lambda z}\int_0^z e^{-\lambda x}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial P(1,0,0)}{\partial z}- \\ -P(0,0)\lambda B(x)-P(0,1)\sigma B(x)\end{Bmatrix}dx. \tag{5}$$

Так как $\lambda>0$, следовательно, $\lim\limits_{z\to\infty}e^{\lambda z}=\infty$, отсюда следует, что для второго сомножителя выполняется предельное равенство:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial P(1,0,0)}{\partial x}-P\left(0,0\right)\lambda B(x)- \\ -P\left(0,1\right)\sigma B(x)\end{Bmatrix}dx=0.$$

Тогда, определяя здесь значения интегралов получим равенство:

$$\frac{\partial P(1,0,0)}{\partial x}-P(0,0)\lambda B^*(\lambda)-P(0,1)\sigma B^*(\lambda)=0, \tag{6}$$

где

$$B^*(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}dB(x). \tag{7}$$

Из первого уравнения системы (2) следует, что

$$\frac{\partial P(1,0,0)}{\partial z}=P(0,0)\lambda, \tag{8}$$

поэтому уравнение (6) примет вид:

$$P\left(0,0\right)\lambda\left(1-B^*(\lambda)\right)-P\left(0,1\right)\sigma B^*(\lambda)=0,$$

следовательно,

$$\sigma P(0,1)=\lambda P(0,0)\frac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}. \tag{9}$$

Тогда, с учётом (8) и (9), равенство (5) перепишем в виде:

$$P(1,0,z)=P(0,0)e^{\lambda z}\int_0^z e^{-\lambda x}\begin{Bmatrix}\lambda-\lambda B(x)- \\ -\lambda\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}B(x)\end{Bmatrix}dx=$$
$$=\lambda P(0,0)e^{\lambda z}\int_0^z e^{-\lambda x}\left\{1-\frac{B(x)}{B^*(\lambda)}\right\}dx.$$

Так как $P\left(1,0\right)=\lim\limits_{z\to\infty}P(1,0,z)$, то

$$P\left(1,0\right)=P(0,0)\frac{\lambda\left(1-\dfrac{1}{B^*(\lambda)}\right)}{-\lambda}=$$
$$=P(0,0)\left(\frac{1}{B^*(\lambda)}-1\right)=P(0,0)\frac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}. \tag{10}$$

Таким образом, неизвестные $P(1,0,z)$ и $P\left(1,0\right)$ выражены через величину $P(0,0)$, которую определим ниже.

Нахождение $H(0,u)$ *и* $H(1,u)$.

Перепишем систему (4) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)(\lambda+\sigma)+H(1,u)\left(e^{2ju}\lambda+e^{ju}\sigma\right)+P(0,0)\sigma-P(1,0)e^{ju}\sigma=0, \\ \dfrac{\partial H(1,u,z)}{\partial z}-H(1,u,z)(\lambda+\sigma)=\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)\left(\lambda+e^{-ju}\sigma\right)B(z)+ \\ \qquad +P\left(0,0\right)e^{-ju}\sigma B(z)-P(1,0,z)\sigma. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, запишем:

$$H(1,u,z)=e^{(\lambda+\sigma)z}\int_0^z e^{-(\lambda+\sigma)x}\left\{\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)\left(\lambda+e^{-ju}\sigma\right)B(x)-P(1,0,x)\sigma+P(0,0)e^{-ju}\sigma B(x)\right\}dx.$$

Так как $H\left(1,u\right)=\lim\limits_{z\to\infty}H(1,u,z)$, то

$$H(1,u)=\frac{\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)\left(\lambda+e^{-ju}\sigma\right)-P(1,0)\sigma+P(0,0)e^{-ju}\sigma}{-(\lambda+\sigma)},$$

тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)\left(\lambda+e^{-ju}\sigma\right)+H(1,u)\left(\lambda+\sigma\right)=P(1,0)\sigma-P(0,0)e^{-ju}\sigma,\\ \dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)\left(\lambda+e^{-ju}\sigma\right)B^{*}(\lambda+\sigma)=P^{*}(1,0,\lambda+\sigma)\sigma-P(0,0)e^{-ju}\sigma B^{*}(\lambda+\sigma),\\ \dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-H(0,u)(\lambda+\sigma)+H(1,u)\left(e^{2ju}\lambda+e^{ju}\sigma\right)=P(1,0)e^{ju}\sigma-P(0,0)\sigma,\end{cases}\qquad(11)$$

где $P\left(1,0\right)$ определяется равенством (10),

$$B^{*}(\lambda+\sigma)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\left(\lambda+\sigma\right)z}dB(z),\qquad(12)$$

$$P^{*}(1,0,\lambda+\sigma)=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\left(\lambda+\sigma\right)z}dP(1,0,z)=\frac{\lambda}{\sigma}P(0,0)\frac{B^{*}(\lambda)-B^{*}(\lambda+\sigma)}{B^{*}(\lambda)}.$$

Система (11) является системой трех уравнений относительно двух основных неизвестных $H(0,u)$, $H(1,u)$ и двух вспомогательных неизвестных $\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}$ и $P\left(0,0\right)$.

Для того чтобы найти $\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}$, домножим первое уравнение системы (11) на $-e^{ju}$ и, складывая с третьим, запишем:

$$\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}\left(1-e^{ju}\right)-H(0,u)\lambda\left(1-e^{ju}\right)-$$
$$-H(1,u)\lambda e^{ju}\left(1-e^{ju}\right)=0,$$

откуда получим равенство:

$$\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}=H(0,u)\lambda+H(1,u)\lambda e^{ju}.\qquad(13)$$

Таким образом в системе (11) остается неизвестно только одна вспомогательная величина $P\left(0,0\right)$, для того, чтобы её определить в системе (11), положим $u=0$, получим следующую систему двух уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial H(1,0,0)}{\partial z}-H(0,0)\left(\lambda+\sigma\right)+\\ +H(1,0)\left(\lambda+\sigma\right)=P(1,0)\sigma-P(0,0)\sigma,\\ \dfrac{\partial H(1,0,0)}{\partial z}-H(0,0)\left(\lambda+\sigma\right)B^{*}(\lambda+\sigma)=\\ =P^{*}(1,0,\lambda+\sigma)\sigma-P(0,0)\sigma B^{*}(\lambda+\sigma).\end{cases}\qquad(14)$$

При $u=0$ из (13) получим:

$$\left.\frac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}\right|_{u=0}=H(0,0)\lambda+H(1,0)\lambda=\lambda.$$

Применяя это равенство к уравнениям системы (14) получаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases}2\lambda+\sigma-2H(0,0)\left(\lambda+\sigma\right)=\\ =\sigma P(0,0)\dfrac{1-B^{*}(\lambda)}{B^{*}(\lambda)}-\sigma P(0,0),\\ \lambda-H(0,0)\left(\lambda+\sigma\right)B^{*}(\lambda+\sigma)=\\ =\lambda P(0,0)\dfrac{B^{*}(\lambda)-B^{*}(\lambda+\sigma)}{B^{*}(\lambda)}-\\ -\sigma P(0,0)B^{*}(\lambda+\sigma),\end{cases}\qquad(15)$$

относительно двух неизвестных $H(0,0)$ и $P(0,0)$. Из полученной системы (15) нетрудно получить выражение, определяющее значение величины $P\left(0,0\right)$:

$$P(0,0)=\frac{\left(2\lambda+\sigma\right)B^{*}(\lambda+\sigma)-2\lambda}{\left(2\lambda+\sigma\right)B^{*}(\lambda+\sigma)-2\lambda B^{*}(\lambda)}B^{*}(\lambda).\qquad(16)$$

Таким образом, значение величины $P(0,0)$ определяется равенством (16), а с учётом равенства (13) в системе (11) значения функций $H(k,u)$ определяются однозначно из следующей системы:

$$\begin{cases} H(0,u)\Big(\lambda-\Big(\lambda+\sigma e^{-ju}\Big)B^*(\lambda+\sigma)\Big)+H(1,u)\lambda e^{ju} = P(0,0)\left\{\lambda\dfrac{B^*(\lambda)-B^*(\lambda+\sigma)}{B^*(\lambda)}-\sigma e^{-ju}B^*(\lambda+\sigma)\right\}, \\ -H(0,u)\sigma e^{-ju} + H(1,u)\Big(\lambda e^{ju}+\lambda+\sigma\Big) = P(0,0)\left\{\sigma\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}-\sigma e^{-ju}\right\}. \end{cases}$$

Решая данную систему уравнений, выражения для нахождения функций $H(0,u)$ и $H(1,u)$ примут вид:

$$\begin{cases} H(0,u)=\dfrac{\left\{\lambda-\Big(\lambda+\sigma e^{-ju}\Big)B^*(\lambda+\sigma)\right\}\left\{\sigma\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}-\sigma e^{-ju}\right\}+\sigma e^{-ju}\left\{\lambda\dfrac{B^*(\lambda)-B^*(\lambda+\sigma)}{B^*(\lambda)}-\sigma e^{-ju}B^*(\lambda+\sigma)\right\}}{\left\{\lambda-\Big(\lambda+\sigma e^{-ju}\Big)B^*(\lambda+\sigma)\right\}\Big(\lambda e^{ju}+\lambda+\sigma\Big)+\lambda\sigma}P(0,0), \\ H(1,u)=\dfrac{\left\{\lambda\dfrac{B^*(\lambda)-B^*(\lambda+\sigma)}{B^*(\lambda)}-\sigma e^{-ju}B^*(\lambda+\sigma)\right\}\Big(\lambda e^{ju}+\lambda+\sigma\Big)-\left\{\sigma\dfrac{1-B^*(\lambda)}{B^*(\lambda)}-\sigma e^{-ju}\right\}\lambda e^{ju}}{\left\{\lambda-\Big(\lambda+\sigma e^{-ju}\Big)B^*(\lambda+\sigma)\right\}\Big(\lambda e^{ju}+\lambda+\sigma\Big)+\lambda\sigma}P(0,0), \end{cases}$$

где преобразования Лапласа-Стилтьеса $B^*(\lambda)$ и $B^*(\lambda+\sigma)$ определяются равенствами (7) и (12) соответственно, а $P(0,0)$ определяется равенством (16).

Так как характеристическая функция $h(u) = Me^{jui(t)}$ определяется равенством:

$h(u) = H(0,u) + H(1,u)$,

то распределение вероятностей $P(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов определяется обратным преобразованием Фурье:

$$P(i) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui}h(u)du. \qquad (17)$$

Численное интегрирование в (17) при заданных значениях параметров λ, σ и преобразованиях Лапласа-Стилтьеса $B^*(\lambda)$ и $B^*(\lambda+\sigma)$ не представляет труда для широкого спектра значений i.

3. Исследование условия существования стационарного режима

В силу свойств вероятности, должны выполняться неравенства $0 < P(0,0) < 1$, то есть из (16) запишем двойное неравенство:

$$0 < \frac{\Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma)-2\lambda}{\Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma)-2\lambda B^*(\lambda)}B^*(\lambda) < 1,$$

которое определяет условие существования стационарного режима. Таким образом, в данном неравенстве необходимо, чтобы числитель и знаменатель принимали значения одного и того же знака. Нетрудно показать, что эти значения должны быть положительными, тогда имеет место система трёх неравенств:

$$\begin{cases} \Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma)-2\lambda < \Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma)-2\lambda B^*(\lambda), \\ \Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma) > 2\lambda, \\ \Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma) > 2\lambda B^*(\lambda). \end{cases}$$

Таким образом, из вида этой системы следует, что при выполнении второго неравенства

$$\Big(2\lambda+\sigma\Big)B^*(\lambda+\sigma) > 2\lambda, \qquad (18)$$

выполняются также и два остальных неравенства.

Полученное неравенство (18) является необходимым и достаточным условием существования стационарного режима в немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок.

4. Численные результаты

1) Рассмотрим гамма-распеделение времени обслуживания заявок. Для гамма-распределения с параметрами α и β преобразования Лапласа-Стилтьеса $B^*(\lambda)$ и $B^*(\lambda+\sigma)$ имеют следующий вид:

$$B^*(\lambda) = \left(\frac{\beta+\lambda}{\beta}\right)^{-\alpha},$$

$$B^*(\lambda+\sigma) = \left(\frac{\beta+\lambda+\sigma}{\beta}\right)^{-\alpha}. \qquad (19)$$

Значение пропускной способности для RQ-системы с таким гамма-распределением будет определяться условием (18), в котором $B^*(\lambda+\sigma)$ имеет соответствующий вид (19).

Определение. Пропускной способностью сети связи называется точная верхняя граница S тех значений загрузки $\rho = \lambda b$, где b – среднее значение времени обслуживания, для которых в математической модели сети существует стационарный режим.

Для заданных значений параметров $\sigma = 0,5$, $\alpha = \beta = 0,5$ пропускная способность данной системы $S = 0,379$, тогда параметр λ примем равным $\lambda = 0,35$. Распределение вероятностей $P_1(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов определяется обратным преобразованием Фурье (17) и приведено в табл. 1, где также указаны значения величин $\delta_1(i) = P_1(i+1) \,/\, P_1(i)$.

Таблица 1

Распределение вероятностей $P_1(i)$ числа заявок в ИПВ при гамма-распределении времени обслуживания

i	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
$P_1(i)$	0,1566	0,0420	0,0720	0,0593	0,0557	0,0508	0,0467	0,0428	0,0393
$\delta_1(i)$	0,2680	1,7151	0,8231	0,9403	0,9122	0,9183	0,9169	0,9172	0,9172
i	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$P_1(i)$	0,0360	0,0330	0,0303	0,0278	0,0255	0,0234	0,0214	0,0196	…
$\delta_1(i)$	0,9172	0,9172	0,9172	0,9172	0,9172	0,9172	0,9172	0,9172	…

Данное распределение вероятностей $P_1(i)$ обладает свойством стабилизации последовательности соотношений $\delta_1(i) = P_1(i+1) \,/\, P_1(i)$, которая достаточно быстро стабилизируется и принимает постоянное значение при $i > 3$ с точностью до двух знаков после запятой. Аналогичные результаты имеют место и для других значений параметров λ, σ, α и β.

2) При $\alpha = 1$ и $\beta = \mu$ гамма-распределение является экспоненциальным, то есть требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего экспоненциальную функцию распределения с параметром μ. Тогда $B^*(\lambda)$ и $B^*(\lambda+\sigma)$ примут вид: $B^*(\lambda) = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda}$, $B^*(\lambda+\sigma) = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda+\sigma}$, а значение величины $P(0,0)$ будет выглядеть следующим образом:

$$P(0,0) = \frac{\sigma\mu - 2\lambda\left(\lambda+\sigma\right)}{\sigma\left(\mu-\lambda\right)}.$$

В силу свойств вероятности должно выполняться следующее неравенство:

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{1}{1+\sqrt{1+\dfrac{2\mu}{\sigma}}} = S\,, \qquad (20)$$

где S – пропускная способность рассматриваемой системы.

Определим значение параметра λ. Для заданных значений параметров $\mu = 1$, $\sigma = 4$ пропускная способность данной системы $S = 0,4495$, поэтому примем $\lambda = 0,4$. Распределение вероятностей $P_2(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов определяется обратным преобразованием Фурье (17) (табл. 2).

Таблица 2

Распределение вероятностей $P_2(i)$ числа заявок в ИПВ при экспоненциальном распределении времени обслуживания

i	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***
$P_2(i)$	0,2800	0,0432	0,0795	0,0685	0,0607	0,0537	0,0476	0,0421	0,0373
$\delta_2(i)$	0,1543	1,8400	0,8617	0,8864	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851
i	9	10	11	12	13	14	15	16	…
$P_2(i)$	0,0330	0,0292	0,0259	0,0229	0,0203	0,0179	0,0159	0,0141	…
$\delta_2(i)$	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851	0,8851	…

Распределение вероятностей $P_2(i)$ также обладает свойством стабилизации последовательности соотношений $\delta_2(i) = P_2(i+1) \,/\, P_2(i)$ и при $i > 2$ принимает постоянное значение с точностью до двух знаков после запятой. Аналогичные результаты имеют место и для других значений параметров λ, σ и μ.

Результаты, полученные в случае экспоненциального распределения времени обслуживания, совпадают с результатами исследования марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок [7, с. 73 – 84].

Заключение

Таким образом, в данной статье проведено исследование немарковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок. В результате исследования получена характеристическая функция для распределения вероятностей $P(i)$ числа заявок в источнике повторных вызовов в виде обратного преобразования Фурье (17). Найдено условие существования стационарного режима данной RQ-системы в виде (18).

Далее для гамма-распределения и экспоненциального распределения времени обслуживания заявок найдены распределение вероятностей $P_1(i)$ и

$P_2(i)$ числа заявок в ИПВ соответственно. Обнаружено свойство стабилизации последовательностей соотношений $\delta(i) = P(i+1) \,/\, P(i)$. Показано, что распределение вероятностей $P_2(i)$ совпадает с полученным ранее распределением вероятностей числа заявок в ИПВ при исследовании марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок.

Литература

1. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания: учеб. пособие / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск: НТЛ, 2010. – 228 с.

2. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. Изд. 3-е, испр. и доп. – М.: КомКнига, 2005. – 400 с.

3. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и её приложения / Т. Л. Саати. – М.: Сов. радио, 1971.

4. Artalejo, J. R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral. – Springer, 2008. – 309 p.

5. Falin, G. I. A finite source retrial queue / G. I. Falin, J. R. Artalejo // European Journal of Operation Research. – 1998. – № 108.

6. Falin, G. I. Approximations for multiserver queues with balking/retrial discipline / G. I. Falin, J. R. Artalejo. – OR Spektrum, 1995.

7. Любина, Т. В. Исследование марковской динамической RQ-системы с конфликтами заявок / Т. В. Любина, А. А. Назаров // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2010. – № 3(12).

8. Назаров, А. А. Сравнение асимптотической и допредельной модели сети связи с динамическим протоколом случайного множественного доступа / А. А. Назаров, С. Л. Шохор; под ред. И. А. Александрова и др. – Томск: Пелент, 1998.

9. Назаров, А. А. Исследование сети связи с динамическим протоколом «синхронная Алоха» в условиях большой загрузки / А. А. Назаров, Ю. Д. Одышев // Автоматика и вычислительная техника. – 2001. – № 1.

10. Назаров, А. А. Устойчивое функционирование нестабильных сетей связи с протоколами случайного множественного доступа / А. А. Назаров // Проблемы передачи информации. – 1997. – № 2.

11. Любина, Т. В. Аппроксимация допредельного распределения в динамической RQ-системе с конфликтами заявок / Т. В. Любина, А. А. Назаров // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: тезисы докладов VIII Российской конференции с международным участием. – Томск: НТЛ, 2010.

12. Назаров, А. А. Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа / А. А. Назаров, Е. А. Судыко // Проблемы передачи информации. – 2010. – № 1.

13. Дудин, А. Н. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками / А. Н. Дудин, В. И. Клименок. – Минск: БГУ, 2000. – 221 с.

14. Хомичков И. И. Системы массового обслуживания с повторными вызовами и вероятность потери при сдвоенных соединениях / И. И. Хомичков // Доклады НАН Беларуси. – 1998. – Т. 42. – № 2.